

2-2 根式的運算

2-2 根式的運算 73

帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2} + 3$ 、 $\sqrt{2} - 1$ 、 $(-2) \times \sqrt{2}$ 、 $1 \div \sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

① 根式的表示

對應能力指標 N-8-1

教學層批

此部分的目的是說明：根式的運算規則也符合以前所學數的運算規則。

多項式的簡記

$2 \cdot x$ 可寫成 $2x$ 。
 $(-\frac{1}{2}) \cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。
 $x \div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。

根式的簡記

$2 \cdot \sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。
 $(-\frac{1}{2}) \times \sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。
 $\sqrt{2} \div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

根式的簡記

若 $a \neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b} \quad (2) \sqrt{b} \div a = \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3 \times 2\sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法，我們可以做整數或分數與根式的運算。

隨堂練習

計算下列各根式：

$$\begin{aligned} (1) -5 \times 2\sqrt{3} &= -5 \times 2 \times \sqrt{3} = -10 \times \sqrt{3} = -10\sqrt{3} \\ (2) -\frac{4}{3}\sqrt{2} \times (-6) &= (-\frac{4}{3}) \times \sqrt{2} \times (-6) = (-\frac{4}{3}) \times (-6) \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \\ (3) (-4\sqrt{2}) \div 6 &= -\frac{4}{6} \times \sqrt{2} = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

會考觀測站 加強演練題 搭配隨堂

計算下列各根式：

$$\begin{aligned} (1) 2 \times \sqrt{6} & (2) -2\sqrt{3} \times 7 & (3) 4\sqrt{7} \div 2 & (4) -\frac{9}{4}\sqrt{5} \div (-3) \\ (1) 2\sqrt{6} & (2) -14\sqrt{3} & (3) 2\sqrt{7} & (4) \frac{3}{4}\sqrt{5} \end{aligned}$$

② 根式的乘法

由前面的說明可以得到，若 a, b, c 為正數或 0 時， $a \times b\sqrt{c} = (a \times b)\sqrt{c}$ 。
那麼， $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a \times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 $2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2}$ ，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \times 3} (= \sqrt{6})$ 呢？
因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2$
 $= 2 \times 3$

而且 $(\sqrt{2 \times 3})^2 = 2 \times 3$
由於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2 \times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。事實上，若 $a, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

根式的乘法運算

若 a, b 為正數或 0，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 1 根式的乘法運算

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

解 (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

$= \sqrt{3 \times 7}$

$= \sqrt{21}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

$= \sqrt{6 \times \frac{5}{3}}$

$= \sqrt{10}$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

$= (-3) \times \sqrt{3} \times (-2) \times \sqrt{5}$

$= (-3) \times (-2) \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$

$= 6\sqrt{15}$

教學層批

- 此處主要是熟練「 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 」的題型。
- 因為課本 P77 才開始學習「最簡根式」，故此處各根式的乘積應為最簡根式。

考 會考觀測站 加強演練題 搭配例 1

計算下列各式的乘積：

(1) $\sqrt{7} \times \sqrt{11}$

(2) $\sqrt{4} \times \sqrt{\frac{13}{2}}$

(3) $\sqrt{\frac{21}{28}} \times \sqrt{20}$

(1) $\sqrt{77}$

(2) $\sqrt{26}$

(3) $\sqrt{15}$

隨堂練習

1. 求下列各根式的乘積

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{14}$
 $= \sqrt{5 \times 14}$
 $= \sqrt{70}$

2. 如圖，已知長方形的面積，求此長方形的面積

$\sqrt{13} \times \sqrt{5} = \sqrt{13 \times 5}$
所以長方形的面積

例 2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小

$3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$

$2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$

因為 $\sqrt{18} > \sqrt{12}$ ，

隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小

$6\sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{72}$

$5\sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$

因為 $\sqrt{75} > \sqrt{72}$ ，

考 會考觀測站

比較下列根式的大小

$8\sqrt{3}$ 、 $7\sqrt{2}$ 、 $5\sqrt{6}$

$7\sqrt{2} < 4\sqrt{7} < 5\sqrt{6}$

隨堂練習

1. 求下列各根式的乘積：

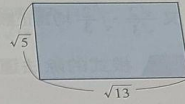
$$\begin{aligned} (1) \sqrt{5} \times \sqrt{14} \\ &= \sqrt{5 \times 14} \\ &= \sqrt{70} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{14} \times \sqrt{\frac{13}{7}} \\ &= \sqrt{14 \times \frac{13}{7}} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (-2\sqrt{3}) \times (4\sqrt{2}) \\ &= (-2) \times \sqrt{3} \times 4 \times \sqrt{2} \\ &= (-2) \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= -8\sqrt{6} \end{aligned}$$

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。

$$\sqrt{13} \times \sqrt{5} = \sqrt{13 \times 5} = \sqrt{65}$$

所以長方形的面積為 $\sqrt{65}$ 平方公分。

趣味數學

巧虎島的進口關稅規定為：「商人每經過一個關口，就要繳出所有金幣的一半，再退還一枚。」如果有一位商人，經過 10 個關口之後，只剩下兩枚金幣，則他最初共有幾枚金幣呢？
2 枚。

例 2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

$$\begin{aligned} \text{解 } 3\sqrt{2} &= 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18} \\ 2\sqrt{3} &= 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12} \\ \text{因為 } \sqrt{18} &> \sqrt{12}, \text{ 所以 } 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

也可以這樣做：

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2})^2 &= (3\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 18 \\ (2\sqrt{3})^2 &= (2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3}) = 12 \\ \text{因為 } 18 &> 12, \text{ 所以 } 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2} &= 6 \times \sqrt{2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \sqrt{72} \\ 5\sqrt{3} &= 5 \times \sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75} \\ \text{因為 } \sqrt{75} &> \sqrt{72}, \text{ 所以 } 5\sqrt{3} > 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 2

比較下列根式的大小，將其由小到大排列：

$$8\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{6}, 4\sqrt{7}$$

$$7\sqrt{2} < 4\sqrt{7} < 5\sqrt{6} < 8\sqrt{3}$$