4 一元二次方程式

- 7上3-1 式子的運算
- 7上3-2 解一元一次方程式
- 8上1-1 乘法公式
- 8上3-1 提公因式與乘法公式作因式分解

4-1 因式分解法解一元二次方程式

1. 一元二次方程式的意義
2. 因式分解法解一元二次方程式

- 8上2-1 二次方根的意義
- 8上1-1 乘法公式

4-2 配方法與公式解

1. 平方根解法
2. 配方法解一元二次方程式
3. 一元二次方程式的公式解

- 高中1年級 一元二次不等式
- 高中3年級 根與係數 複數與方程式 方程式的虛根

- 7上3-3 一元一次方程式的應用問題

4-3 應用問題

學習完因式分解一元二次多項式後，該如何應用在生活當中呢？透過解一元二次方程式，可以幫我們解決生活中的數學問題。

回顧七年級，我們學習過解一元一次方程式，本單元將進一步學習如何列出一元二次方程式，並求得方程式的解。

神祕福袋一個賣 100 元，平均每小時可賣 30 個，只要福袋每降價 1 元，平均每小時就會多賣 10 個，當福袋賣多少元時，每小時的總收入是 11700 元呢？

學習前哨站

本單元為學生自我複習，
教師可視班級情況決定如何運用。

回顧 1 解一元一次方程式

7 上第 3 章

解下列各一元一次方程式：

(1) $x+7=0$

$x=-7$

(2) $2x-1=0$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

課前練習

解下列各一元一次方程式：

(1) $x+11=0$，$x=$ ______ 。

(2) $3x-5=0$，$x=$ ______ 。

回顧 2 提公因式

8 上第 3 章

因式分解 $(x+1)(2x-3)+(x-2)(2x-3)=(2x-3)[(x+1)+(x-2)]$

$=(2x-3)(2x-1)$

課前練習

因式分解下列各式：

(1) $x^2+4x=$ ______ 。

(2) $x(x-8)+2(x-8)=$ ______ 。

回顧 3 十字交乘

8 上第 3 章

因式分解 x^2+4x+3 可得 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$。

$$\begin{array}{ccc} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & +1 \\ x & & +3 \\ \hline x & + & 3x=4x \end{array}$$

課前練習

因式分解下列各式：

(1) $x^2-5x-6=$ ______ 。

(2) $x^2-6x+9=$ ______ 。

解答：1. (1) -11 (2) $\frac{5}{3}$　2. (1) $x(x+4)$ (2) $(x-8)(x+2)$　3. (1) $(x-6)(x+1)$ (2) $(x-3)^2$

4-1 因式分解法解一元二次方程式

① 一元二次方程式的意義

博士有一塊長方形菜園，面積為 84 平方公尺，如果長比寬多 5 公尺，要怎麼知道長和寬是多少呢？

設寬為 x 公尺，則長為 $x+5$ 公尺，
由長方形面積公式可得 $x(x+5)=84$，
將等式展開為 $x^2+5x=84$，
再移項整理成 $x^2+5x-84=0$。

像這樣可以整理成只含有一種未知數 x，且最高次數為 2 的等式，就稱為**一元二次方程式**。而像 $2x^2+5x-3=2x^2-5x+4$ 這樣的方程式，經化簡後得 $10x-7=0$，就不是一元二次方程式。

一元二次方程式

可以整理成 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的形式，只含有一種未知數 x，且未知數 x 的最高次數是 2 的等式，稱為一元二次方程式。

隨堂練習

1. 判別下列哪些為一元二次方程式，在 □ 中打「✓」。

□ $-3x+5=x^2$　　□ $(3-x)(2-x)=0$　　□ $3x^2-x^3=-1$

□ $x^2-\dfrac{5}{2}=3x$　　□ $(x-1)^2=x$　　□ x^2+x-5

2. 長方形的長為 $(x+2)$，寬為 $(x-1)$，若面積為 18，則依長方形面積公式，可列得一元二次方程式：____________________。

七年級曾經學過，要判別一個數是不是方程式的解，可以將該數代入方程式，看看是否能讓方程式的等號成立。例如：要判別 0、1、2、3 是不是方程式 $x^2-3x+2=0$ 的解，可將 $x=0$、1、2、3 逐一代入方程式 $x^2-3x+2=0$ 中：

x	$x^2-3x+2=0$	是否為解
0	$0^2-3\times0+2\neq0$	否
1	$1^2-3\times1+2=0$	是
2	$2^2-3\times2+2=0$	是
3	$3^2-3\times3+2\neq0$	否

由上表可知，1 和 2 都是方程式 $x^2-3x+2=0$ 的解，解亦稱為**根**。

隨堂練習

自評 P160 第 1 題

1. 判別 $x=1$ 是否為 $x^2-3x+4=0$ 的解？

2. 判別 $x=-2$ 是否為 $x^2+12x+20=0$ 的解？

例 1 一元二次方程式的解

若 $x=2$ 為 $x^2+3x+m=0$ 的一個解，求 m 的值。

解 將 $x=2$ 代入 $x^2+3x+m=0$

得 $2^2+3\times2+m=0$

$10+m=0$

$m=-10$

隨堂練習

若 $x=-1$ 為 $2x^2+nx+3=0$ 的一個解，求 n 的值。

要判別某數是否為方程式的解時，可利用上述的方式代入檢驗，但是如果要直接求得方程式的解，就需用比較有效率的求解方法。例如：利用因式分解的方法，將方程式 $x^2-3x+2=0$ 寫成 $(x-1)(x-2)=0$，再運用「如果 $A\times B=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$。」的性質，解法如下：

A	$\times$	B	$=0$	，則	A	$=0$	或	B	$=0$
$\uparrow$		$\uparrow$			$\uparrow$			$\uparrow$	
$(x-1)$		$(x-2)$	$=0$	，則	$(x-1)$	$=0$	或	$(x-2)$	$=0$
					x	$=1$	或	x	$=2$

這樣就可以很快地找出這兩個解為 $x=1$、$x=2$。因為任何 $x\neq 1$，$x\neq 2$ 的值均無法使 $(x-1)(x-2)$ 的值為 0，所以只有 1 與 2 是一元二次方程式 $(x-1)(x-2)=0$ 的解。

因此，一元二次方程式 $(ax+b)(cx+d)=0$ 的解有兩個，分別為 $ax+b=0$ 或 $cx+d=0$ 的解，即解為 $x=-\dfrac{b}{a}$ 與 $x=-\dfrac{d}{c}$。

隨堂練習

求下列各一元二次方程式的解：

(1) $(x+2)(x-3)=0$

(2) $(3x-2)(2x+5)=0$

② 因式分解法解一元二次方程式

將一元二次方程式整理成等號右邊為 0 的方程式後，若等號左邊的二次式可以利用因式分解的方法分成兩個一次式的乘積時，就可如前面的 隨堂練習 一樣，求得此方程式的解。

例2 提單項公因式

自評 P160 第 2 題 (1)

解下列各一元二次方程式：

(1) $2x^2-5x=0$　　(2) $x^2=3x$

解

(1) $2x^2-5x=0$

提出公因式 x

$x(2x-5)=0$

$x=0$ 或 $2x-5=0$

$x=0$ 或 $x=\dfrac{5}{2}$

此方程式的解為 0 與 $\dfrac{5}{2}$ 。

(2) $x^2=3x$

移項

$x^2-3x=0$

提出公因式 x

$x(x-3)=0$

$x=0$ 或 $x-3=0$

$x=0$ 或 $x=3$

此方程式的解為 0 與 3。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $6x^2+2x=0$　　(2) $x^2=-2x$

由 例2 及 隨堂練習 可知，如果一元二次方程式缺常數項（即常數項為 0），必可提出公因式 x，所以此類方程式必有一個解為 0。

例 3 提公因式 $ax+b$

自評 P160 第 2 題 (2)

解一元二次方程式 $5x(3x+1)=2(3x+1)$。

解

$$\begin{aligned}
&5x(3x+1)=2(3x+1) && \text{移項}\\
&5x(3x+1)-2(3x+1)=0 && \text{提出公因式 } 3x+1\\
&(3x+1)(5x-2)=0
\end{aligned}$$

$3x+1=0$ 或 $5x-2=0$

$x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=\dfrac{2}{5}$

此方程式的解為 $-\dfrac{1}{3}$ 與 $\dfrac{2}{5}$。

Thinking

小敏解 $5x(3x+1)=2(3x+1)$ 時，將等號兩邊同除以 $3x+1$ 得 $5x=2$，只解出 $x=\dfrac{2}{5}$，這個作法對嗎？為什麼？

隨堂練習

解一元二次方程式 $(x-4)(5x-2)=-2(5x-2)$。

例4 乘法公式

自評 P160 第 2 題(3)(4)

解下列各一元二次方程式：

(1) $(x+2)^2-1^2=0$ (2) $x^2-6x+9=0$

解 (1) $(x+2)^2-1^2=0$

平方差公式

$[(x+2)+1][(x+2)-1]=0$

$(x+3)(x+1)=0$

$x+3=0$ 或 $x+1=0$

$x=-3$ 或 $x=-1$

此方程式的解為 -3 與 -1。

(2) $x^2-6x+9=0$

差的平方公式

$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=0$

$(x-3)^2=0$

$(x-3)(x-3)=0$

$x-3=0$ 或 $x-3=0$

$x=3$ 或 $x=3$

此方程式的解為 3（重根）。

> 也可以利用十字交乘法求解：
> $x^2-6x+9=0$
>
> $x \quad -3$
>
> $x \quad -3$
>
> $-3x - 3x = -6x$

例4 第(2)題的方程式 $x^2-6x+9=0$，左式是同一個一次式 $x-3$ 自乘兩次，應該把解寫成 $x=3$，3。像這種情況，此方程式的解 $x=3$ 是一個**重根**，表示同一個解重複出現。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2-1=0$ (2) $x^2+4x+4=0$

例5 十字交乘法

自評 P161 第 2 題 (5)(6)

解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2+11x+6=0$　　(2) $(x+2)(x-4)=7$

解 (1) $3x^2+11x+6=0$

$(3x+2)(x+3)=0$

$3x+2=0$ 或 $x+3=0$

$x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=-3$

此方程式的解為 $-\frac{2}{3}$ 與 -3。

$$\begin{array}{ccc} 3x & \times & +2 \\ x & & +3 \\ \hline 2x & + & 9x=11x \end{array}$$

(2) $(x+2)(x-4)=7$

展開

$x^2-4x+2x-8=7$

移項合併

$x^2-2x-15=0$

$(x-5)(x+3)=0$

$x-5=0$ 或 $x+3=0$

$x=5$ 或 $x=-3$

此方程式的解為 5 與 -3。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -5 \\ x & & +3 \\ \hline -5x & + & 3x=-2x \end{array}$$

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $5x^2+3x=14$　　(2) $(x+2)(x-1)=10$

$x^2+12x-20$　$x^2+8x-20$　$x^2+19x-20$，哪一個多項式應該被拿走？

有時候先利用等量公理簡化方程式的係數，更容易求得一元二次方程式的解。

例 6 係數化簡

自評 P161 第 2 題 (7)(8)

解下列各一元二次方程式：

(1) $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}=0$　　(2) $8x^2-24x+16=0$

解 (1) 將等號的左右兩邊同乘以 4，得

$6x^2+x-5=0$

$(6x-5)(x+1)=0$

$6x-5=0$ 或 $x+1=0$

$x=\frac{5}{6}$ 或 $x=-1$

此方程式的解為 $\frac{5}{6}$ 與 -1。

$$\begin{array}{ccc} 6x & \times & -5 \\ x & & +1 \\ \hline -5x & + & 6x=x \end{array}$$

(2) 將等號的左右兩邊同除以 8，得

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x-1=0$ 或 $x-2=0$

$x=1$ 或 $x=2$

此方程式的解為 1 與 2。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -1 \\ x & & -2 \\ \hline -x & - & 2x=-3x \end{array}$$

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2+\frac{5}{3}x-4=0$　　(2) $7x^2-7x-42=0$

例 7 求方程式的另一解

自評 P161 第 3 題

若 4 為一元二次方程式 $x^2+2x-m=0$ 的一個解，求 m 的值及此方程式的另外一個解。

解 將 4 代入方程式 $x^2+2x-m=0$，得

$4^2+2\times4-m=0$

$16+8-m=0$

$24-m=0$

$m=24$

此方程式為 $x^2+2x-24=0$

$(x-4)(x+6)=0$

$x-4=0$ 或 $x+6=0$

$x=4$ 或 $x=-6$

故 $m=24$，而此方程式的另外一個解為 -6。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -4 \\ x & & +6 \\ \hline -4x & + & 6x=2x \end{array}$$

隨堂練習

若 -3 為一元二次方程式 $2x^2+(2m-1)x-m=0$ 的一個解，求 m 的值及此方程式的另外一個解。

解答：$x^2+12x-20$。（無法再十字交乘因式分解）

補給站 代換法解方程式

當我們在解一元二次方程式的時候，可能出現部分相同的式子，顯得式子比較複雜，例如：解一元二次方程式$(x-2)^2+3(x-2)-4=0$。

$(x-2)^2+3(x-2)-4=0$

$x^2-4x+4+3x-6-4=0$

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x+2=0$ 或 $x-3=0$

$x=-2$ 或 $x=3$

此方程式的解為-2與3。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & +2 \\ x & & -3 \\ \hline 2x & - & 3x=-x \end{array}$$

上面的作法較為冗長且容易犯錯，所以我們可以考慮以代號取代較長較複雜的式子，如此便可大幅簡化原本的方程式，解出方程式後再還原成原本的式子，方法如下：

$(x-2)^2+3(x-2)-4=0$

令 $A=x-2$，則

$A^2+3A-4=0$

$(A+4)(A-1)=0$

$A=-4$ 或 $A=1$

即 $x-2=-4$ 或 $x-2=1$ ⟵ 將 A 還原成$(x-2)$

$x=-2$ 或 $x=3$

此方程式的解為-2與3。

$$\begin{array}{ccc} A & \times & +4 \\ A & & -1 \\ \hline 4A & - & A=3A \end{array}$$

事實上，代換法不只可用在二次多項式的因式分解，在高中時，你會有機會學習到使用代換法解不同的方程式。

重點回顧

❶ 一元二次方程式

可以整理成 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的形式，只含有一種未知數 x，且未知數最高次數是 2 的等式，稱為一元二次方程式。

例 $3x(x-2)=1$ 可展開移項整理成 $3x^2-6x-1=0$，
所以它是一元二次方程式。

❷ 一元二次方程式的解

要判別一個數是不是方程式的解，可以將該數代入方程式，看看是否能讓方程式的等號成立，如果等號成立就是解，解亦稱為根，若一元二次方程式的兩根相等，稱為重根。

例 判別 0、1、2、3 是不是方程式 $-x^2+4x-3=0$ 的解

x	$-x^2+4x-3=0$	是否為解
0	$-0^2+4\times0-3\neq0$	否
1	$-1^2+4\times1-3=0$	是
2	$-2^2+4\times2-3\neq0$	否
3	$-3^2+4\times3-3=0$	是

因此 1 與 3 是方程式 $-x^2+4x-3=0$ 的解，但 0 與 2 不是方程式的解。

❸ 因式分解法解一元二次方程式

將一元二次方程式整理成等號右邊為 0 的方程式後，若等號左邊的二次式可以利用因式分解的方法分成兩個一次式的乘積，則可以運用「如果 $A\times B=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$」的性質求解。

例 $x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$x+2=0$ 或 $x+3=0$

$x=-2$ 或 $x=-3$

因此方程式的解為 -2 與 -3。

4-1 自我評量

1 下列敘述如果正確打「○」，不正確打「╳」： 課 P150 隨堂

(　　)(1) 1 是 $3x^2-5x-4=0$ 的一個解

(　　)(2) -2 是 $x^2-3x-10=0$ 的一個解

(　　)(3) 3 是 $(x-3)(x+2)=1$ 的一個解

(　　)(4) $-\frac{2}{3}$ 是 $(x+1)(3x+2)=0$ 的一個解

2 解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2+7x=0$ 課 P152 例 2

(2) $4x(3x-2)=3(3x-2)$ 課 P153 例 3

(3) $(x-1)^2=25$ 課 P154 例 4

(4) $x^2-8x+16=0$ 課 P154 例 4

(5) $2x^2-x-6=0$ 課 P155 例 5

(6) $(x+1)(x-5)=7$ 課 P155 例 5

(7) $x^2+\frac{5}{12}x-\frac{1}{4}=0$ 課 P156 例 6

(8) $18x^2+39x-24=0$ 課 P156 例 6

3 若 -2 為一元二次方程式 $mx^2+3x-(m+3)=0$ 的一個解，求 m 的值及此方程式的另外一個解。

課 P157 例 7

4-2 配方法與公式解

1 平方根解法

我們可以利用平方根的概念來解方程式 $x^2=49$，得到 $x=\pm7$，同樣地，如果是 $(x+3)^2=49$ 時，也可以利用平方根的概念求解，如下：

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=49\\ x+3&=\pm7\\ x&=-3\pm7\\ x&=4 \text{ 或 } -10\end{aligned}$$

例 1 利用平方根求解

自評 P180 第 1 題 (1)

解一元二次方程式 $4x^2=5$，並將所得的解代回原方程式檢驗。

解 $4x^2=5$

$x^2=\dfrac{5}{4}$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

此方程式的解為 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 與 $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

檢驗

$4\times(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2=4\times\dfrac{5}{4}=5$

$4\times(-\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2=4\times\dfrac{5}{4}=5$

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2=21$　　(2) $9x^2=4$

例 2 平方根求解

自評 P180 第 1 題 (2)

解下列各一元二次方程式：

(1) $(x+3)^2=5$　　(2) $(-2x+1)^2=12$

解 (1) $(x+3)^2=5$

$x+3=\pm\sqrt{5}$

$x=-3\pm\sqrt{5}$

此方程式的解為

$-3+\sqrt{5}$ 與 $-3-\sqrt{5}$。

(2) $(-2x+1)^2=12$

$-2x+1=\pm\sqrt{12}$

$-2x+1=\pm2\sqrt{3}$

$-2x=-1\pm2\sqrt{3}$

$x=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{-2}$

$x=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{3}$

此方程式的解為

$\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$ 與 $\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $(x+2)^2=3$　　(2) $(3x-2)^2=8$

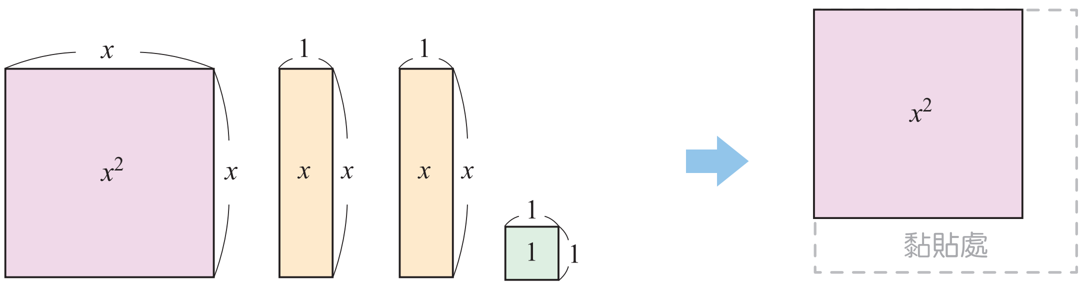
x^2+mx 的配方 可搭配附件 5、7

由前面的練習可知，$(x+b)^2=c$ 呈現的一元二次方程式，可利用平方根的概念求解。

但如 $x^2+6x+4=0$ 此種無法用因式分解法求解，也不是 $(x+b)^2=c$ 的方程式，該如何求解呢？我們先來看看以下的探索活動：

探索活動 圖解配方

1. 已知 1 個邊長為 x 的正方形，2 個長為 x、寬為 1 的長方形及 1 個邊長為 1 的小正方形可拼成一個大正方形。在下面黏貼處已有 1 個邊長為 x 的正方形，拿出附件 5 中的 2 個長方形及 1 個小正方形與此正方形拼貼成一個大正方形。

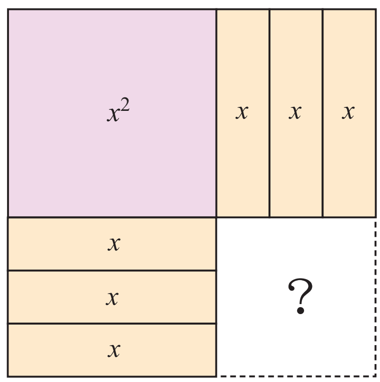


在黏貼處中，拼貼成的大正方形邊長$=x+$______，

拼貼成的大正方形面積$=x^2+2x+1=(x+$______$)^2$。

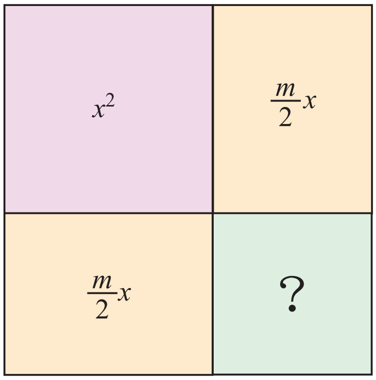
2. (1)如右圖，有 1 個邊長為 x 的正方形，6 個長為 x、寬為 1 的長方形。將 $\boxed{x}$ 的個數「6」平分成 2 組，再加______個 $\boxed{1}$，可拼成一個大正方形。

(2)這個大正方形的邊長是______，面積是______。



由 探索活動 可知，x^2+6x+9 是一個完全平方式 $(x+3)^2$，又 $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+\square$，所以 $x^2+6x+\square$ 為完全平方式時，$\square=(\frac{6}{2})^2=3^2=9$。

已知有邊長為 x 的正方形 1 個，長為 x、寬為 1 的長方形 m 個（m 為偶數），還需要多少個邊長為 1 的小正方形，就可以拼成一個大正方形呢？



由前面的學習可知，為了拼成大正方形，$6x$ 必須拆成兩個 $3x$，另外再加上 3×3 個邊長為 1 的小正方形。也就是說 x^2+mx 為了拼成正方形，必須加上 $\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}$ 個邊長為 1 的小正方形。

同理，如果 $x^2-8x+\square$ 是一個完全平方式，

由 $x^2-8x+\square=x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2=(x-4)^2$，$\square=(\frac{8}{2})^2=4^2=16$。

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$$

像這樣將 x^2+6x 加上適當的項之後，配成完全平方式 $(x+3)^2$，或者是 x^2-8x 加上適當的項後，配成完全平方式 $(x-4)^2$ 的方法，稱為**配方法**。

接下來要學習如何將一個式子依照和的平方公式或差的平方公式，配成完全平方式。

例3 配成完全平方式

自評 P180 第 2 題

分別將適當的數填入□中，使該式子可以配成一個完全平方式，並將它寫成完全平方的形式。

(1) $x^2+8x+\square$　(2) $x^2+5x+\square$　(3) $x^2-\frac{4}{3}x+\square$

解 (1) 和的平方公式：$x^2+2\cdot x\cdot a+a^2=(x+a)^2$

$x^2+8x+\square=x^2+2\cdot x\cdot 4+\square$

$x^2+8x+\boxed{16}=x^2+2\cdot x\cdot 4+\boxed{4^2}=(x+4)^2$

所以$\square=16$。

$a=4$
$a^2=4^2=16$

(2) 和的平方公式：$x^2+2\cdot x\cdot a+a^2=(x+a)^2$

$x^2+5x+\square=x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\square$

$x^2+5x+\boxed{\frac{25}{4}}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\boxed{(\frac{5}{2})^2}=(x+\frac{5}{2})^2$

所以$\square=\frac{25}{4}$。

$a=\frac{5}{2}$
$a^2=(\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$

(3) 差的平方公式：$x^2-2\cdot x\cdot a+a^2=(x-a)^2$

$x^2-\frac{4}{3}x+\square=x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\square$

$x^2-\frac{4}{3}x+\boxed{\frac{4}{9}}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\boxed{(\frac{2}{3})^2}=(x-\frac{2}{3})^2$

所以$\square=\frac{4}{9}$。

$a=\frac{2}{3}$
$a^2=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

隨堂練習

在 □ 中填入適當的數，使得下列各式可以配成完全平方式。

(1) $x^2-12x+\square$　　(2) $x^2+9x+\square$　　(3) $x^2+\frac{1}{4}x+\square$

觀察 例3 的結果：

(1) $x^2+8x+4^2=(x+4)^2$

(2) $x^2+5x+(\frac{5}{2})^2=(x+\frac{5}{2})^2$

(3) $x^2-\frac{4}{3}x+(\frac{2}{3})^2=(x-\frac{2}{3})^2$

可以得到下列的結論：

(1) 形如 x^2+mx 的式子，加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可配成完全平方式 $(x+\frac{m}{2})^2$。

(2) 形如 x^2-mx 的式子，加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可配成完全平方式 $(x-\frac{m}{2})^2$。

隨堂練習

在空格中填入適當的數，使得下列各式可以配成完全平方式。

(1) $x^2-16x+\underline{\qquad\qquad}=(x-\underline{\qquad\qquad})^2$

(2) $x^2+7x+\underline{\qquad\qquad}=(x+\underline{\qquad})^2$

(3) $x^2-\frac{2}{5}x+\underline{\qquad\qquad}=(x-\underline{\qquad})^2$

x^2+4x+4　x^2-6x+9　x^2+2x-1　$x^2-8x+16$，哪一個多項式應該被拿走？

② 配方法解一元二次方程式

如果可以將 $x^2+6x+4=0$ 改寫成 $(x+b)^2=c$ 的形式，則從前面的經驗可以得到 $x=-b\pm\sqrt{c}$。

形如 x^2+mx 的式子，加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可以配成完全平方式 $(x+\frac{m}{2})^2$，例如：

$$x^2+6x+4=0$$

將 +4 移到等號的右邊

$$x^2+6x=-4$$

等號兩邊同時加上 $(\frac{6}{2})^2$

$$x^2+6x+(\frac{6}{2})^2=-4+(\frac{6}{2})^2$$

$$(x+\frac{6}{2})^2=-4+(\frac{6}{2})^2$$

$$(x+3)^2=-4+3^2$$

$$(x+3)^2=5$$

$$x+3=\pm\sqrt{5}$$

$$x=-3\pm\sqrt{5}$$

其中，由 $x^2+6x+4=0$ 轉換成 $(x+3)^2=5$ 的形式，就是配成完全平方式的過程。

學會將式子配成完全平方式後，就可以將方程式等號的左邊整理成一個完全平方式，右邊是一個常數的形式，再利用平方根的概念來求解。

例4 二次項係數為 1

自評 P180 第 1 題 (3)

解一元二次方程式 $x^2-8x+13=0$。

解

$x^2-8x+13=0$

將常數項 13 移到等號右邊變成 -13

$x^2-8x \qquad =-13$

等號兩邊同加 $(\frac{8}{2})^2$

$x^2-8x+(\frac{8}{2})^2=-13+(\frac{8}{2})^2$

配成完全平方式

$(x-4)^2=3$

平方根概念

$x-4=\pm\sqrt{3}$

$x=4\pm\sqrt{3}$

此方程式的解為 $4+\sqrt{3}$ 與 $4-\sqrt{3}$。

像 例4 這種解題的方法，就稱為配方法解一元二次方程式。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2+4x+1=0$

(2) $x^2-5x+5=0$

解答：x^2+2x-1。（不是完全平方式）

由前面的練習知道，若一個一元二次方程式無法使用因式分解法解題時，可以用配方法來解題。然而，當某個一元二次方程式用因式分解法不易解題時，也可以使用配方法來解題，我們來看一些例子。

例5 不易因式分解的方程式

自評 P180 第 1 題 (4)

解一元二次方程式 $x^2-2x-899=0$。

解 $x^2-2x-899=0$

$x^2-2x=899$

$x^2-2x+1^2=899+1^2$

$(x-1)^2=900$

$x-1=\pm\sqrt{900}$

$x-1=\pm 30$

$x=1\pm 30$

$x=31$ 或 $x=-29$

此方程式的解為 31 與 -29。

由 例5 的解可以發現，一元二次方程式 $x^2-2x-899=0$ 也可以用十字交乘法分解成 $(x-31)(x+29)=0$。但是要將 899 分解成 31×29 實在不容易，此時使用配方法是一個較好的解題方法。

隨堂練習

解一元二次方程式 $x^2+4x-396=0$

例6 配方法的應用

自評 P181 第 3 題

若方程式 $x^2-12x+p=0$ 可配方化成 $(x-6)^2=4$ 的形式，則 p 的值是多少？

解一 將 $x^2-12x+p=0$ 配方

$x^2-12x+p=0$

$x^2-12x=-p$

$x^2-12x+6^2=-p+6^2$

$(x-6)^2=36-p$

與 $(x-6)^2=4$ 對照得

$36-p=4$

$p=32$

解二 將 $(x-6)^2=4$ 展開

$(x-6)^2=4$

$x^2-12x+36=4$

$x^2-12x+32=0$

與 $x^2-12x+p=0$ 對照得

$p=32$

隨堂練習

若方程式 $x^2-8x+15=0$ 可配方化成 $(x-p)^2=k$ 的形式，則 p 與 k 的值是多少？

利用配方法解一元二次方程式時，若 x^2 項的係數不為 1，可利用等量公理將 x^2 項的係數化簡為 1，再使用配方法。

例 7 二次項係數不為 1

自評 P181 第 4 題

解一元二次方程式 $2x^2+5x+1=0$。

解

$2x^2+5x+1=0$

同乘以 $\frac{1}{2}$，將 x^2 項的係數變成 1。

$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$

將常數項移到等號右邊。

$x^2+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$

等號兩邊同加 $(\frac{5}{2}\div 2)^2$。

$x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=-\frac{1}{2}+(\frac{5}{4})^2$

$(x+\frac{5}{4})^2=\frac{17}{16}$

$x+\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{17}{16}}$

$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

$x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$ （或 $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$）

此方程式的解為 $\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$ 與 $\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2-6x+2=0$

(2) $-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}$

例8 重根與無解

解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2-10x+25=0$

(2) $2x^2+6x+11=0$

解 (1) $x^2-10x+25=0$

$x^2-10x=-25$

$x^2-10x+5^2=-25+5^2$

$(x-5)^2=0$

$x=5$（重根）。

(2) $2x^2+6x+11=0$

$x^2+3x+\frac{11}{2}=0$

$x^2+3x=-\frac{11}{2}$

$x^2+3x+(\frac{3}{2})^2=-\frac{11}{2}+(\frac{3}{2})^2$

$(x+\frac{3}{2})^2=-\frac{13}{4}$

因為任何數的平方都不可能為負數，所以此方程式沒有解。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2+6x+3=0$

(2) $x^2-5x+13=0$

③ 一元二次方程式的公式解

當無法（或不易）使用因式分解法求一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a>0$）的解時，可以使用配方法將此方程式化成 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，接下來看看要如何得到此式：

解 $3x^2+5x+1=0$

同除以 3

$$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

$$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{6}+(\frac{5}{6})^2$$
$$=-\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2$$

$$(x+\frac{5}{6})^2=\frac{13}{36}$$

$$x+\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{13}{36}}$$

$$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

（或 $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$）

先將 x^2 項的係數變成 1

將等號左邊配成完全平方式

平方根概念

解 $ax^2+bx+c=0$，$a>0$

同除以 a

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2$$
$$=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

因為 $4a^2>0$，所以只要 $b^2-4ac\geq 0$ 時，就可以根據平方根的概念，求出方程式的解。

接下來，我們可以由 $b^2-4ac>0$、$b^2-4ac=0$ 或 $b^2-4ac<0$ 三種情況，分別討論解的情形。

❶ 當 $b^2-4ac>0$ 時

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{（相異兩根）}$$

❷ 當 $b^2-4ac=0$ 時

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$x+\frac{b}{2a}=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}\text{（重根）}$$

❸ 當 $b^2-4ac<0$ 時

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$$

我們學過的數中，正數的平方是正的，負數的平方也是正的，而 0 的平方是 0，所以任何數的平方都不為負數，故此方程式沒有解。

由此可知，若一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a>0$）中的 $b^2-4ac\geq 0$ 時，則 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 稱為此方程式的**公式解**，我們稱 b^2-4ac 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的**判別式**。

一元二次方程式的解

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a>0$）

(1) 當 $b^2-4ac>0$ 時，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（相異兩根）；

(2) 當 $b^2-4ac=0$ 時，$x=-\dfrac{b}{2a}$（重根）；

(3) 當 $b^2-4ac<0$ 時，方程式沒有解。

例9 判別式大於 0

自評 P181 第 5 題 (1)

利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $x^2+3x-28=0$　　(2) $3x^2-2x=4$

解 (1)

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 3x & - & 28 & = & 0 \\ x^2 & + & 3x & + & (-28) & = & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ ax^2 & + & bx & + & c & = & 0 \end{array}$$

用公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 解方程式 $ax^2+bx+c=0$ 時，要對照方程式的係數代入公式。

比較上面兩式可知 $a=1$，$b=3$，$c=-28$。

將 $a=1$，$b=3$，$c=-28$ 代入 b^2-4ac，

得 $b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-28)=9+112=121>0$，

故 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-3\pm\sqrt{121}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm11}{2}$，

即 $x=\dfrac{-3+11}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ 或 $x=\dfrac{-3-11}{2}=-\dfrac{14}{2}=-7$，

所以此方程式的解為 4 與 -7。

(2) 因為 $3x^2-2x=4$，即 $3x^2-2x-4=0$，所以令 $a=3$，$b=-2$，$c=-4$，

得 $b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-4)=52>0$

$$\begin{aligned}故\ x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{52}}{2\times3}\\&=\frac{2\pm\sqrt{52}}{6}\\&=\frac{2\pm2\sqrt{13}}{6}\\&=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}\end{aligned}$$

$$\frac{2\pm2\sqrt{13}}{6}=\frac{2}{6}\pm\frac{2\sqrt{13}}{6}=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{13}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$$

所以此方程式的解為 $\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$ 與 $\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$。

隨堂練習

利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $x^2-3x-7=0$

(2) $4x^2-11x+6=0$

例10 判別式等於或小於 0

自評 P181 第 5 題 (2)

利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $9x^2+6x+1=0$

(2) $x^2-3x+4=0$

解 (1) 令 $a=9$，$b=6$，$c=1$，

得 $b^2-4ac=6^2-4\times9\times1=0$，

故 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{6}{18}=-\dfrac{1}{3}$，

所以此方程式的解為 $-\dfrac{1}{3}$（重根）。

(2) 令 $a=1$，$b=-3$，$c=4$，

得 $b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times4$

$=-7<0$

所以此方程式沒有解。

隨堂練習

利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $4x^2-4x+1=0$

(2) $4x^2+8x+5=0$

　　當一元二次方程式的某些項係數為分數時，可以先利用等量公理，將原方程式乘以各分母的最小公倍數，使各項的係數都變成整數，再使用公式解的方法。

例 11 係數為分數或負數

自評 P181 第 5 題 (3)

利用公式解，求一元二次方程式 $-\frac{3}{2}x^2+x+1=0$ 的解。

解 將等號兩邊同乘以 -2 可得 $3x^2-2x-2=0$。

令 $a=3$，$b=-2$，$c=-2$，得 $b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-2)=28>0$

故 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{28}}{2\times3}=\frac{2\pm\sqrt{2^2\times7}}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

所以此方程式的解為 $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ 與 $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$。

Thinking

將 例 11 的方程式兩邊同乘以 2 可得 $-3x^2+2x+2=0$，令 $a=-3$，$b=2$，$c=2$，代入公式解，觀察是否與 例 11 的解相同。

由 例 11 與 Thinking 可知，$a<0$，公式解也適用。

隨堂練習

自評 P181 第 5 題 (4)

利用公式解，求下列一元二次方程式 $-x^2+3x+1=0$ 的解。

重點回顧

❶平方根解法

形如 $(ax+b)^2=c$ 的一元二次方程式 $(c\geq 0)$，可利用平方根的概念求解。

例 $(x-1)^2=2$，$x-1=\pm\sqrt{2}$，$x=1\pm\sqrt{2}$。

❷配成完全平方式

(1)形如 x^2+mx 的式子，加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可配成完全平方式 $(x+\frac{m}{2})^2$。

(2)形如 x^2-mx 的式子，加上 $(\frac{m}{2})^2$ 後，可配成完全平方式 $(x-\frac{m}{2})^2$。

例 (1) x^2+6x，加上 3^2 後，可配成 $(x+3)^2$。

(2) x^2-7x，加上 $(\frac{7}{2})^2$ 後，可配成 $(x-\frac{7}{2})^2$。

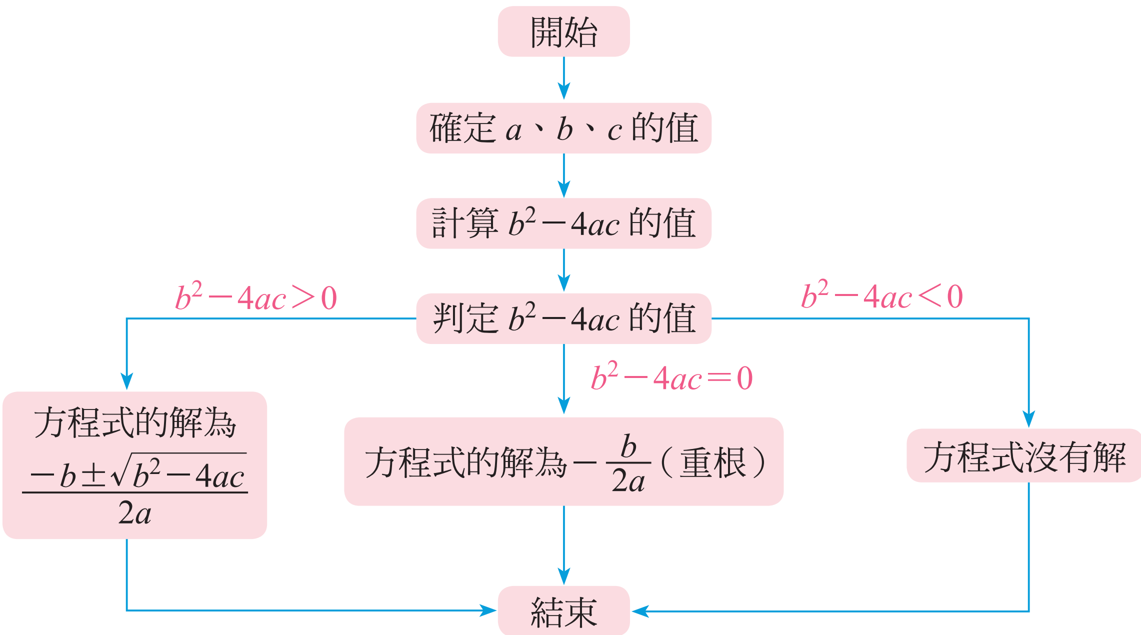
❸配方法解一元二次方程式

利用配方法，將一元二次方程式整理成 $(x+a)^2=b$ 的形式，再利用平方根的觀念求解。

例 $x^2-6x-3=0$，$(x-3)^2=12$，$x-3=\pm2\sqrt{3}$，$x=3\pm2\sqrt{3}$。

❹一元二次方程式的公式解

利用公式解，解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的過程如下：



4-2自我評量

❶求下列各一元二次方程式的解：

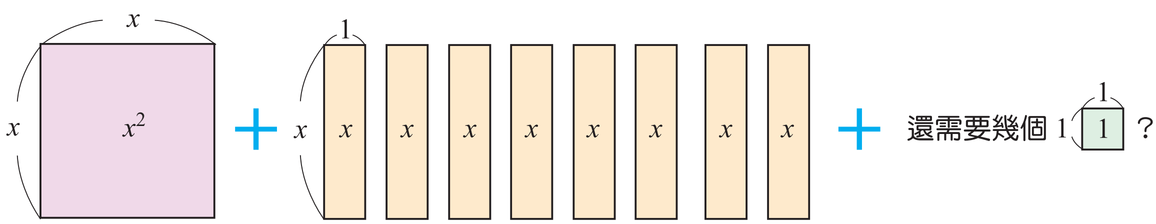
(1) $16x^2=7$ 課 P162 例 1

(2) $(2x+6)^2=8$ 課 P163 例 2

(3) $x^2+4x-3=0$ 課 P169 例 4

(4) $x^2-8x=384$ 課 P170 例 5

❷如下圖，有 1 個邊長為 x 的正方形與 8 個長為 x、寬為 1 的長方形，至少還需要幾個邊長為 1 的小正方形，就可以拼成一個大的正方形？可搭配附件 7 課 P166 例 3



3 若方程式 $2x^2-8x-p=0$ 可配方化成 $(x-2)^2=9$ 的形式，則 p 的值是多少？

課 P171 例 6

4 利用配方法解下列各一元二次方程式：

課 P172 例 7

(1) $2x^2-8x=1$

(2) $3x^2+5x+1=0$

5 利用公式解，求下列各一元二次方程式的解：

(1) $2x^2-5x+1=0$

課 P176 例 9

(2) $6x^2-7x+3=0$

課 P177 例 10

(3) $\frac{4}{3}x^2+3=4x$

課 P178 例 11

(4) $-x^2+4x+12=0$

課 P178 隨堂

4-3 應用問題

我們學過應用問題的解題步驟：

由題意假設未知數 → 再依各數量的關係列出方程式 → 求解 → 依題意寫答。

如果列出的方程式是一元二次方程式時，因為有兩個解，所以最後寫答案時，要檢查兩個解是否都符合題意，或是有不合理的情形。如果解是很複雜的式子，也可以使用計算機計算一元二次方程式解的近似值。

例 1 支付問題

自評 P188 第 1 題

艾美到文具店買原子筆，她買的數量比原子筆的單價少 4，結帳時付了 120 元並找回 3 元，則原子筆每枝賣多少錢？

解 設原子筆單價 x 元，則艾美買了 $(x-4)$ 枝原子筆，

依題意可列出方程式

$x(x-4)=120-3$

$x^2-4x-117=0$

$(x-13)(x+9)=0$

$x=13$ 或 $x=-9$（不合）

由於價格不能為負數，因此原子筆每枝賣 13 元。

隨堂練習

已知傑克身上的錢是安琪的 3 倍還多 2 元，若將兩人的錢數相乘得 85，則傑克與安琪身上分別有多少元？

例2 整數的計算

自評 P188 第 2 題

有三個連續正整數，它們的平方和為 434，求此連續三個正整數。

解 設此三數為 $x-1$，x，$x+1$，

依題意可列出方程式

$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=434$

$x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1=434$

$3x^2=432$

$x^2=144$

$x=\pm 12$

此三數為 11，12，13 或 -13，-12，-11，

因為三數為正整數，所以此三數為 11，12，13。

連續整數都相差 1，如果中間是 x，
則前面一個整數比 x 小 1，可以設成 $x-1$；
而後面一個整數比 x 大 1，可以設成 $x+1$。

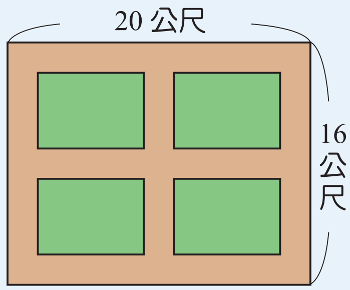
隨堂練習

有兩個負整數，它們相差 3，乘積為 180，求此兩負整數。

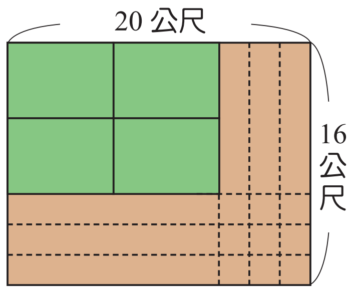
例 3 路寬問題

自評 P188 第 3 題

如圖，在長 20 公尺，寬 16 公尺的長方形土地上，開闢等寬的道路，其中綠色部分為 4 個面積相等的花圃，若花圃面積占總面積的 $\frac{7}{16}$，求道路寬為多少公尺？



解 設道路寬為 x 公尺，則花圃合併為長 $(20-3x)$ 公尺，寬 $(16-3x)$ 公尺的長方形，依題意可列出方程式



$(20-3x)(16-3x)=\frac{7}{16}(16\times 20)$

$9x^2-108x+180=0$

$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

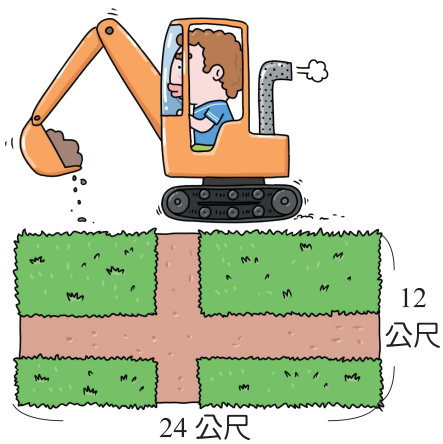
$x=2$ 或 $x=10$

若道路寬 10 公尺，則三條道路寬已大於 20 公尺，不合理。

所以道路寬為 2 公尺。

隨堂練習

如圖，在長 24 公尺、寬 12 公尺的長方形草地內部開闢一條等寬的十字形道路，已知道路與草地的長寬平行，若剩下的草地面積為 189 平方公尺，則十字形道路的路寬應是多少公尺？



例4 收費問題

自評 P189 第 4 題

神祕福袋一個賣 100 元，平均每小時可賣 30 個，只要福袋每降價 1 元，平均每小時就會多賣 10 個，已知福袋成本每個 50 元，售價不得低於成本，若每小時的總收入是 11700 元，則福袋的售價為多少元？

解 設降價 x 元，則每小時平均多賣 $10x$ 個。

依題意可列出方程式

$(100-x)(30+10x)=11700$

$3000+1000x-30x-10x^2=11700$

$-10x^2+970x-8700=0$

$x^2-97x+870=0$

$(x-10)(x-87)=0$

$x=10$ 或 87（因為原來賣 100 元，降價 87 元後，售價 13 元低於成本，故不合）

所以福袋的售價為 90 元。

隨堂練習

玩透透旅行社招攬墾丁三天兩夜旅遊，預定人數為 30 人，每人收費 5000 元，但人數若超過 30 人，每增加 1 人，則每人可減收 100 元。已知旅行社共收到 160000 元，則共有多少人參加？

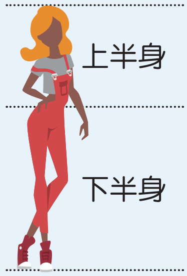
解答：x^2+x-24。（無法再十字交乘因式分解）

例5 利用計算機求解的近似值

自評 P189 第 5 題

黃金比例身材是指「全身身長：下半身長＝下半身長：上半身長」，上半身長指的是肚臍以上，下半身長則為肚臍以下。

有一位擁有黃金比例身材的模特兒，身高為 180 公分，則她的下半身長為多少公分？（可使用計算機計算，並四捨五入到整數位）



解 假設下半身長為 x 公分。

依題意可得：

$180：x ＝ x：(180-x)$

$180(180-x)=x^2$

$x^2+180x-32400=0$

利用公式解可得

$$x=\frac{-180\pm\sqrt{180^2-4\times1\times(-32400)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-180\pm\sqrt{162000}}{2}$$

用計算機算得 $x≒111$ 或 $x≒-291$，

其中身高為負數不合理，因此下半身約為 111 公分。

輸入 180 +/− + 162000 SHIFT x^2 = ÷ 2 = 螢幕顯示 111.246118

輸入 180 +/− − 162000 SHIFT x^2 = ÷ 2 = 螢幕顯示 -291.246118

隨堂練習

瑀涵身高 150 公分，下半身長 90 公分，若想看起來擁有黃金比例的身材，她需穿上高度幾公分的鞋子？（可使用計算機計算，並四捨五入到整數位）

重點回顧

一元二次方程式的應用問題

大方超市昨日賣出的蘋果數量與單價剛好相同，今日蘋果價格每顆上漲 2 元，賣出數量比昨日少 3 顆，但賣出的總金額為昨日的 2 倍還少 78 元，則今日蘋果售價為每顆多少錢？

解題步驟：

步驟 1

設未知數	
已知昨日蘋果賣出數量與單價相等。	設昨日賣出 x 顆蘋果， 每顆蘋果賣 x 元。

步驟 2

列方程式	
今日蘋果價格每顆上漲 2 元， 賣出數量比昨日少 3 顆， 且賣出總額為昨日的 2 倍少 78 元。	$(x+2)(x-3)=2\cdot x\cdot x-78$

步驟 3

依據所列的方程式求出未知數	
	$(x+2)(x-3)=2x^2-78$ $x^2-3x+2x-6=2x^2-78$ $x^2+x-72=0$ $(x-8)(x+9)=0$ $x=8$ 或 $x=-9$（不合）

步驟 4

依題意寫答（注意是否符合題意，或有不合理的情形）	
蘋果今日價格 $(x+2)$ 元。	$x=-9$ 表示昨日蘋果單價 -9 元，不合，所以 $x=8$，今日蘋果單價 $8+2=10$（元）

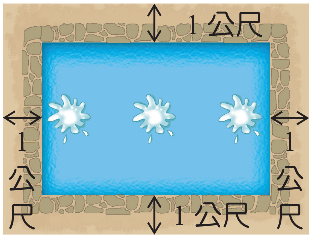
第 4 章

4-3自我評量

1 有一對父子，爸爸的年齡比兒子大 42 歲，3 年後，兒子年齡的平方剛好是爸爸的年齡，則父子兩人現在各是多少歲？ 課 P182 例 1

2 有三個連續正偶數，它們的平方和為 200，求此三數。 課 P183 例 2

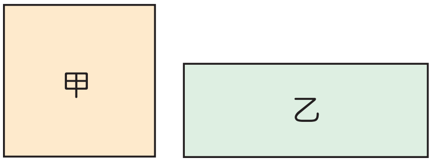
3 天賀有一塊長方形土地，已知長比寬多 2 公尺，他在土地的中間挖了一個長方形的水池，水池四周剩餘的土地均為 1 公尺寬(如右圖)。若水池的面積與剩餘土地的面積相等，則原長方形土地的長與寬各是多少公尺？



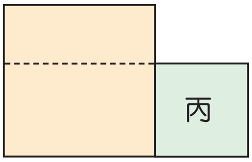
課 P184 例 3

4 安安旅行社招攬兩天一夜旅遊，預定人數為 32 人，每人收費 4000 元，但人數若超過 32 人，則每增加 1 人，每人可減收 100 元，已知旅行社共收到 129600 元，則共有多少人參加？ 課 P185 例 4

5 在圖一中，甲是一個邊長為 2 公分的正方形，乙是一個長方形，且甲、乙兩個圖形的面積相等。如果將甲疊在乙上面，使它們的兩個鄰邊對齊（如圖二所示）時，結果發現乙露出的部分為正方形丙，則正方形丙的邊長是多少公分？（可用計算機估計，四捨五入到小數點後第三位） 課 P186 例 5



圖一

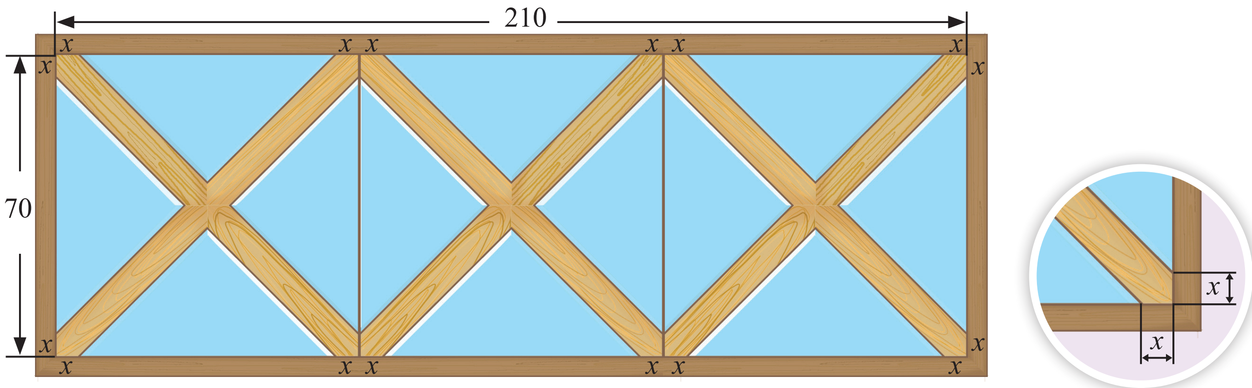


圖二

自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況決定如何運用。

艾美欲幫家裡的窗戶設計窗花，已知窗戶玻璃部分長 210 公分，寬 70 公分，且由三個大小相同的正方形窗框組成。如下圖，艾美設計了十字交叉圖案，已知剩餘玻璃面積為 10800 平方公分，回答下列問題：



(1)圖中 x 的值。

解

(2)十字交叉部分的寬度。

解

解答P220

Math Talk

本單元為配合此章所設計的一題多解，由學生自行閱讀，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

搜尋 解一元二次方程式 $x^2-4x-2021=0$。

艾美

$x^2-4x-2021=0$

$(x-47)(x+43)=0$

$x=47$ 或 $x=-43$

此方程式的解為 47 與 -43。

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -47 \\ x & & +43 \\ \hline -47x & + & 43x=-4x \end{array}$$

 # 十字交乘法

安琪

$x^2-4x=2021$

$x^2-4x+2^2=2021+2^2$

$(x-2)^2=2025$

$x-2=\pm\sqrt{2025}$

$x-2=\pm 45$

$x=2\pm 45$

$x=47$ 或 $x=-43$

此方程式的解為 47 與 -43。

 # 配方法

洛基

$x^2-4x-2021=0$，令 $a=1$，$b=-4$，$c=-2021$，

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-2021)=16+8084=8100$

故 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{8100}}{2\times1}=\dfrac{4\pm90}{2}=2\pm45$

此方程式的解為 47 與 -43。

 # 公式解

你會採用哪種解法呢？
在喜歡的貼文按 ❤ 吧！

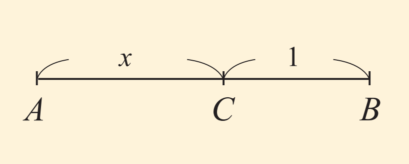
數學萬花筒

黃金分割

在 例5 中，模特兒的下半身長約 111.246 公分，上半身長約 68.754 公分，而下半身長除以上半身長比值約為 1.618，為何稱此模特兒擁有黃金比例身材呢？

相傳西元前六世紀，古希臘數學家畢達哥拉斯發現把單弦琴的弦線在約五分之二長度的地方用承托托著時，兩邊就能彈出極美妙的和音。他認為，既然琴弦有一個完美的分割點（或比例），那麼所有線條、形狀、物體，萬事萬物，乃至宇宙，都應該有同一個完美的比例。因此，以畢氏為首的許多古希臘數學家，窮畢生精力去研究比例。他們把美妙的比例分為十級，最高級的，亦即最美麗的比例，就是黃金分割比。

如右圖所示，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 三線段的長度滿足 $\overline{AB}：\overline{AC}=\overline{AC}：\overline{BC}$ 的關係。若 $\overline{BC}=1$，$\overline{AC}=x$，則可表示為 $(1+x)：x=x：1$，解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，也就是 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 兩線段的長度比為 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.618$，稱為黃金分割比。



如下圖，巴黎的艾菲爾鐵塔第二層景觀台以下的高度約為 115 公尺，第二層景觀台以上的高度約為 185 公尺（不含天線），所以艾菲爾鐵塔約符合黃金分割的比例。