

● 不等式

有不等號的式子，稱為不等式。“解不等式”的意思是求出使得不等式成立的所有 x 值。

例題 8

試解下列不等式：

(1) $|x| < 3$.

(2) $|x| \geq 3$.

解 (1) 由絕對值的幾何意義可知 $|x| < 3$ 表示 x 與原點的距離小於 3，因此觀察數線可知所求的解為 $-3 < x < 3$ ，如圖 18 所示。



圖 18

亦可記為 $(-3, 3)$ 。

(2) 由絕對值的幾何意義可知 $|x| \geq 3$ 表示 x 與原點的距離要大於或等於 3，因此觀察數線可知所求的解為 $x \leq -3$ 或 $x \geq 3$ ，如圖 19 所示。



圖 19

亦可記為 $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ 。

隨堂練習

試解下列不等式：

(1) $|x| > 4$.

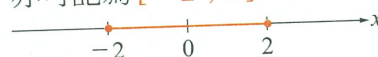
(2) $|x| \leq 2$.

隨堂詳解

(1) $|x| > 4$ ，即 x 與原點的距離大於 4，觀察數線可知 $x < -4$ 或 $x > 4$ ，亦可記為 $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ 。



(2) $|x| \leq 2$ ，即 x 與原點的距離小於或等於 2，觀察數線可知 $-2 \leq x \leq 2$ ，亦可記為 $[-2, 2]$ 。



一般而言，可列舉出四種絕對值不等式，其解與圖形如下：

絕對值不等式的解與圖形

設 a 為正實數，

(1) $|x| < a$ 的解為 $-a < x < a$ ，亦可記為 $(-a, a)$ 。

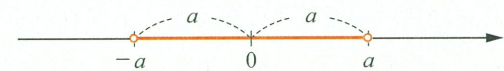


圖 20

(2) $|x| \leq a$ 的解為 $-a \leq x \leq a$ ，亦可記為 $[-a, a]$ 。

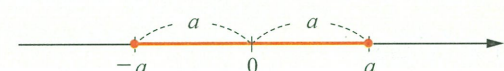


圖 21

(3) $|x| > a$ 的解為 $x < -a$ 或 $x > a$ ，亦可記為 $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ 。

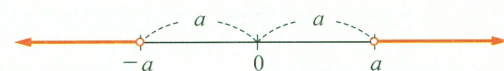


圖 22

(4) $|x| \geq a$ 的解為 $x \leq -a$ 或 $x \geq a$ ，亦可記為 $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ 。



圖 23

利用以上關係可解絕對值不等式，例如解 $|x-1| < 2$ ，可把 $x-1$ 視為整體，故由(1)可得

$$-2 < x-1 < 2,$$

故 $-1 < x < 3$ ，亦可記為 $(-1, 3)$ 。

一般來說，求解簡易的絕對值不等式時，都可以依上述的方式處理。

教學眉批

一個絕對值的不等式，可熟練這四種結論，作為解題基本策略。

若 k 是正實數，則：

(1) $|x-a| < k$ ，去絕對值後為 $-k < x-a < k$ ，

因此 $a-k < x < a+k$ 。

(2) $|x-a| \leq k$ ，去絕對值後為 $-k \leq x-a \leq k$ ，

因此 $a-k \leq x \leq a+k$ 。

(3) $|x-a| > k$ ，去絕對值後為 $x-a > k$ 或

$x-a < -k$ ，因此

$x < a-k$ 或 $x > a+k$ 。

(4) $|x-a| \geq k$ ，去絕對值後為 $x-a \geq k$ 或

$x-a \leq -k$ ，因此

$x \leq a-k$ 或 $x \geq a+k$ 。