

1-2

比例線段

- 1 平行線截比例線段性質
- 2 平行線截比例線段性質的應用

主題 1 平行線截比例線段性質

三角形底邊與面積的關係

我們知道三角形的面積 $= \frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$ ，

因此當兩個三角形同底等高時，這兩個三角形的面積會相等。

如圖 1，已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，

因為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 有相等的高 ($\overline{AP} = \overline{DQ}$)，

又對應的底邊相同 ($\overline{BC}$)，

所以 $\triangle ABC$ 面積 $= \triangle DBC$ 面積。

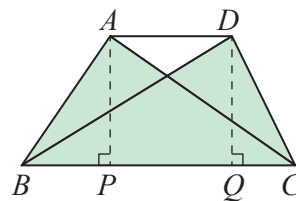


圖 1

那麼當兩個三角形的高相等而底不相等時，
這兩個三角形的面積和底邊有什麼關係呢？

如圖 2， B 、 C 、 D 、 E 四點在同一直線上，

且 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 。

$\overline{AE}$ 是 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 的高，

所以 $\triangle ABD$ 面積： $\triangle ADC$ 面積

$$= \frac{\overline{BD} \times \overline{AE}}{2} : \frac{\overline{CD} \times \overline{AE}}{2}$$

$$= \overline{BD} : \overline{CD}。$$

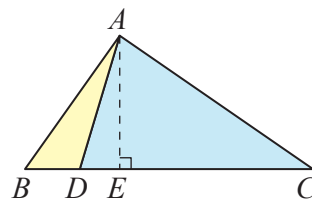


圖 2

由上述可知：

Key point

三角形面積與底邊的關係

若兩個三角形的高相等，則這兩個三角形的面積比 = 對應底邊的比。

例 1

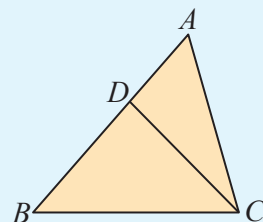
三角形底邊與面積的關係

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{AB}$ 上一點，

且 $\overline{AD}=3$ 、 $\overline{DB}=5$ ，則：

(1) $\triangle ADC$ 面積： $\triangle DBC$ 面積 = ？

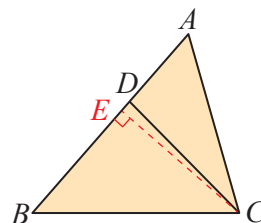
(2) $\triangle DBC$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = ？



解 通過 C 點作 $\overline{AB}$ 的高 $\overline{CE}$ ，

(1) $\overline{CE}$ 是 $\triangle ADC$ 與 $\triangle DBC$ 的高，

$$\therefore \triangle ADC \text{ 面積} : \triangle DBC \text{ 面積} = \overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 5。$$



(2) $\overline{CE}$ 是 $\triangle DBC$ 與 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \triangle DBC \text{ 面積} : \triangle ABC \text{ 面積} = \overline{DB} : \overline{AB} = 5 : (3 + 5) = 5 : 8。$$



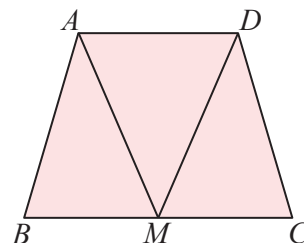
隨堂練習

如右圖，在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，且

$\overline{AD}=7$ 、 $\overline{BC}=12$ 。若 M 為 $\overline{BC}$ 的中點，則

$\triangle ABM$ 面積： $\triangle AMD$ 面積： $\triangle DMC$ 面積

為何？



我們在第四冊已經學過利用簡單的推理方式，去驗證一些幾何性質。
接下來，我們將以觀察、測量加上推理的方式來探討本章的性質。

平行線截比例線段性質

性質證明

《可搭配附錄
P.VII 補充》

問題探索 平行線截比例線段①

如圖 3，已知筆記本上相鄰格線皆是距離相等的平行線，小妍在筆記本上畫了 $\triangle ABC$ ，試回答下列問題。

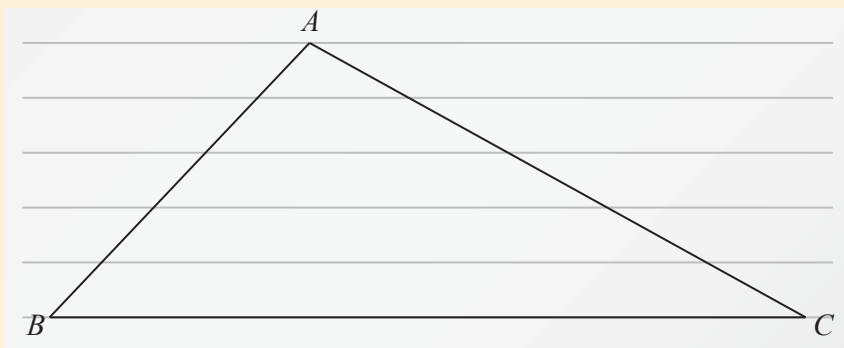


圖 3

(1) $\overline{AB}$ 被格線分成五條線段，量量看，這五條線段的長度是否相同？

(2) $\overline{AC}$ 被格線分成五條線段，量量看，這五條線段的長度是否相同？

(3) 如圖 4，若有一條格線與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 分別交於 D 、 E 兩點，則 $\overline{AD} : \overline{DB}$ 與 $\overline{AE} : \overline{EC}$ 是否相等？

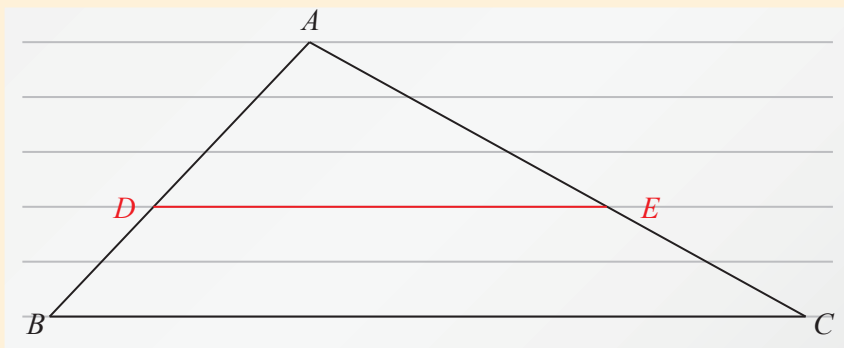


圖 4

(4) $\overline{AD} : \overline{AB}$ 與 $\overline{AE} : \overline{AC}$ 是否相等？

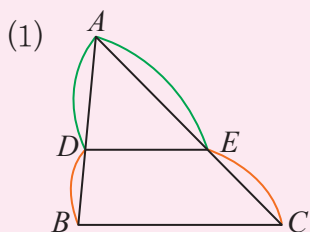
(5) $\overline{DB} : \overline{AB}$ 與 $\overline{EC} : \overline{AC}$ 是否相等？

由問題探索可知 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 、 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ 、 $\overline{DB} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC}$ ，像這樣成比例的線段，就稱為**比例線段**。當一條直線平行於三角形的一邊，且與另外兩邊相交，此直線會把三角形的兩邊截成比例線段，就稱這個性質為**平行線截比例線段性質**。

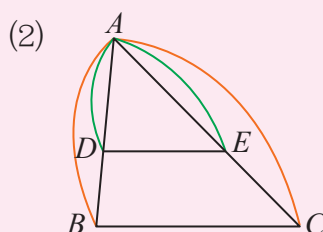
Key point

平行線截比例線段性質①

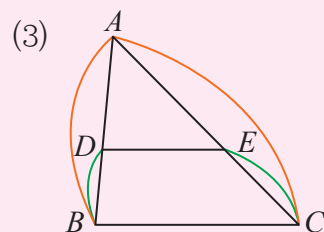
$\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則：



$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$$



$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

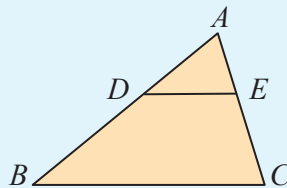


$$\overline{DB} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC}$$

例 2

平行線截比例線段性質①

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AD}=6$ 、 $\overline{DB}=9$ 、 $\overline{AE}=4$ ，則 $\overline{EC}$ 的長度為何？



解 $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\therefore \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，

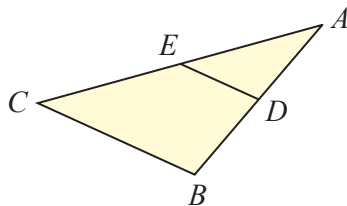
$$6 : 9 = 4 : \overline{EC}，$$

$$6 \overline{EC} = 36，得 \overline{EC} = 6。$$



隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 點在 $\overline{AB}$ 上，過 D 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，交 $\overline{AC}$ 於 E 點，若 $\overline{AB}=12$ 公分、 $\overline{AC}=18$ 公分、 $\overline{AD}=6$ 公分，則 $\overline{AE}$ 、 $\overline{EC}$ 分別為多少公分？



性質證明

《可搭配附錄
P.VII 補充》



問題探索 平行線截比例線段②

將第 22 頁圖 3 中的 $\overline{AB}$ 與格線的交點依序標記為 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 ； $\overline{AC}$ 與格線的交點依序標記為 E_1 、 E_2 、 E_3 、 E_4 ，如圖 5 所示。試回答下列問題。

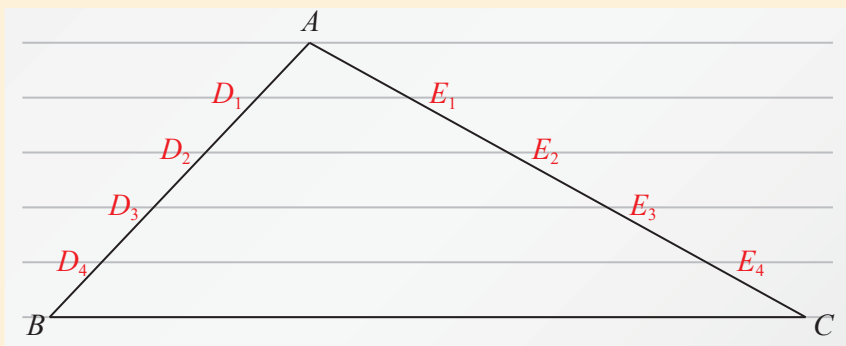


圖 5

(1) 量量看， $\overline{BC}$ 為多少公分？

(2) 量量看， $\overline{D_1E_1}$ 、 $\overline{D_2E_2}$ 、 $\overline{D_3E_3}$ 、 $\overline{D_4E_4}$ 分別為多少公分？

(3) $\overline{D_1E_1} : \overline{BC}$ 與 $\overline{AD_1} : \overline{AB}$ 是否相等？

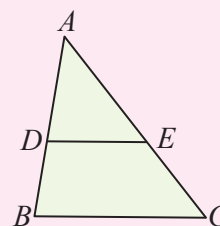
(4) $\overline{D_2E_2} : \overline{BC}$ 與 $\overline{AD_2} : \overline{AB}$ 、
 $\overline{D_3E_3} : \overline{BC}$ 與 $\overline{AD_3} : \overline{AB}$ 、
 $\overline{D_4E_4} : \overline{BC}$ 與 $\overline{AD_4} : \overline{AB}$ 是否都會相等？

由上面問題探索可知，當一條直線平行於三角形的一邊，且與另外兩邊相交時，還可以得到另一個平行線截比例線段性質：

Key point

平行線截比例線段性質②

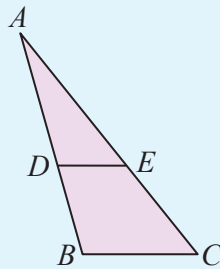
$\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，
 且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ 。



例 3

平行線截比例線段性質②

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。已知 $\overline{DE}=3$ ， $\overline{DB}=4$ ， $\overline{BC}=5$ ，則 $\overline{AD}$ 長度為何？

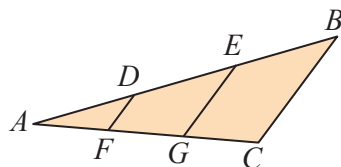


解 設 $\overline{AD}=x$ ，
 $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\therefore \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ ，
 $x : (x+4) = 3 : 5$ ，
 $3x+12=5x$ ， $2x=12$ ， $x=6$ ，
 故 $\overline{AD}=6$ 。



隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中，已知 D 、 E 兩點把 $\overline{AB}$ 分成三等分，且 F 、 G 兩點在 $\overline{AC}$ 上。若 $\overline{DF} \parallel \overline{EG} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{BC}=12$ ，則 $\overline{DF}$ 、 $\overline{EG}$ 的長度各為何？



在前面我們提到，若一條直線平行於三角形的一邊，且與另外兩邊相交，則此直線會把三角形的兩邊截成比例線段。那麼**如果有一條直線將三角形的兩邊截成比例線段，這條直線會與三角形的第三邊平行嗎？**

問題探索 利用截比例線段判斷平行《可搭配附件 1 操作》

如圖 6，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上分別有 D 、 E 兩點，已知 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，試回答下列問題。

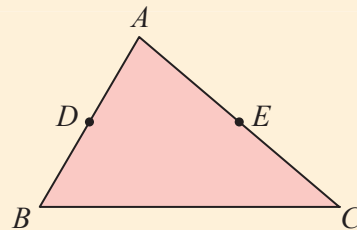
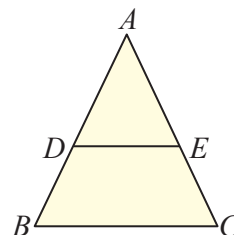


圖 6

(1) 連接 $\overline{DE}$ ，並利用附件 1 量量看， $\angle ADE$ 與 $\angle B$ 是否相等？

(2) $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 是否互相平行？

由問題探索可知， $\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。事實上，如果 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ 或 $\overline{DB} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC}$ ，也可以得到 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，因此：



Key point

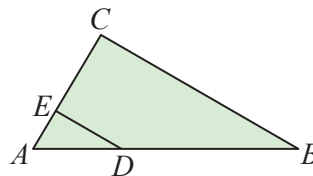
利用截比例線段判斷平行

如果一條直線將三角形的兩邊截成比例線段，那麼此直線會與三角形的第三邊平行。



隨堂練習

如右圖，若 $\overline{AE} = 2$ 、 $\overline{AD} = \overline{EC} = 4$ 、 $\overline{DB} = 8$ ，且 $\angle B = 30^\circ$ ，則 $\angle ADE$ 的度數為何？

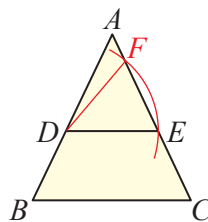




如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。若以 D 點為圓心， $\overline{DE}$ 長為半徑畫弧，與 $\overline{AC}$ 交於另一點 F ，則：

(1) $\overline{DF} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$ 嗎？

(2) $\overline{DF}$ 是否與 $\overline{BC}$ 平行呢？



三角形兩邊中點連線段性質

如右圖， $\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，那麼 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 有什麼關係呢？

說明 因為 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

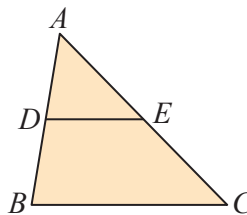
$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC} = 1 : 1,$$

所以 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 平行，

接著再利用平行線截比例線段性質可知，

$$\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 2,$$

$$\text{也就是說 } \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}.$$



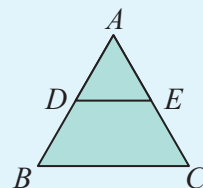
由上面說明可知，三角形兩邊中點的連線段平行於第三邊，且長度等於第三邊長度的一半。



例 4

三角形兩邊中點連線段性質

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
若 $\overline{AD} = \overline{DE} = 4$ ，則 $\overline{AB} + \overline{BC} = ?$

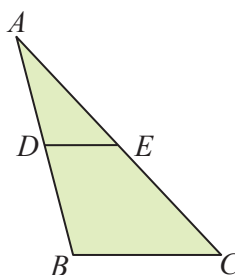


解 $\because D$ 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
 $\therefore \overline{AB} = 2 \overline{AD} = 2 \times 4 = 8$ ，
 $\overline{BC} = 2 \overline{DE} = 2 \times 4 = 8$ ，
 故 $\overline{AB} + \overline{BC} = 8 + 8 = 16$ 。



隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，
若 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 8$ 、 $\overline{BC} = 4$ ，則 $\overline{DE}$ 的長度為何？



數

學

好

好

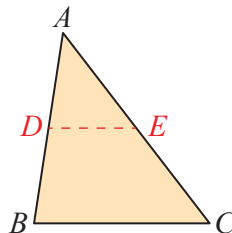
玩

逃出墓室

阿彭博士到埃及古墓考古時，不慎觸發機關導致墓室即將崩塌。請翻到書末 P.III 「逃出墓室」，利用所學的平行線截比例線段性質來破解密碼，完成地圖。

在前面我們知道，三角形兩邊中點的連線段會平行於第三邊，
那如果通過一邊中點作另一邊的平行線，會通過第三邊的中點嗎？

說明 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{AB}$ 的中點，
如果通過 D 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，
且交 $\overline{AC}$ 於 E 點，
利用平行線截比例線段性質可知，
 $\overline{AE} : \overline{EC} = \overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1$ ，
可以發現 E 也是 $\overline{AC}$ 的中點。

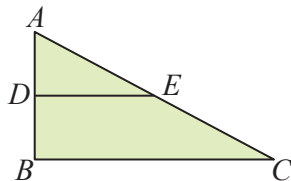


由上面說明可知，過三角形一邊中點且平行另一邊的直線，
會通過第三邊的中點。



隨堂練習

如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$
上一點， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AC} = 17$ 、 $\overline{BC} = 15$ 、
 $\overline{AD} = \overline{DB} = 4$ ，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 的長度。



Key point

三角形兩邊中點連線段性質

1. 三角形兩邊中點的連線段平行於第三邊，且長度為第三邊長度的一半。
2. 過三角形一邊中點且平行另一邊的直線，會通過第三邊的中點。

主題 2 平行線截比例線段性質的應用

如圖 7， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，而且分別與 M_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與 M_2 交於 D 、 E 、 F 三點。此時 $\overline{AB} : \overline{BC}$ 與 $\overline{DE} : \overline{EF}$ 是否相等？

說明 如圖 8，過 A 點作直線 M_3 平行 M_2 ，分別與 L_2 、 L_3 相交於 G 、 H 兩點，可知四邊形 $AGED$ 與四邊形 $GHFE$ 都是平行四邊形，
 因此 $\overline{AG} = \overline{DE}$ ， $\overline{GH} = \overline{EF}$ ……①。
 在 $\triangle ACH$ 中，
 利用平行線截比例線段性質可知，
 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AG} : \overline{GH}$ ……②，
 由 ①、② 可知 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。

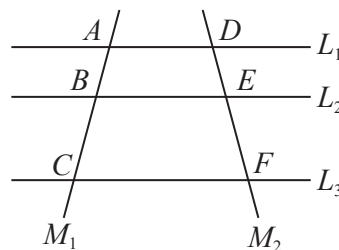


圖 7

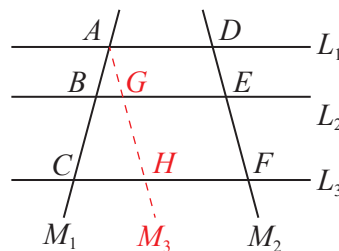


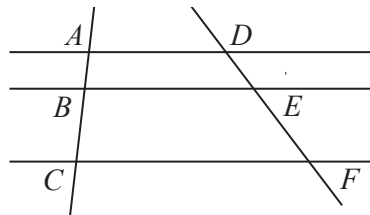
圖 8

由上面說明可知，若 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，且分別與 M_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與 M_2 交於 D 、 E 、 F 三點，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



隨堂練習

如右圖， $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ 。若 $\overline{AB} = x + 1$ 、 $\overline{BC} = 3x - 1$ 、 $\overline{DE} = 5$ 、 $\overline{EF} = 10$ ，則 x 的值為多少？



我們可以應用平行線截比例線段性質，利用尺規作圖將一條線段按比例進行分割。

例 5

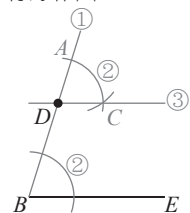
利用尺規作圖作比例線段

已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找到一點 C ，使得 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 。

A ————— B

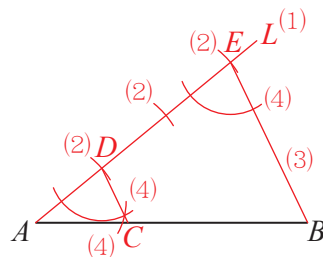
學習時光機

過 D 點作 $\overline{BE}$ 的平行線作圖：



- ① 延長 $\overline{BD}$
- ② 作 $\angle ADC = \angle B$
- ③ 連 $\overline{CD}$ 即為所求

- 作法**
- (1) 通過 A 點另作一條直線 L 。
 - (2) 在 L 上依序取 D 、 E 兩點，使得 $\overline{AD} : \overline{DE} = 1 : 2$ 。
 - (3) 連接 $\overline{BE}$ 。
 - (4) 過 D 點作 $\overline{BE}$ 的平行線，與 $\overline{AB}$ 相交於 C 點，則 C 點即為所求。



作圖概念說明

在 $\triangle ABE$ 中， $\because \overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ，

$\therefore \overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DE}$ (平行線截比例線段性質)，

又 $\overline{AD} : \overline{DE} = 1 : 2$ ，故 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 。



隨堂練習

已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找到一點 D ，使得 $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 3$ 。

A ————— B



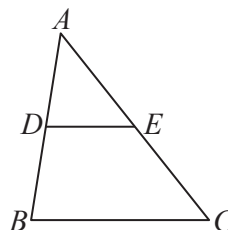
重點整理



1 平行線截比例線段性質

如右圖， $\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則：

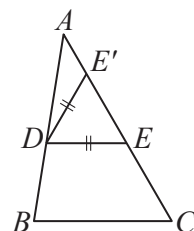
- (1) $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 。
- (2) $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ 。
- (3) $\overline{DB} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC}$ 。
- (4) $\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ 。



2 利用截比例線段判斷平行

如右圖， $\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，或 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$ ，或 $\overline{DB} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{AC}$ ，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

註 已知 E' 為 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE'} : \overline{BC}$ ，但 $\overline{DE'}$ 與 $\overline{BC}$ 不一定平行。

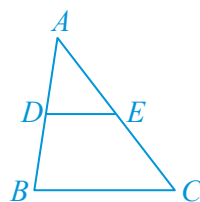


3 三角形兩邊中點連線段性質

- (1) 三角形兩邊中點的連線段平行於第三邊，且長度為第三邊長度的一半。
- (2) 過三角形一邊中點且平行另一邊的直線，會通過第三邊的中點。

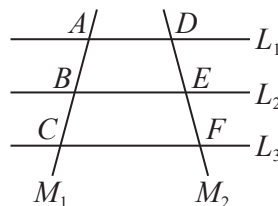
例 如右圖， $\triangle ABC$ 中，若 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，則：

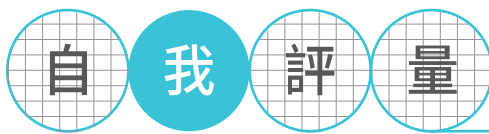
- (1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。
- (2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 。



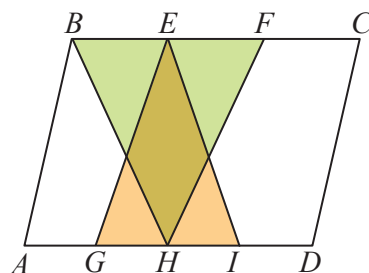
4 平行線截比例線段性質的應用

如右圖，若 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，且分別與 M_1 交於 A 、 B 、 C 三點，與 M_2 交於 D 、 E 、 F 三點，則 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。



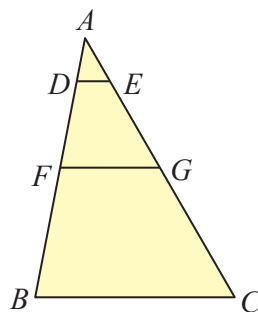


- 1 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 將 $\overline{BC}$ 三等分， G 、 H 、 I 將 $\overline{AD}$ 四等分，則 $\triangle HBF$ 面積： $\triangle EGI$ 面積為何？



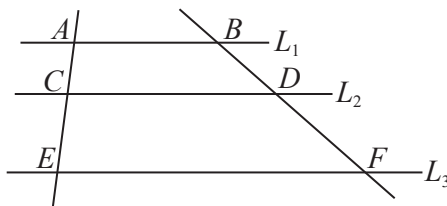
P.21 例 1

- 2 如右圖， D 、 F 兩點在 $\overline{AB}$ 上， E 、 G 兩點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BC}$ 。若 $\overline{AD} : \overline{DF} : \overline{FB} = 1 : 2 : 3$ ， $\overline{BC} = 10\text{ cm}$ 、 $\overline{AC} = 15\text{ cm}$ ，則：
- (1) $\overline{EG} = ?$ (2) $\overline{DE} = ?$ (3) $\overline{FG} = ?$



P.24 例 2、P.26 例 3

- 3 如右圖， $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，若 $\overline{AC} = 4$ 、 $\overline{CE} = 4x + 2$ 、 $\overline{BD} = 3x + 3$ 、 $\overline{DF} = 9$ ，則 x 的值為多少？



P.31 隨堂

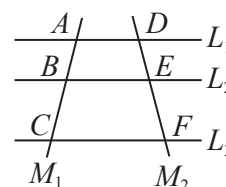
4 如右圖，已知 $\overline{AB}$ ，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找到一點 C ，使得 $\overline{AC} : \overline{AB} = 3 : 5$ 。

A ————— B

P.32 例 5

挑 錯 題

小妍計算「如右圖，已知 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，且 M_1 與 M_2 為截線，若 $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BC}=\overline{AD}=3$ ， $\overline{BE}=4$ ，則 $\overline{CF}$ 的值為何？」的過程如下。判斷他的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。



$\because L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ ，
 $\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CF}$ ，
 $\times \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AB} : (\overline{AB} + \overline{BC}) = 2 : (2 + 3) = 2 : 5$ ，
 $\therefore \overline{BE} : \overline{CF} = 2 : 5 = 4 : 10$ ，
 故 $\overline{CF} = 10$ 。