彰化縣私立精誠高中 111 學年度數學領域公開觀議課

幾何分布學習單　　　　　　座號　　　姓名

$X \sim G(p)$ 的機率值、累積機率值

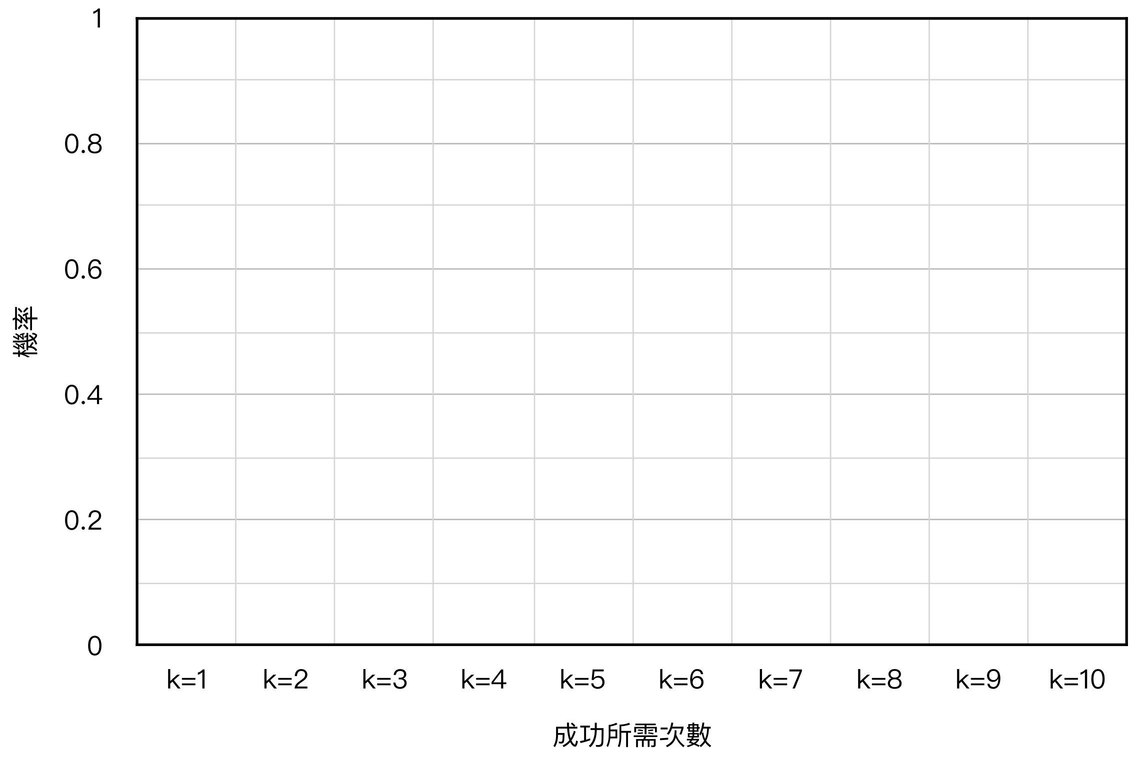
隨機變數 X 的取值表示重複試驗直到成功所需的次數，p 為試驗成功的機率

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \text{ , } k = 1, 2, 3, \cdots$$

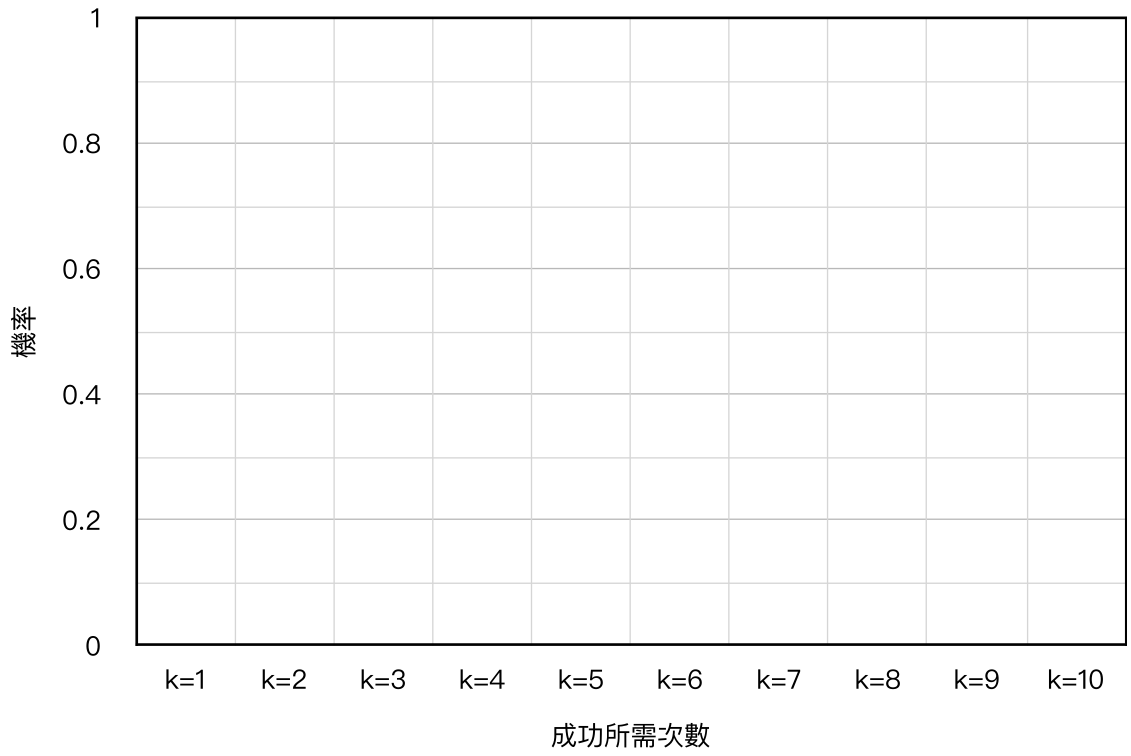
$X \sim G(p)$ 的機率值、累積機率值

成功所需次數	$p = 0.8$ $P(X = k)$	$p = 0.5$ $P(X = k)$	$p = 0.2$ $P(X = k)$	$p = 0.8$ $P(X \leqslant k)$	$p = 0.5$ $P(X \leqslant k)$	$p = 0.2$ $P(X \leqslant k)$
1	0.8	0.5	0.2			
2	0.16	0.25	0.16			
3	0.032	0.125	0.128			
4	0.0064	0.0625	0.1024			
5	0.00128	0.03125	0.08192			
6	0.000256	0.015625	0.065536			
7	0.0000512	0.0078125	0.0524288			
8	0.00001024	0.00390625	0.04194304			
9	0.000002048	0.001953125	0.033554432			
10	0.000000409	0.000976562	0.026843545			

$P(X = k)$ 機率



$P\left(x \leqslant k\right)$ 累積機率值



問題一：試求投擲三次都還沒有出現正面的機率。

問題二：試求投擲十次都還沒有出現正面的機率。

問題三：如果投擲十次之後都還沒有出現正面，試求再投擲三次也還沒有出現正面的機率。

討論：同學們可以發現，前面十次都是反面的結果並不會影響到你還要再投幾次才會出現正面的機率。硬幣並不會因為你已經投出很多次的反面而“同情你”。

換句話說，即使你已經投出一百次反面，這 一百次並不會影響後面的結果，所以這一百次等於是做白工。這個有點違反直覺的結果稱為幾何分布的無記憶性。

設隨機變數 X 的取值為第一次出現正面所需的投擲次數．

問題四：給定正整數 n，試求 $P(X > n)$。

問題五：對於任意正整數 m、n，考慮條件機率

$$P\left(X > m+n \mid X > m\right) = \frac{P\left(X > m+n \cap X > m\right)}{P\left(X > m\right)} = \frac{P\left(X > m+n\right)}{P\left(X > m\right)}$$

（這是因為如果有 $X > m+n$，則必有 $X > m$）

試證：$P\left(X > m+n \mid X > m\right) = P\left(X > n\right)$ 。此式即為幾何分布的無記憶性

問題六：假設每一胎生產，生男或生女的機率相同。某位媽媽很想要一個女兒，但是已經生了五個兒子。她考慮再生一個，因為她覺得都已經生了五個兒子了，下一個是女兒的機率應該大一些．請問以數學的觀點，她的想法對不對？

結論：無記憶性告訴我們，縱使你破釜沉舟非成功不可，但是前面的結果並“不影響” 之後的機率。簽過數萬組樂透號碼都沒中過頭獎的人，與剛開始買樂透的人，中頭獎的立足點是一樣的！