2-2 根式的運算

• 根式的意義　• 根式的乘除運算　• 根式的加減運算　• 根式的四則運算

溫故啟思

1. 回答下列問題：

(1) 計算 $\sqrt{4\times9}=$ ___6___。

(2) 計算 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$ ___6___。

(3) 觀察 (1) 與 (2) 的結果，寫下你的發現：___$\sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}$___。

2. 計算並化簡下列各式：

(1) $2x+3x=$ ___$5x$___。

(2) $3x\cdot(-5)x=$ ___$-15x^2$___。

1 根式的意義

如右圖，依霖學校裡有一塊正方形的土地分成四個區域，要給四個班級的學生種植蔬菜，甲、乙兩班先各選了面積分別為 2 平方公尺與 3 平方公尺的小正方形區域，依霖的班級想要選左下角那一塊，這一塊的面積是多少呢？

我們在前一節學過，當正方形面積為 a 平方公尺時，邊長為 $\sqrt{a}$ 公尺，因此這個正方形土地的邊長為 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 公尺。我們知道像 $\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$ 這類的二次方根都是數，數字經過加、減、乘、除運算後可得出算式如：$2\times\sqrt{3}$、$\sqrt{3}+\sqrt{2}$、$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$、$\dfrac{3}{2}\times\sqrt{10}-2\times\sqrt{2}$ 等也都是數字，而這些算式中都含有根號（或稱方根），像這樣含有根號的算式稱為**根式**。

在上面的問題中，依霖的班級想要的那一塊土地面積應該是 ($\sqrt{3}\times\sqrt{2}$) 平方公尺，要怎麼計算化簡這個根式呢？接下來，我們就按部就班地來學學怎麼做根式的運算與化簡。

首先，我們知道平方根也是數，多項式中的 x 也可代表方根，因此方根運算就如同代數式的規則一樣。我們知道 $2\times x$ 或是 $2\times(x+3)$ 之類的代數式，其中的「×」可以省略，而簡記成 $2x$ 及 $2(x+3)$，同時 $x\div 5=\frac{x}{5}=\frac{1}{5}x$，同樣的，根式也可以利用這樣的方式將 × 或 ÷ 的記號簡記，譬如：

1. $3\times\sqrt{5}$ 可簡記成 $3\sqrt{5}$。

2. $\frac{3}{2}\times\sqrt{6}$ 可簡記成 $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ 或 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$。

3. $4\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 可簡記成 $4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$。

4. $1\times\sqrt{2}$ 可簡記成 $\sqrt{2}$；$(-1)\times\sqrt{2}$ 可簡記成 $-\sqrt{2}$。

5. $\sqrt{3}\div 2=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

隨堂練習

簡記下列各式：

(1) $3\times\sqrt{11}$

$3\times\sqrt{11}=3\sqrt{11}$

(2) $(-\frac{7}{2})\times\sqrt{6}$

$(-\frac{7}{2})\times\sqrt{6}=-\frac{7}{2}\sqrt{6}$

(3) $(-1)\times\sqrt{15}$

$(-1)\times\sqrt{15}=-\sqrt{15}$

(4) $\sqrt{5}\div 3$

$\sqrt{5}\div 3=\frac{\sqrt{5}}{3}$

知道根式的簡記規則後，接著我們先來看看基本的數與根式的乘法運算。

例 1 數與根式的乘積

計算下列各根式：

(1) $(-12)\times 5\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{7}{3}\sqrt{6}\times 9$

解

(1) $(-12)\times 5\sqrt{3}=(-12)\times 5\times\sqrt{3}=(-60)\times\sqrt{3}=-60\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{7}{3}\sqrt{6}\times 9=\dfrac{7}{3}\times\sqrt{6}\times 9=\dfrac{7}{3}\times 9\times\sqrt{6}=21\times\sqrt{6}=21\sqrt{6}$

隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $3\times 8\sqrt{21}$

$3\times 8\sqrt{21}$

$=24\sqrt{21}$

(2) $2\sqrt{2}\times(-8)$

$2\sqrt{2}\times(-8)$

$=-16\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{4}{3}\times(-6\sqrt{15})$

$\dfrac{4}{3}\times(-6\sqrt{15})$

$=-8\sqrt{15}$

(4) $(-2\sqrt{6})\times(-\dfrac{3}{2})$

$(-2\sqrt{6})\times(-\dfrac{3}{2})$

$=3\sqrt{6}$

2 根式的乘除運算

根式的乘法

在本節溫故啟思的問題1中，計算可得 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times 3=6=\sqrt{36}=\sqrt{4\times 9}$，那麼前面問題中的 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 是否也會等於 $\sqrt{3\times 2}$ 呢？

探索活動

根式的乘法

請利用科學型計算機計算 $(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2=$ <u>6</u>。

科學型計算機

$\boxed{3}\rightarrow\boxed{\text{SHIFT}}\rightarrow\boxed{x^2}\rightarrow\boxed{\times}\rightarrow\boxed{2}\rightarrow\boxed{\text{SHIFT}}\rightarrow\boxed{x^2}\rightarrow\boxed{=}\rightarrow\boxed{x^2}$

由探索活動可知 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 是 6 的正平方根，而 6 的正平方根就是 $\sqrt{6}$，即 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}=\sqrt{3\times2}$。一般而言，當 a，b 皆為正數或 0 時，

$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})(\sqrt{a}\times\sqrt{b})=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})(\sqrt{b}\times\sqrt{b})=a\times b=ab$，

即 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 是 ab 的正平方根，而 ab 的正平方根為 $\sqrt{ab}$，所以可得

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{a\times b}$。

因此我們可知：

根式的乘法

若 $a\geq0$，$b\geq0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$。

例 2 根式的乘法

計算下列各根式：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{13}$　　(2) $-2\sqrt{3}\times3\sqrt{7}$

解

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{13}$

$=\sqrt{5\times13}$

$=\sqrt{65}$

(2) $-2\sqrt{3}\times3\sqrt{7}$

$=-2\times\sqrt{3}\times3\times\sqrt{7}$

$=(-2\times3)\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}$

$=-6\times\sqrt{21}$

$=-6\sqrt{21}$

隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{11}$

$\sqrt{2}\times\sqrt{11}=\sqrt{2\times 11}$

$=\sqrt{22}$

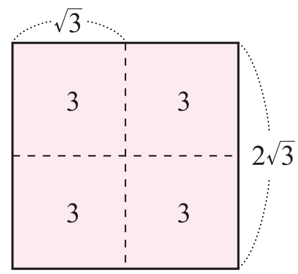
(2) $-3\sqrt{10}\times(-5\sqrt{3})$

$-3\sqrt{10}\times(-5\sqrt{3})$

$=(-3)\times(-5)\times\sqrt{10\times 3}$

$=15\sqrt{30}$

如右圖，面積分別為 12 與 3 的兩個正方形，大正方形面積是小正方形面積的 4 倍，其邊長分別為 $\sqrt{12}$ 與 $\sqrt{3}$。由圖形來看，大正方形邊長應是小正方形邊長的 2 倍，但 $\sqrt{12}$ 會是 $\sqrt{3}$ 的 2 倍嗎？



一般來說，若一正整數 a 可分解成 $a=b^2\times c$，其中 b 是正整數，c 是正整數，且 c 的因數中沒有大於 1 的完全平方數，則 $\sqrt{a}=\sqrt{b^2\times c}=\sqrt{b^2}\times\sqrt{c}=b\sqrt{c}$，例如：$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$。

習慣上，我們常將 $\sqrt{a}$ 利用這種方式簡化為 $b\sqrt{c}$，這個過程稱為化簡根式，而 $b\sqrt{c}$ 稱為**二次方根 $\sqrt{a}$ 的最簡式**或**最簡根式**，例如 $2\sqrt{3}$ 與 $2\sqrt{5}$ 都是最簡根式。因此，面積分別為 12 與 3 的正方形，其邊長的比值為 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$，此時若將兩邊長皆化簡為最簡根式，便可輕易看出其比值為 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$。

例 3　根式的化簡

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{125}$　　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{84}$

解

(1) $\sqrt{125}$

$=\sqrt{5^3}$

$=\sqrt{5^2}\times\sqrt{5}$

$=5\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{84}$

$=\sqrt{3\times(2^2\times3\times7)}$

$=\sqrt{2^2\times3^2\times7}$

$=\sqrt{(2\times3)^2}\times\sqrt{7}$

$=6\sqrt{7}$

隨堂練習

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{8}$

$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}$

$=\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{300}$

$\sqrt{300}=\sqrt{3\times10^2}$

$=\sqrt{10^2}\times\sqrt{3}$

$=10\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{27}\times\sqrt{6}$

$\sqrt{27}\times\sqrt{6}=\sqrt{3^3\times2\times3}$

$=\sqrt{(3^2)^2}\times\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}$

在例題 3 中，我們可以把 $\sqrt{125}$ 或 $\sqrt{84}$ 這類的根式化簡成最簡根式。除此之外，還有什麼樣的根式是還可化簡的呢？如下列這三種情形：

1. 根號內為正整數，且此正整數有質數平方的因數，例如：$\sqrt{12}$、$\sqrt{125}$。

2. 根號內為小數或分數，例如：$\sqrt{0.3}$、$\sqrt{\dfrac{75}{4}}$。

3. 分母為根式，例如：$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$。

若要化簡像 $\sqrt{0.3}$、$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 這類的根式則需利用根式的除法來化簡為最簡根式。

根式的除法

我們知道 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$，那麼 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 呢？

因為 $(\sqrt{2}\div\sqrt{3})^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2=\dfrac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$，

所以 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}$ 是 $\dfrac{2}{3}$ 的正平方根，而 $\dfrac{2}{3}$ 的正平方根是 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，

亦即 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2\div3}$。

因此我們可知：

根式的除法

若 $a\geq0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}$。

例 4 根式的除法

計算並化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{54}\div\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{14}\div\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$　(3) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

解

(1) $\sqrt{54}\div\sqrt{2}=\sqrt{54\div2}=\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{14}\div\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\sqrt{14}\div\sqrt{\dfrac{2}{7}}=\sqrt{14\div\dfrac{2}{7}}=\sqrt{14\times\dfrac{7}{2}}=\sqrt{7\times7}=7$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{3}{5}\times5}$

$=\sqrt{3}$

$\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，也可以這樣算：

$\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{5}}}\times\dfrac{\cancel{\sqrt{5}}}{1}=\sqrt{3}$

隨堂練習

計算並化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{85}\div\sqrt{5}$

$$\sqrt{85}\div\sqrt{5}=\sqrt{85\div 5}$$
$$=\sqrt{17}$$

(2) $\sqrt{39}\div\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$

$$\sqrt{39}\div\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}=\sqrt{39\div\frac{13}{15}}$$
$$=\sqrt{39\times\frac{15}{13}}$$
$$=\sqrt{3\times3\times5}=3\sqrt{5}$$

(3) $\sqrt{\dfrac{35}{3}}\div(-\dfrac{1}{\sqrt{21}})$

$$\sqrt{\frac{35}{3}}\div(-\frac{1}{\sqrt{21}})=-(\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}})\times\sqrt{21}=-(\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7})$$
$$=-(\sqrt{35}\times\sqrt{7})=-7\sqrt{5}$$

兩個根式相除，除了利用例題 4 的方法來化成最簡根式之外，當分母為根式時，為了化簡成最簡根式，也可設法將分母轉化成整數，這種過程稱為**有理化分母**。例如在第 82 頁的大小正方形中，它們的邊長比值為

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{36}}{3}=\frac{6}{3}=2$$

例 5 有理化分母

計算並化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{7}\div\sqrt{2}$　　(2) $3\sqrt{10}\div\sqrt{6}$

解

(1) $\sqrt{7}\div\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

(2) $3\sqrt{10}\div\sqrt{6}=\dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{10}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$$=\frac{3\sqrt{60}}{6}=\frac{\sqrt{2^2\times15}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$$

$\sqrt{7}\div 2$，也可以這樣算：

$$\sqrt{7}\div\sqrt{2}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{\frac{7\times2}{2\times2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

隨堂練習

計算並化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{5}\div\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ (3) $(-2\sqrt{35})\div 6\sqrt{15}$

(1)
$$\sqrt{5}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

(2)
$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3)
$$\text{原式}=-\frac{2\sqrt{35}}{6\sqrt{15}}=-\frac{2\times\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{6\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{21}}{9}$$

探索活動

計算機計算根式的近似值

利用計算機計算下列根式的近似值。(以四捨五入法求至小數點後第三位)

(1) $3\sqrt{10}\fallingdotseq$ 9.487；$\sqrt{6}\fallingdotseq$ 2.449。

(2) 利用 (1) 所得的 $3\sqrt{10}$ 與 $\sqrt{6}$ 的值計算 $\dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}\fallingdotseq$ 3.874。

(3) 直接由計算機計算

$\dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}\fallingdotseq$ 3.873。

一般 (科學) 型計算機

$\boxed{3}\to\boxed{\times}\to\boxed{1}\boxed{0}\to\boxed{\sqrt{\ }}\to\boxed{\div}\to\boxed{6}\to\boxed{\sqrt{\ }}\to\boxed{=}$

(4) 直接以計算機計算 $\sqrt{15}\fallingdotseq$ 3.873。

(5) 為何 (2) 與 (3) 計算出的結果不同？

因為每取一次近似值，便會產生一次誤差；

取越多次近似值，所得結果與實際值的差距越大。

(6) 若要計算 $\dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$，哪一種計算方式誤差較小？

將根式化簡後再求近似值會較準確，誤差較小。

例6 利用有理化分母化為最簡根式 (I)

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{75}{4}}$　　(3) $\sqrt{0.3}$

解

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sqrt{\dfrac{75}{4}}=\sqrt{\dfrac{5^2\times 3}{2^2}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{0.3}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}=\sqrt{\dfrac{3\times 10}{10\times 10}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

隨堂練習

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $\sqrt{\dfrac{125}{9}}$

$\sqrt{\dfrac{125}{9}}=\sqrt{\dfrac{5^3}{3^2}}=\dfrac{5}{3}\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{2.7}$

$\sqrt{2.7}=\sqrt{\dfrac{27}{10}}=\sqrt{\dfrac{27\times 10}{10\times 10}}=\dfrac{\sqrt{270}}{10}=\dfrac{3\sqrt{30}}{10}$

例 7 根式的近似值

已知 $\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236$，求下列根式的近似值，並以四捨五入法求至小數點後第三位：

(1) $\sqrt{500}$　(2) $\sqrt{0.05}$　(3) $\sqrt{45}$

解

(1) $\sqrt{500}=\sqrt{5\times10^2}=10\sqrt{5}\fallingdotseq10\times2.236=22.360$

(2) $\sqrt{0.05}=\sqrt{\dfrac{5}{100}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\fallingdotseq0.2236\fallingdotseq0.224$

(3) $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}\fallingdotseq3\times2.236=6.708$

隨堂練習

已知 $\sqrt{7} \fallingdotseq 2.646$，求下列根式的近似值：

(1) $\sqrt{700}$

$\sqrt{700}$

$=10\sqrt{7}$

$\fallingdotseq10\times2.646$

$=26.46$

(2) $\sqrt{0.07}$

$\sqrt{0.07}$

$=\sqrt{\dfrac{7}{100}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}}{10}$

$\fallingdotseq0.2646$

(3) $\sqrt{28}$

$\sqrt{28}$

$=2\sqrt{7}$

$\fallingdotseq2\times2.646$

$=5.292$

3 根式的加減運算

有些根式化簡後會有相同的方根，譬如 $\sqrt{2}$、$3\sqrt{2}$、$-\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$、…… 都帶有相同的方根 $\sqrt{2}$，我們稱這些根式為**同類方根**。另外，我們知道多項式做加減運算時，需要進行同類項合併，如對於任意數 x，$2x+3x=(2+3)x=5x$。同樣的，方根的加減運算也要將同類方根進行合併，譬如：

$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$。

根式的加減

根式中如果含有同類方根，可將同類方根合併以簡化根式。

例 8 根式的加減

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $6\sqrt{11}-3\sqrt{11}$　　(2) $2\sqrt{7}-3\sqrt{15}+5\sqrt{7}+9\sqrt{15}$

解

(1) $6\sqrt{11}-3\sqrt{11}$

$=(6-3)\sqrt{11}$

$=3\sqrt{11}$

(2) $2\sqrt{7}-3\sqrt{15}+5\sqrt{7}+9\sqrt{15}$

$=2\sqrt{7}+5\sqrt{7}-3\sqrt{15}+9\sqrt{15}$　合併同類方根

$=(2+5)\sqrt{7}+(-3+9)\sqrt{15}$

$=7\sqrt{7}+6\sqrt{15}$

隨堂練習

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $5\sqrt{13}-2\sqrt{13}$　　(2) $8\sqrt{3}-5\sqrt{2}+6\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(1) $5\sqrt{13}-2\sqrt{13}$

$=3\sqrt{13}$

(2) $8\sqrt{3}-5\sqrt{2}+6\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$=-4\sqrt{2}+14\sqrt{3}$

解謎三角

$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 與 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 是同類方根嗎？

例9 先化簡，再合併同類方根

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $\sqrt{54}+\sqrt{27}-\sqrt{96}+5\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

解

(1) $\sqrt{54}+\sqrt{27}-\sqrt{96}+5\sqrt{12}$

$=\sqrt{3^2\times 6}+\sqrt{3^2\times 3}-\sqrt{4^2\times 6}+5\sqrt{2^2\times 3}$

$=3\sqrt{6}+3\sqrt{3}-4\sqrt{6}+10\sqrt{3}$

$=13\sqrt{3}-\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{3}-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

$=\dfrac{5\sqrt{15}}{15}-\dfrac{3\sqrt{15}}{15}$

$=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

(2) 也可以這樣算：

$\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\sqrt{\dfrac{5\times 3}{3\times 3}}-\sqrt{\dfrac{3\times 5}{5\times 5}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{3}-\dfrac{\sqrt{15}}{5}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

隨堂練習

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $3\sqrt{2}-2\sqrt{75}+\sqrt{72}-5\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{4}{7}}-\sqrt{28}$

$3\sqrt{2}-2\sqrt{75}+\sqrt{72}-5\sqrt{3}$

$=3\sqrt{2}-10\sqrt{3}+6\sqrt{2}-5\sqrt{3}$

$=9\sqrt{2}-15\sqrt{3}$

$\sqrt{\dfrac{4}{7}}-\sqrt{28}$

$=\sqrt{\dfrac{4\times 7}{7\times 7}}-2\sqrt{7}$

$=\dfrac{2}{7}\sqrt{7}-2\sqrt{7}=-\dfrac{12}{7}\sqrt{7}$

解 不是。$\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

4 根式的四則運算

在進行根式的四則運算時，通常會將結果化為最簡根式。

例 10 計算並化簡根式

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $3\sqrt{125}\times(-\sqrt{2})+5\sqrt{10}$　　(2) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-3\sqrt{6})$

解

(1) $3\sqrt{125}\times(-\sqrt{2})+5\sqrt{10}$

$=3\sqrt{5^2\times5}\times(-\sqrt{2})+5\sqrt{10}$

$=15\sqrt{5}\times(-\sqrt{2})+5\sqrt{10}$

$=-15\sqrt{10}+5\sqrt{10}$

$=-10\sqrt{10}$

(2) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-3\sqrt{6})$

$=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times3\sqrt{6}+\sqrt{6}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times3\sqrt{6}$

$=6-6\sqrt{18}+\sqrt{18}-18$

$=6-18\sqrt{2}+3\sqrt{2}-18$

$=-12-15\sqrt{2}$

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

隨堂練習

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $2\sqrt{84}\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}-10\sqrt{63}$

$2\sqrt{84}\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}-10\sqrt{63}$

$=2\times2\sqrt{21}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-10\times3\sqrt{7}$

$=\dfrac{16}{3}\times3\sqrt{7}-30\sqrt{7}=-14\sqrt{7}$

(2) $(\sqrt{12}-2\sqrt{15})(3\sqrt{3}+2\sqrt{15})$

$(\sqrt{12}-2\sqrt{15})(3\sqrt{3}+2\sqrt{15})$

$=3\sqrt{36}+2\sqrt{12\times15}-6\sqrt{45}-4\times15$

$=18+2\times2\times3\sqrt{5}-18\sqrt{5}-60$

$=-42-6\sqrt{5}$

適當地利用在第一章學過的乘法公式，可以幫助我們簡化計算過程。

例 11 利用乘法公式化簡根式

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$　　(2) $(\sqrt{11}-3\sqrt{2})^2$

解

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$

$=5-3$

$=2$

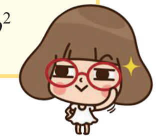
(2) $(\sqrt{11}-3\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{11})^2-2\times\sqrt{11}\times3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2$

$=11-6\sqrt{22}+18$

$=29-6\sqrt{22}$

平方差公式
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$



差的平方公式
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

隨堂練習

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $(2\sqrt{3}+\sqrt{7})(2\sqrt{3}-\sqrt{7})$

$(2\sqrt{3}+\sqrt{7})(2\sqrt{3}-\sqrt{7})$

$=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2$

$=12-7$

$=5$

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=5+2\sqrt{15}+3$

$=8+2\sqrt{15}$

我們知道分母有根式時不是最簡根式，因此像 $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 的根式該如何有理化分母呢？其實只要將 $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 的分母與分子同乘以 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$，即可將分母的根式化為整數，做法如下：

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{3\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}\ (\text{或}\ \frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{3})$$

例 12 利用有理化分母化為最簡根式 (Ⅱ)

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{10}{\sqrt{23}-3\sqrt{2}}$

解

(1) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{1\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{10}{\sqrt{23}-3\sqrt{2}}=\dfrac{10\times(\sqrt{23}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{23}-3\sqrt{2})\times(\sqrt{23}+3\sqrt{2})}=\dfrac{10\times(\sqrt{23}+3\sqrt{2})}{23-18}$

$$=\frac{\cancel{10}^{2}\times(\sqrt{23}+3\sqrt{2})}{\cancel{5}_{1}}=2\times(\sqrt{23}+3\sqrt{2})=2\sqrt{23}+6\sqrt{2}$$

隨堂練習

計算下列各式，並將答案化為最簡根式：

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$

原式 $=\dfrac{3\times(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)\times(\sqrt{7}+2)}$

$=\dfrac{3\sqrt{7}+6}{7-4}=\sqrt{7}+2$

(2) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{14}+2\sqrt{3}}$

原式 $=\dfrac{2\sqrt{2}\times(\sqrt{14}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{14}+2\sqrt{3})\times(\sqrt{14}-2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4\sqrt{7}-4\sqrt{6}}{14-12}=2\sqrt{7}-2\sqrt{6}$

例 13　方根運算的應用

曉華的爺爺有兩塊正方形的土地，面積分別是 20 平方公尺、45 平方公尺，他想要用鐵絲網將這兩塊地分別圍起來，試問：

(1) 兩塊土地的周長總和為何？

(2) 五金材料行的鐵絲網以 1 公尺為單位販賣，請問他最少需要訂多少公尺的鐵絲網才夠？

解

(1) 面積分別是 20 平方公尺、45 平方公尺的正方形，

其邊長分別為 $\sqrt{20}$ 公尺與 $\sqrt{45}$ 公尺，

而 $\sqrt{20}+\sqrt{45}=\sqrt{2^2\times5}+\sqrt{3^2\times5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

所以周長總和為 $4(\sqrt{20}+\sqrt{45})=4\times5\sqrt{5}=20\sqrt{5}$（公尺）。

(2) 利用計算機計算周長總和 $20\sqrt{5}\fallingdotseq44.72$（公尺），

故曉華的爺爺最少要訂 45 公尺的鐵絲網才夠。

一般型計算機

$\boxed{2}\ \boxed{0} \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \boxed{=}$

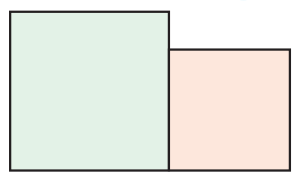
科學型計算機

$\boxed{2}\ \boxed{0} \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow$

$\boxed{\text{SHIFT}} \rightarrow \boxed{x^2} \rightarrow \boxed{=}$

隨堂練習

有大正方形土地與小正方形土地如右圖，其面積分別為 32 平方公尺與 18 平方公尺。今在外圍以籬笆將兩土地圍在一起，則籬笆總長度應為多少公尺？（利用計算機計算，以四捨五入法求至小數點後第一位）



兩正方形土地的邊長分別為 $\sqrt{32}$ 與 $\sqrt{18}$，

故籬笆總長度為 $3\sqrt{32}+3\sqrt{18}+(\sqrt{32}-\sqrt{18})=4\sqrt{32}+2\sqrt{18}=16\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=22\sqrt{2}\fallingdotseq31.1$（公尺）

2-2 重點整理

1 根式的乘除運算

(1) 若 $a\geq 0$，$b\geq 0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$。

例 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$。

(2) 若 $a\geq 0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}$。

例 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2\div 3}$。

2 根式的化簡

a 為正整數，若 $a=b^2\times c$，其中 b 是正整數，c 是正整數，且 c 的因數中沒有大於 1 的完全平方數，則 $\sqrt{a}=b\sqrt{c}$。$b\sqrt{c}$ 稱為**二次方根 $\sqrt{a}$ 的最簡式**或**最簡根式**。

例 $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$ 為最簡根式。

3 有理化分母

若 a、b 為正數，$a\neq b$，c 為任意數，有理化分母時，

(1) $\dfrac{c}{\sqrt{a}}$：可將分母與分子同乘以 $\sqrt{a}$。

例 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$。

(2) $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$：可將分母與分子同乘以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$。

例 $\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}$。

(3) $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$：可將分母與分子同乘以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$。

例 $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$。

2-2 自我評量

P.81 例 2 P.87 例 6 P.89 課文 P.89 例 8

1 下列敘述中，正確請在空格中畫○，錯誤請畫 ×：（每小題 4 分）

(×) (1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}$。

(○) (2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$。

(×) (3) $\sqrt{4\times\frac{1}{25}}=2\frac{1}{5}$。

(×) (4) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=5$。

(×) (5) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ 的最簡根式為 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$。

P.83 例 3 P.84 例 4 P.90 例 9

2 下列選項中，各式化簡的結果，哪一個不是整數？（10分）

(A) $\sqrt{98}-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{98}\times\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{169}+\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{200}\div\sqrt{2}$

答：(A)。

(A) $\sqrt{98}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}-\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{98}\times\sqrt{2}=7\sqrt{2}\times\sqrt{2}=14$

(C) $\sqrt{169}+\sqrt{4}=13+2=15$

(D) $\sqrt{200}\div\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$

故選(A)

P.92 例 11

3 計算並化簡 $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=$ $8+4\sqrt{3}$。（10 分）

$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6=8+4\sqrt{3}$

P.80 例 1 P.84 例 4 P.90 例 9 P.91 例 10 P.93 例 12

4 計算下列各式，並將答案化為最簡根式：（每小題 6 分）

(1) $3\sqrt{6}\times(-3)$

$3\sqrt{6}\times(-3)$

$=-9\sqrt{6}$

(2) $-2\sqrt{14}\div3\sqrt{7}$

$-2\sqrt{14}\div3\sqrt{7}$

$=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{\frac{9}{8}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{\frac{9}{8}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $8\sqrt{2}-2\sqrt{18}$

$8\sqrt{2}-2\sqrt{18}$

$=8\sqrt{2}-2\times 3\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

(5) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$=2\times 5-\sqrt{10}+2\sqrt{10}-2$

$=8+\sqrt{10}$

(6) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}$

$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}$

$=\frac{\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)}$

$=\frac{4-3\sqrt{2}}{-1}$

$=3\sqrt{2}-4$

(7) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\div\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

原式$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{-3\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{6}$

P.88 例 7

5 已知 $\sqrt{6} \fallingdotseq 2.45$，求下列根式的近似值，並以四捨五入法求至小數點後第一位：

（每小題 **6** 分）

(1) $\sqrt{600}$

$\sqrt{600}$

$=10\sqrt{6}$

$\fallingdotseq 24.5$。

(2) $\sqrt{6}+\sqrt{216}$

$\sqrt{6}+\sqrt{216}$

$=\sqrt{6}+6\sqrt{6}$

$=7\sqrt{6}$

$\fallingdotseq 17.2$

(3) $\sqrt{0.06}$

$\sqrt{0.06}$

$=\sqrt{\frac{6}{100}}=\frac{\sqrt{6}}{10}$

$\fallingdotseq 0.2$