

3-2 尺規作圖

主題1 等線段與等角作圖

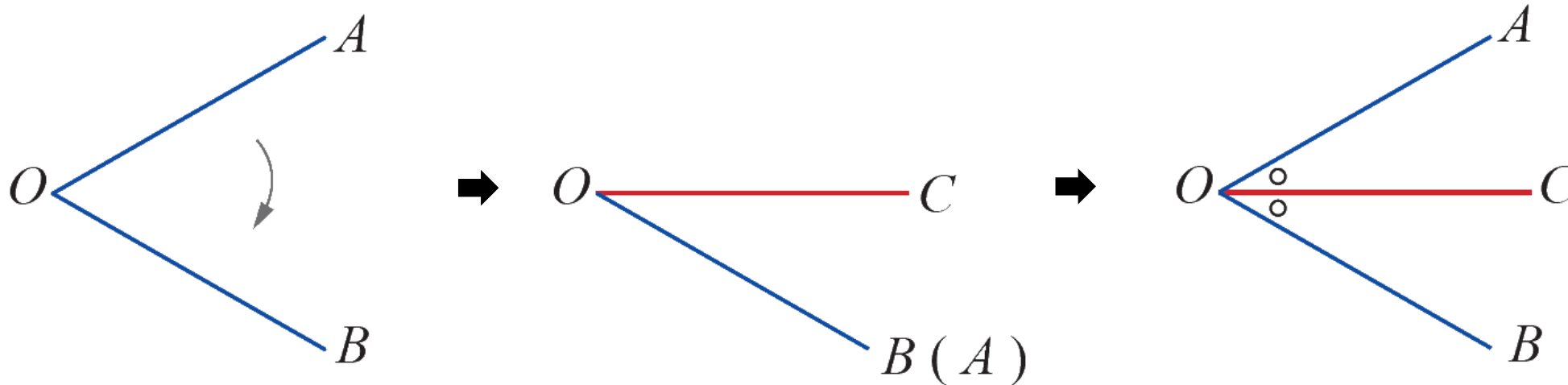
主題2 中垂線與角平分線作圖

重點整理

自我評量

角平分線

如下圖，將 $\angle AOB$ 對摺，使 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 疊合在一起，
 假設摺痕為 $\overrightarrow{OC}$ ，此時摺痕 $\overrightarrow{OC}$ 把 $\angle AOB$ 平分成兩個相等的
 角，也就是 $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB$ 。我們稱 $\overrightarrow{OC}$ (或 $\overline{OC}$)
 為 $\angle AOB$ 的角平分線或分角線。



如右圖，若 O 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{OD}$ 是 $\angle AOC$ 的角平分線，
 $\overline{OE}$ 是 $\angle BOC$ 的角平分線，則 $\angle DOE$ 的度數為何？

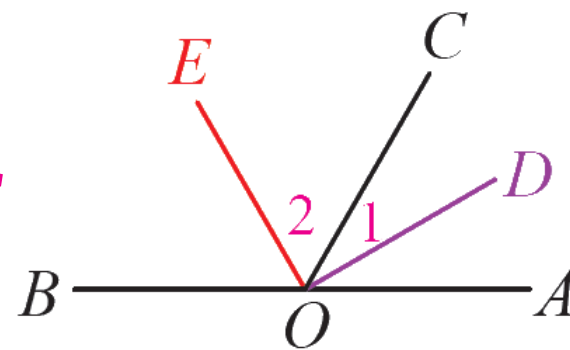
解

$\because A、O、B$ 在一直線上， $\therefore \angle AOB = 180^\circ$

$\overline{OD}$ 是 $\angle AOC$ 的角平分線，得 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle AOC$

$\overline{OE}$ 是 $\angle BOC$ 的角平分線，得 $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle BOC$

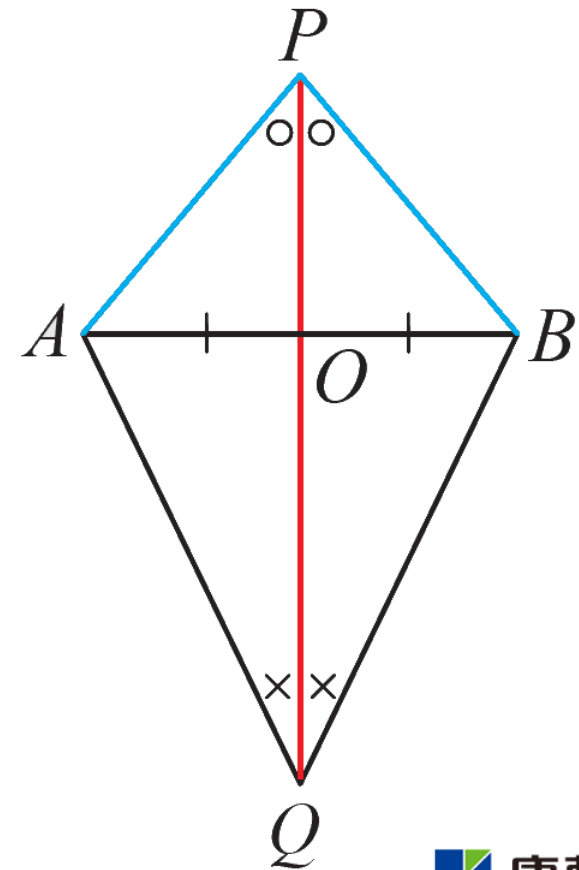
$$\begin{aligned}\angle DOE &= \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle BOC \\ &= \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOC) \\ &= \frac{1}{2} \angle AOB = 90^\circ\end{aligned}$$



角平分線作圖

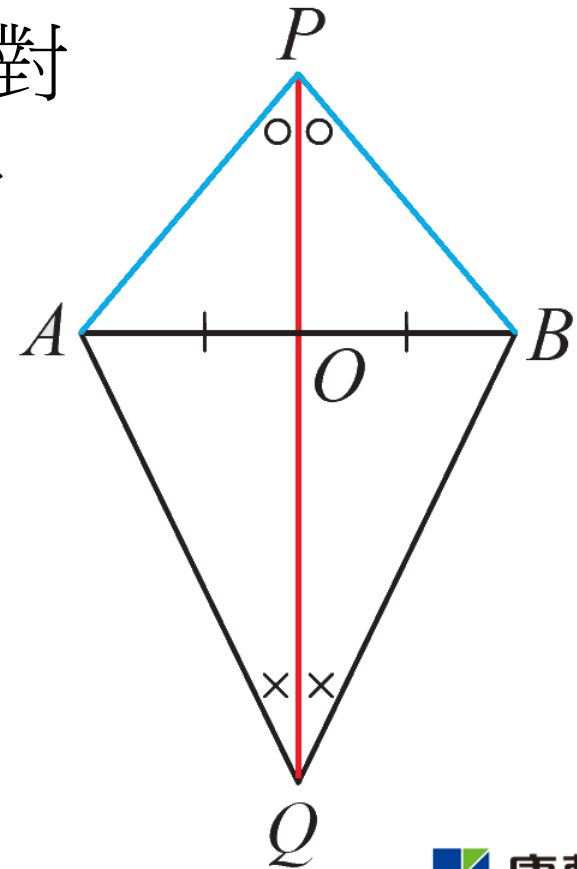
除了對摺的方法外，還有沒有其他方法能夠找出一角的角平分線呢？

右圖為箏形 $APBQ$ ，其中 $\triangle PAB$ 與 $\triangle QAB$ 皆為等腰三角形，可知 $\overline{PQ}$ 為其對稱軸，則 $\overline{PQ}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，也是 $\angle APB$ 與 $\angle AQB$ 的角平分線。



角平分線作圖

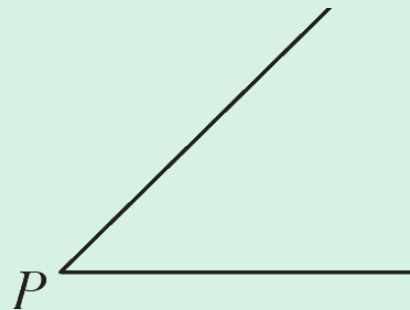
由上可知，若能畫出一個箏形 $APBQ$ ，讓 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 、 $\overline{QA} = \overline{QB}$ ，那麼箏形 $APBQ$ 的對角線 $\overline{PQ}$ 就會平分 $\angle APB$ 。我們來看下面的例題。



例 6 角平分線作圖

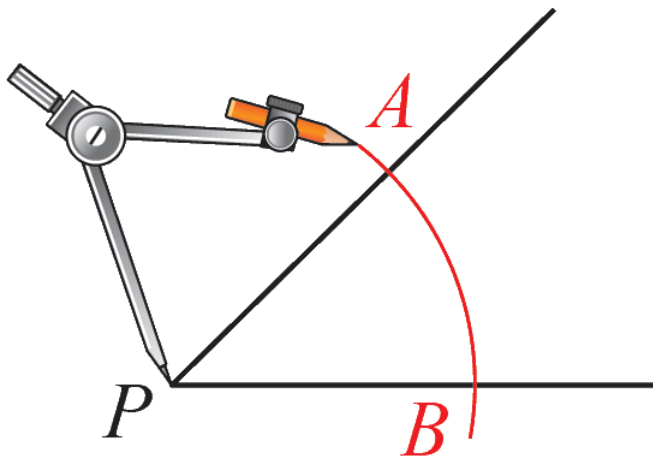
搭配課本p113

已知 $\angle P$ ，畫出 $\angle P$ 的角平分線。



作法

1



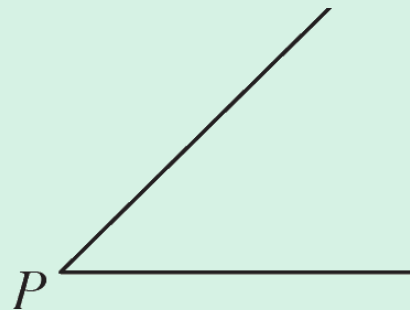
以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\angle P$ 的兩邊於 A 、 B 兩點。



例 6 角平分線作圖

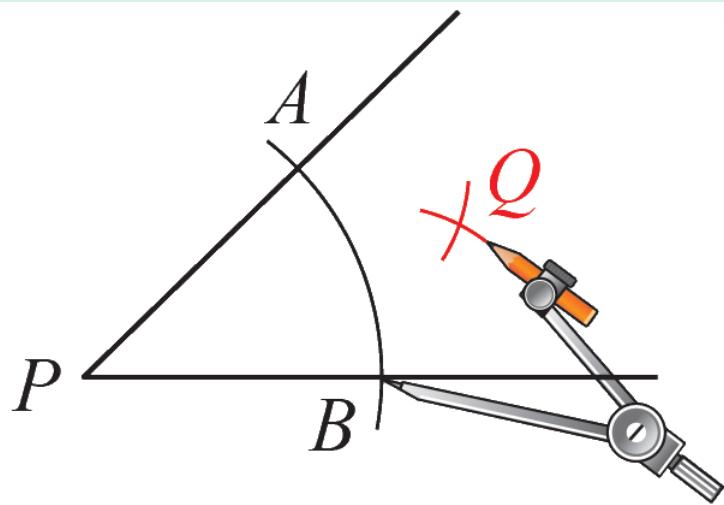
搭配課本p113

已知 $\angle P$ ，畫出 $\angle P$ 的角平分線。



作法

2



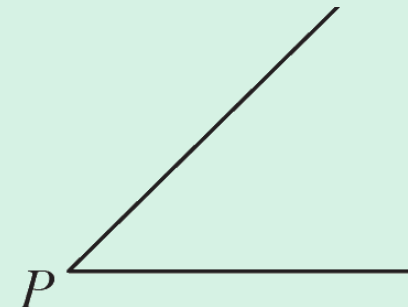
分別以 A 、 B 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧相交於 Q 點。



例 6 角平分線作圖

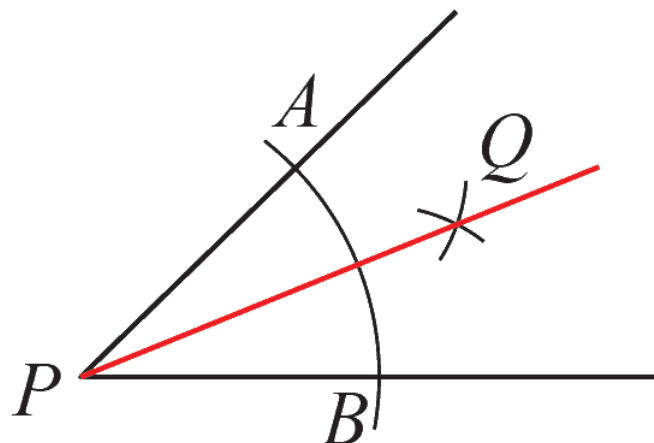
搭配課本p113

已知 $\angle P$ ，畫出 $\angle P$ 的角平分線。



作法

3



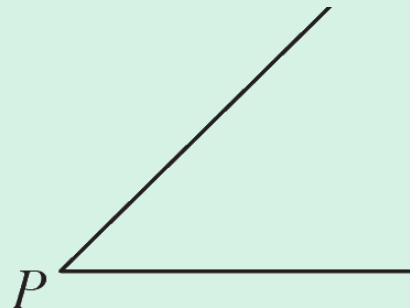
連接 $\overrightarrow{PQ}$ ，則 $\overrightarrow{PQ}$ 即為 $\angle P$ 的角平分線。



例 6 角平分線作圖

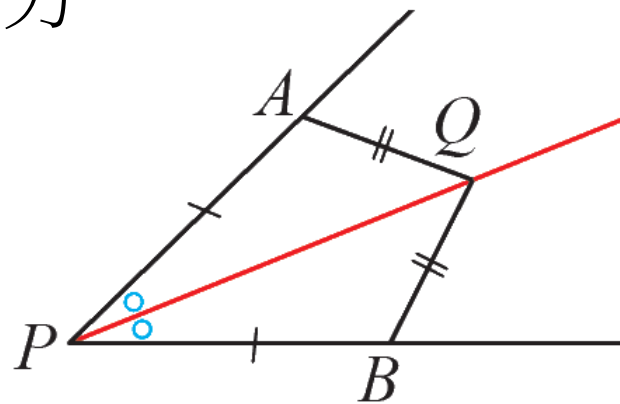
搭配課本p113

已知 $\angle P$ ，畫出 $\angle P$ 的角平分線。



說明 在例 6 的作圖中，連接 $\overline{QA}$ 、 $\overline{QB}$ ，則四邊形 $APBQ$ 為箏形，此時 $\overrightarrow{PQ}$ 就是 $\angle APB$ 的角平分線。

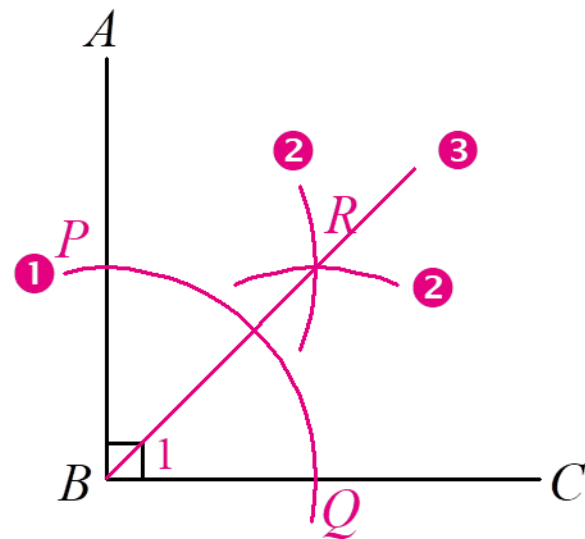
像這樣利用尺規作圖畫出一個角的角平分線，稱為**角平分線作圖**。



已知 $\angle ABC = 90^\circ$ ，利用角平分線作圖畫出 $\angle 1$ ，使得 $\angle 1 = 45^\circ$ 。

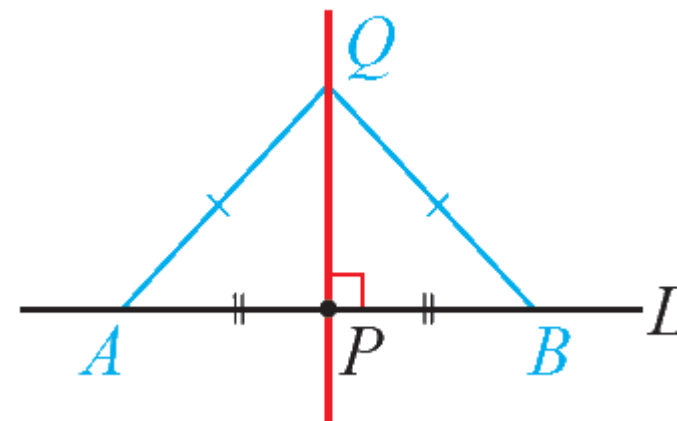
解

- 1 以 B 點為圓心，適當長為半徑畫弧交 $\angle B$ 的兩邊於 P 、 Q 兩點
- 2 分別以 P 、 Q 為圓心，大於 $\frac{1}{2}PQ$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧相交於 R 點
- 3 連接 $\overrightarrow{BR}$ ，則 $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ$ 即為所求



過線上一點作垂線

已知直線 L 及線上一點 P ，要如何利用尺規畫出通過 P 點且與 L 垂直的直線呢？



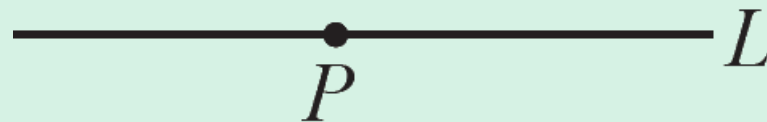
我們知道等腰三角形的對稱軸會垂直平分底邊。若能畫出一個等腰 $\triangle QAB$ ，其中 A 、 B 兩點都在直線 L 上，且 P 點為 $\overline{AB}$ 的中點，那麼 $\overleftrightarrow{QP}$ 就會與 L 垂直。我們來看下面的例題。



例 7 過線上一點作垂線

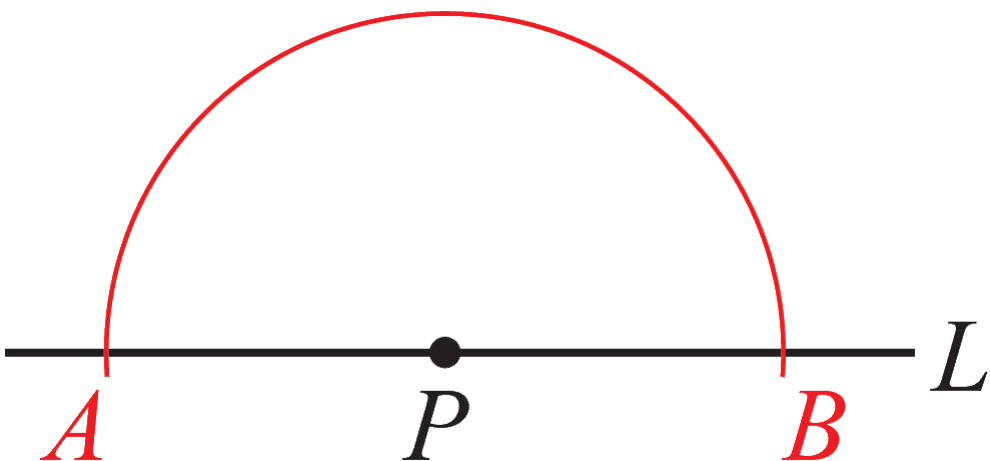
搭配課本p114

已知直線 L 及線上一點 P ，求作過 P 點且與 L 垂直的直線。



作法

1



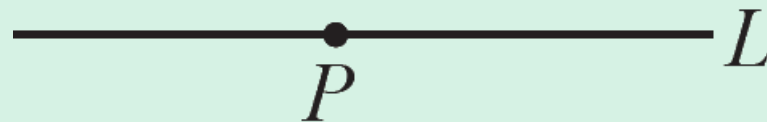
以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 L 於 A 、 B 兩點。



例 7 過線上一點作垂線

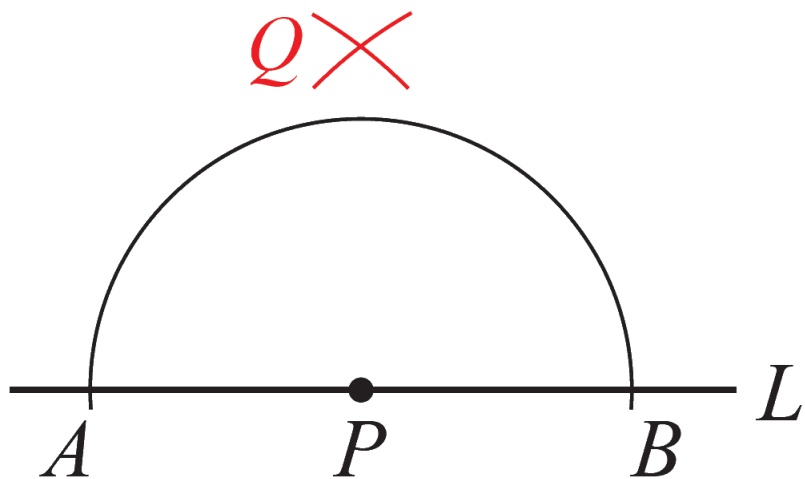
搭配課本p115

已知直線 L 及線上一點 P ，求作過 P 點且與 L 垂直的直線。



作法

2



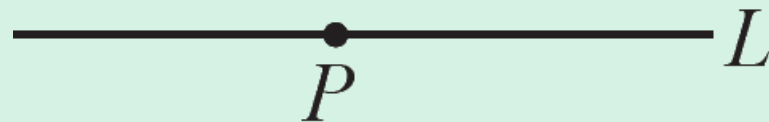
分別以 A 、 B 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧交於 Q 點。



例 7 過線上一點作垂線

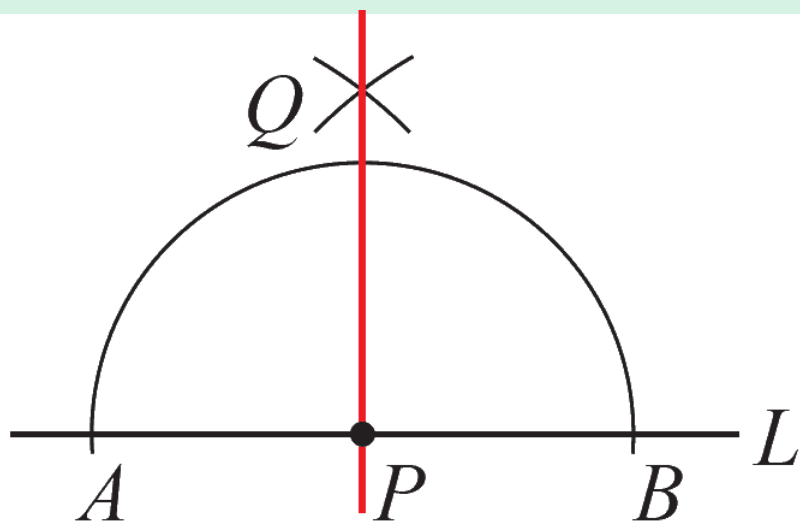
搭配課本p115

已知直線 L 及線上一點 P ，求作過 P 點且與 L 垂直的直線。



作法

3



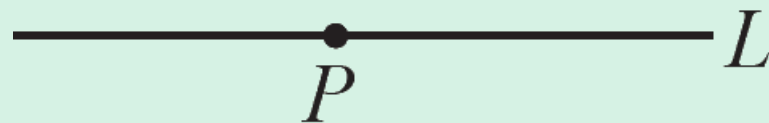
連接 $\overleftrightarrow{PQ}$ ，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。



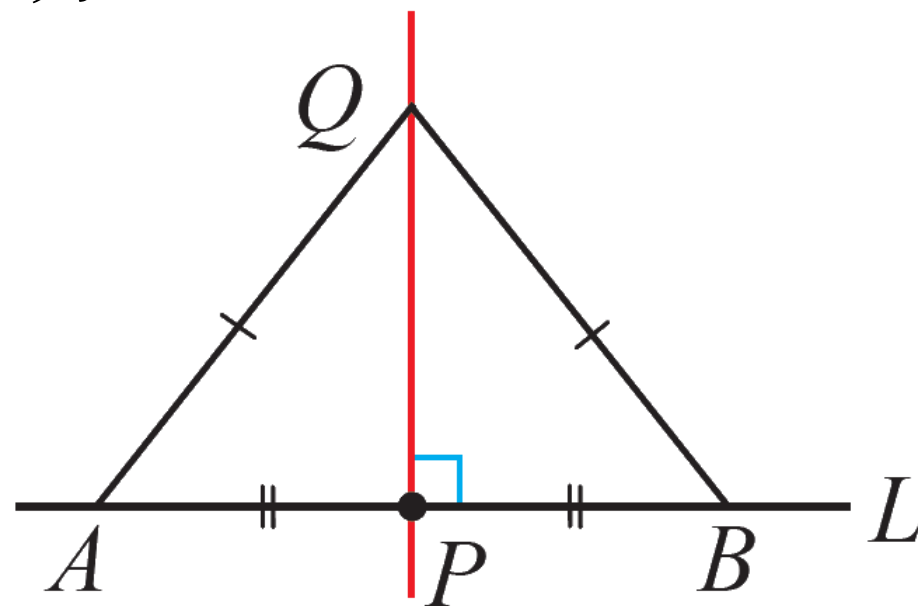
例 7 過線上一點作垂線

搭配課本p115

已知直線 L 及線上一點 P ，求作過 P 點且與 L 垂直的直線。



說明 在例 7 的作圖中，連接 $\overline{QA}$ 、 $\overline{QB}$ ，則 $\triangle QAB$ 為等腰三角形，因此 $\overleftrightarrow{QP}$ 會垂直平分 $\overline{AB}$ 。



如下圖， $\triangle ABC$ 中， M 為 $\overline{BC}$ 上一點。利用尺規作圖，過 M 點作一直線與 $\overline{BC}$ 垂直。

解

- 1 以 M 點為圓心，適當長為半徑畫弧交 $\overline{BC}$ 於 P 、 Q 兩點
- 2 分別以 P 、 Q 為圓心，大於 $\frac{1}{2} \overline{PQ}$ 的相同長度為半徑畫弧，兩弧交於 R 點
- 3 連接 $\overrightarrow{MR}$ ，則 $\overrightarrow{MR}$ 即為所求

