

2



三角函數的圖形

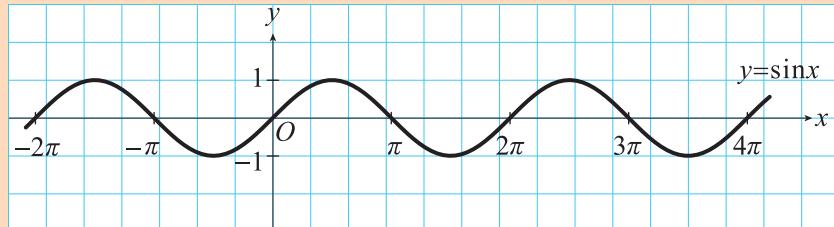


主題一 正弦函數的圖形

(搭配課本 P.20~P.23)

2

1. 三角函數：在各三角比都有定義的情形下，給定一個廣義角 x （弧）， $\sin x$ 、 $\cos x$ 與 $\tan x$ 的值都隨之唯一確定；因此它們都是 x 的函數，依序稱為正弦函數、餘弦函數與正切函數。
2. 正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形：



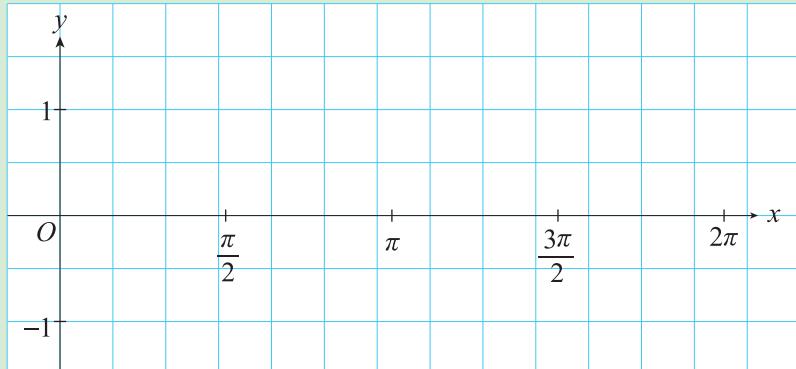
3. 週期函數：當函數 $y = f(x)$ 在 x 軸的方向每隔 p 單位就重複一段相同的圖形時（即可找到正數 p ，使得 $f(x+p) = f(x)$ 恒成立），稱函數 $f(x)$ 為**週期函數**。若滿足上述性質的最小正數 p 存在，則稱此週期函數的週期為 p 。
4. 在函數關係中， x 取值的範圍稱作該函數的**定義域**，而其對應值 y 的範圍稱作該函數的**值域**。
5. 正弦函數的特性：
 - (1) 定義域：因為對任意實數 x ， $\sin x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 \mathbb{R} 。
 - (2) 值域：因為正弦函數的值涵蓋每個在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為 $\{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$ 。
 - (3) 週期：由圖形知其週期為 2π 。
 - (4) 振幅：由圖形發現正弦函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為 1 ，此時，稱正弦函數的振幅為 1 。
 - (5) 對稱性：
 - ① 觀察正弦函數的圖形，可得圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線（例如直線 $x = \frac{\pi}{2}$ 或 $x = \frac{3\pi}{2}$ ）。
 - ② 由換算公式 $\sin(-x) = -\sin x$ 知其圖形對稱於原點。
 - (6) 頻率：當自變數 x 的單位為時間時，頻率表示單位時間內事件重複發生的次數，即週期的倒數，常用的單位為赫茲。



【配合課本內文】

例題 1

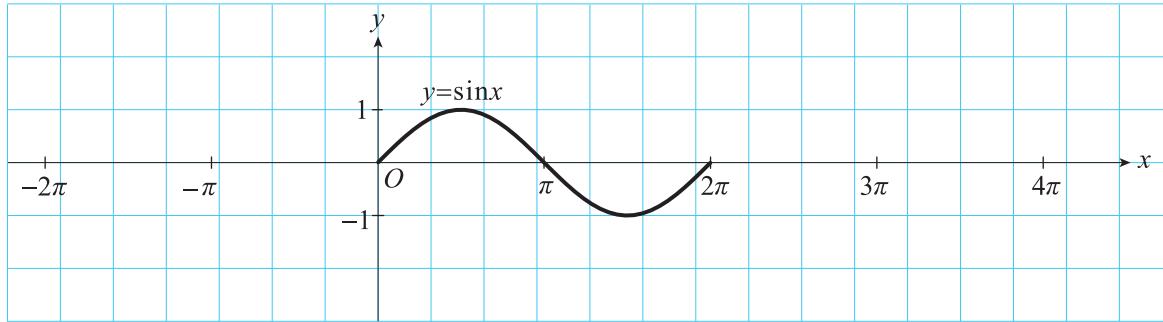
描繪正弦函數 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形。



解

 演練 1

利用 $\sin(2\pi + x) = \sin x$ 與 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形，描繪 $y = \sin x$ 在 $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ 上的圖形。



2

解



【配合課本內文】

例題 2

(1) 求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

(2) 已知 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

解

演練 2

已知 $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

解

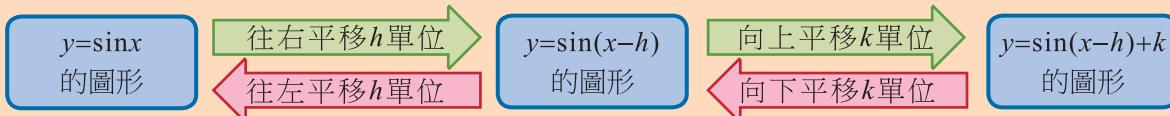


主題二

正弦函數圖形的平移與伸縮

(搭配課本 P.24~P.34)

1. 正弦函數圖形平移的概念，以流程圖表示如下。



說例

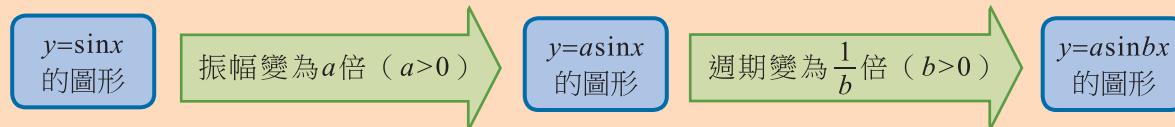
(1) 函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，向上平移 2 單位

得到。

(2) 函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，向下平移 3 單位

得到。

2. 正弦函數圖形伸縮的概念，以流程圖表示如下。



說例

函數 $y = 2 \sin 3x$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形以 x 軸為基準線，鉛直伸縮為原來的 2 倍(振幅變為 2)，以 y 軸為基準線，水平伸縮為原來的 $\frac{1}{3}$ 倍 (週期變為 $\frac{2\pi}{3}$) 後得到。

3. 形如 $y = a \sin(bx + c) + d$ (其中 a 、 b 、 c 、 d 均為常數) 的函數圖形可經由 $y = \sin x$ 的圖形平移與伸縮得到；又因為伸縮可能會改變圖形的振幅與週期，所以在實際操作上，我們會先處理伸縮再進行平移。

4. 函數 $y = a \sin(bx + c) + d$ 的週期為 $\frac{2\pi}{|b|}$ ($b \neq 0$)，振幅為 $|a|$ 。

說例 函數 $y = -3 \sin\left(-5x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 的週期為 $\frac{2\pi}{|-5|} = \frac{2\pi}{5}$ ，振幅為 $|-3| = 3$ 。

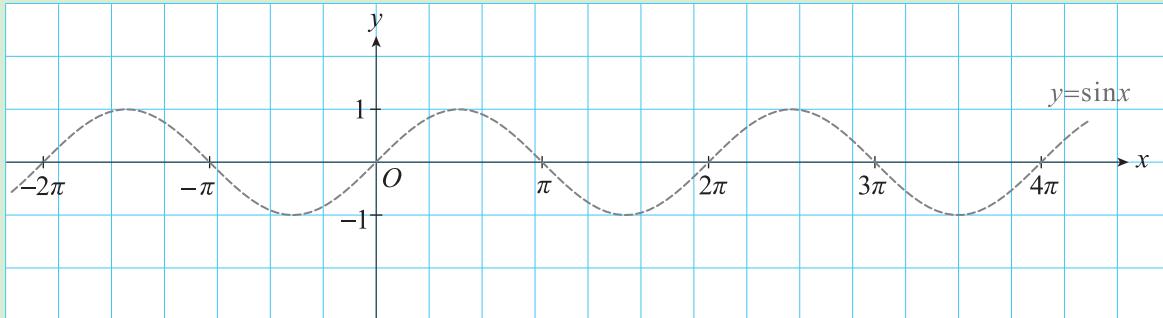


例題 3

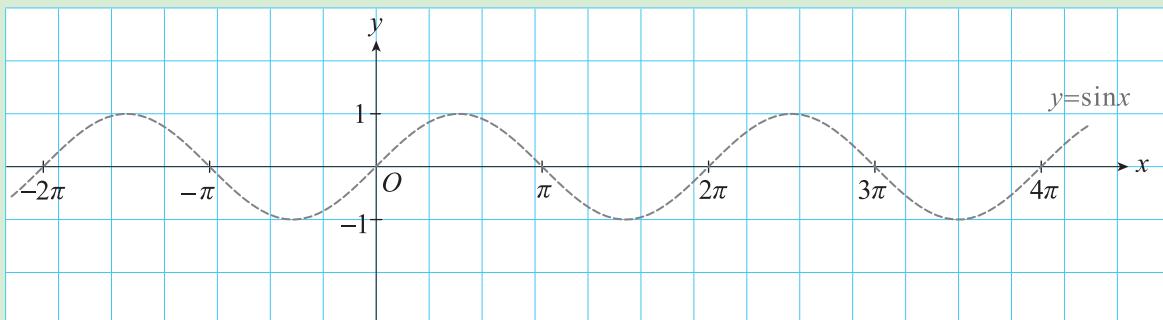
【配合課本例 1】

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

$$(1) y = \sin x + 1$$



$$(2) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



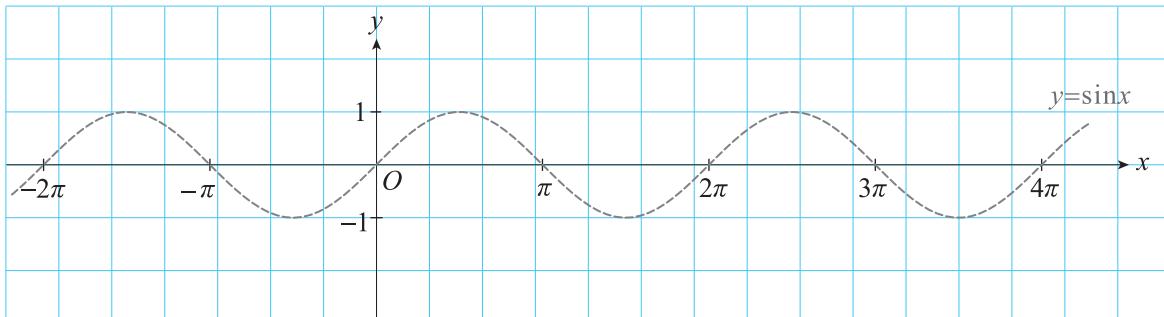
解

單元 2 三角函數的圖形

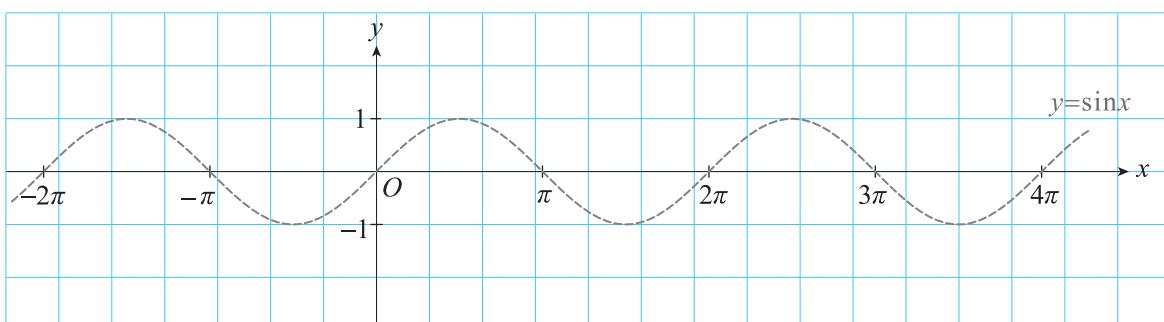
演練 3

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = \sin x - 1$ 。



(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。



解



例題 4

【配合課本例 2】

試問 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形如何由 $y = \sin x$ 的圖形平移得到？

- (1) 往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位 (2) 往右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位 (3) 往左平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位 (4) 往右平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位。

解

2

演練 4

設函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 h 單位後得到，且 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。

解

單元 2 三角函數的圖形

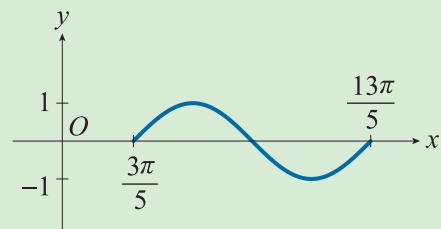


【配合課本例 3】

例題 5

已知右圖為函數 $y = \sin(x + h)$ 一個週期的圖形，

其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。



解



演練 5

承例題，已知圖為函數 $y = \sin(x - h)$ 一個週期的圖形，其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。

解

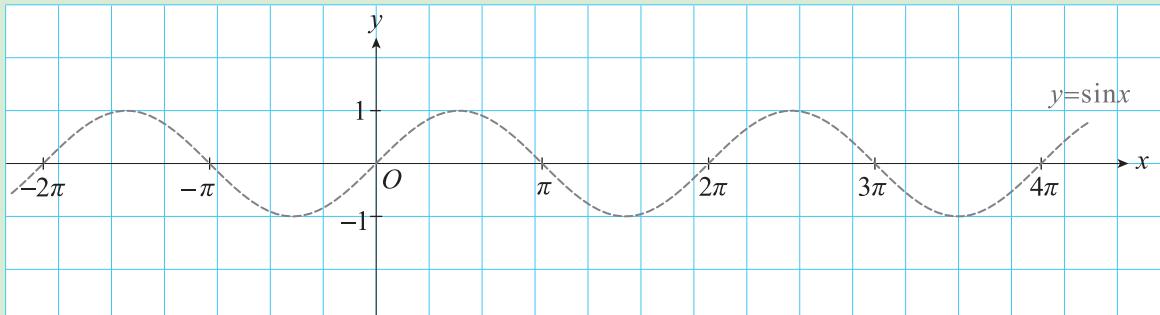


例題 6

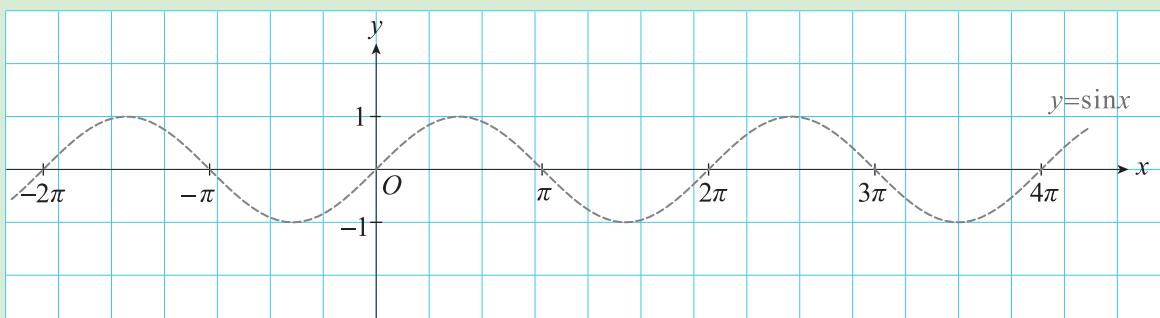
【配合課本例 4】

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

$$(1) y = 2 \sin x.$$



$$(2) y = \sin 2x.$$



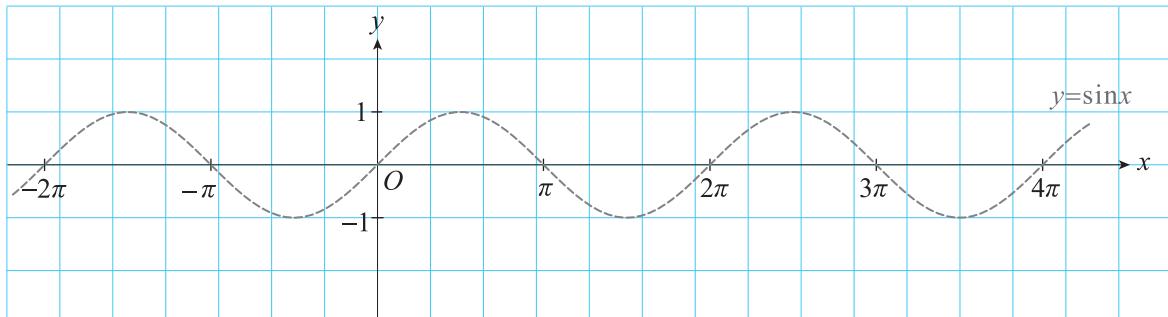
解

單元 2 三角函數的圖形

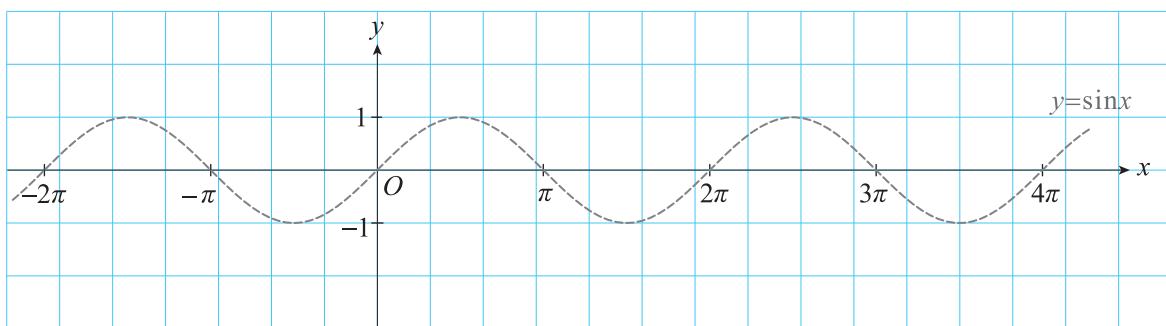
演練 6

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = -2 \sin x$ 。



(2) $y = \sin \frac{x}{2}$ 。



解



例題 7

【配合課本例 5】

求 $y = 3 \sin\left(-\frac{x}{4}\right)$ 的週期、最大值及最小值。

解

2



演練 7

求 $y = -2 \sin(-3x)$ 的週期、最大值及最小值。

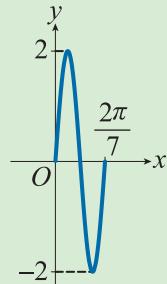
解



例題 8

【配合課本例 6】

已知右圖為 $y = a \sin bx$ 一個週期的圖形，
其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ，求 a 與 b 的值。



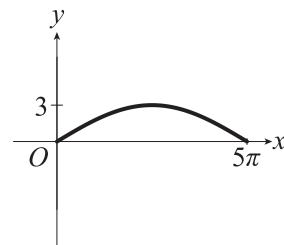
解



演練 8

已知右圖為 $y = a \sin bx$ 半個週期的圖形，其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ，
求 a 與 b 的值。

解





例題 9

【配合課本例 7】

求函數 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ 的週期、最大值及最小值。

解

演練 9

求下列各函數的週期、最大值及最小值。

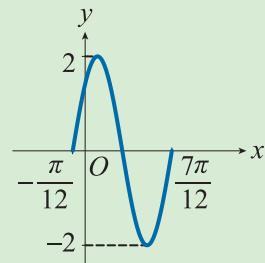
$$(1) y = -2 \sin 3x + 4 \quad (2) y = 4 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$$

解

**例題 10**

【常考題】

右圖是函數 $y = a \sin(bx + c)$ ($a > 0$, $b > 0$, $0 < c < \pi$) 一個週期的圖形，求實數 a 、 b 、 c 的值。



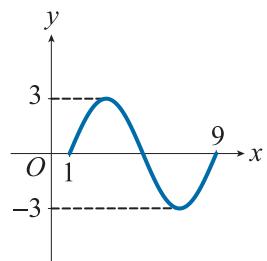
解

2

**演練 10**

右圖是函數 $y = a \sin(bx + c)$ ($a > 0$, $b > 0$, $|c| < \pi$) 一個週期的圖形，求實數 a 、 b 、 c 的值。

解





例題 11

【配合課本例 8】

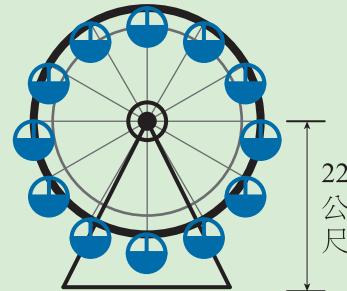


有一直徑 40 公尺的圓形摩天輪，其中心軸高 22 公尺，逆時針方向運轉一圈需時 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，小龍恰坐在離地最近的位置上， x 分鐘後，小龍離地的高度可表為

$$y = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) + c ,$$

其中 a 、 b 都是正數。

- (1) 求實數 a 、 b 與 c 的值。
- (2) 運轉 5 分鐘後，小龍離地的高度為幾公尺？



解



演練 11



一物體以彈簧懸掛。已知該物體離平衡點的位移 y (公分) 與時間 x (秒) 可用函數 $y = 5 \cos\left(\pi x + \frac{2\pi}{5}\right)$ 表示，求

- (1) 當 $x = 0.6$ 時距離平衡點的位移。
- (2) 距離平衡點的最大位移。
- (3) 往返完成一次振動所需要的時間。



解

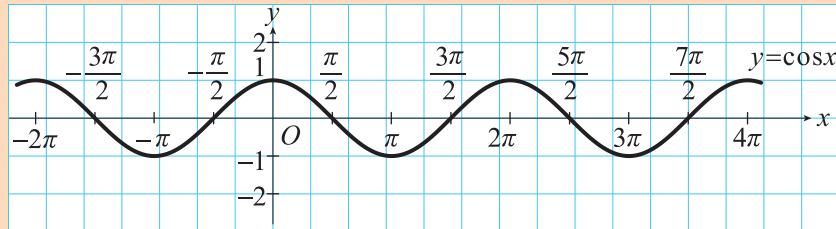


主題三

正弦、餘弦與正切函數的圖形與特性 (搭配課本 P.35~P.41)

1. 正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形與特性：見主題一。

2. 餘弦函數 $y = \cos x$ 的圖形與特性：



2

(1) 定義域：因為對任意實數 x ， $\cos x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 \mathbb{R} 。

(2) 值域：因為餘弦函數的值涵蓋每個在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為 $\{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$ 。

(3) 週期：因為餘弦函數圖形可由正弦函數平移得到，所以其週期為 2π 。

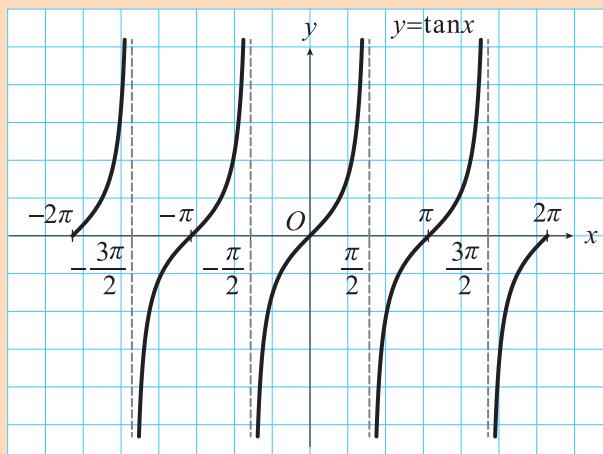
(4) 振幅：因為餘弦函數圖形可由正弦函數平移得到，所以其振幅為 1 。

(5) 對稱性：

① 觀察餘弦函數的圖形，可得圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線（例如直線 $x=0$ 或 $x=\pi$ ）。

② 由換算公式 $\cos(-x) = \cos x$ 知其圖形對稱於 y 軸。

3. 正切函數 $y = \tan x$ 的圖形與特性：



(1) 定義域：正切函數 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 的定義域為 $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 。

(2) 值域：因為正切函數的值涵蓋每一個實數，所以其值域為全體實數 \mathbb{R} 。

(3) 週期：由圖形可知其週期為 π 。

(4) 對稱性：由換算公式 $\tan(-x) = -\tan x$ 知其圖形對稱於原點。

單元 2 三角函數的圖形

4. 正弦、餘弦、正切函數圖形的特性：

函數	定義域 x	值域 y	週期	振幅
$y = \sin x$	全體實數 \mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	2π	1
$y = \cos x$	全體實數 \mathbb{R}	$-1 \leq y \leq 1$	2π	1
$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	全體實數 \mathbb{R}	π	無

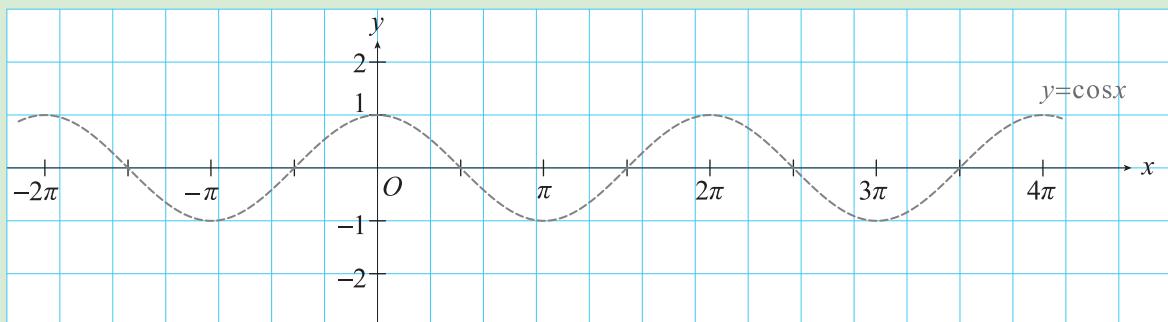


【配合課本內文】

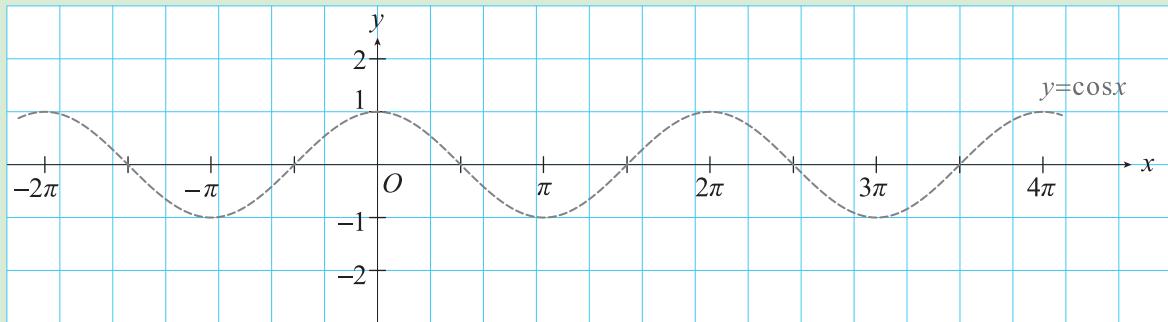
例題 12

畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值：

(1) $y = \cos x + 1$ 。



(2) $y = 2 \cos x$ 。



解

 演練 12

求函數 $y = 5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ 的週期、最大值及最小值。



2



例題 13

【配合課本例 9】

設 $a = \sin 2$ ，選出正確的選項。

- (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ 。



單元 2 三角函數的圖形

演練 13

設 $a = \cos 3$ ，選出正確的選項。

- (1) $a = -1$ (2) $-1 < a < -\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2} < a < 0$ (4) $0 < a < \frac{1}{2}$ °

解



例題 14

【配合課本例 10】

在 $0 \leq x \leq 4\pi$ 範圍內，求不等式 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 的解。

解

 演練 14

在 $0 \leq x \leq 4\pi$ 範圍內，求不等式 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ 的解。

 解

2



例題 15

【配合課本例 11】

求方程式 $4\cos x = x$ 解的個數。

 解

單元 2 三角函數的圖形

演練 15

求方程式 $\sin x = \frac{x}{5}$ 解的個數。

解



【常考題】

例題 16

已知 $0 \leq x < 2\pi$ ，求方程式 $\cos x = \tan x$ 解的個數。

解

演練 16

已知 $-\pi \leq x < \pi$ ，求方程式 $1-x = \tan x$ 解的個數。

解



主題四

餘切、正割與餘割函數圖形的特性 (搭配課本 P.222~P.224)

1. 三角比的定義：

當廣義角 θ 是一個標準位置角時，在 θ 的終邊上任取異於原點的一點 $P(x, y)$ ，

令 $r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，定義 θ 的六個三角比為

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \text{ (正弦)} ,$$

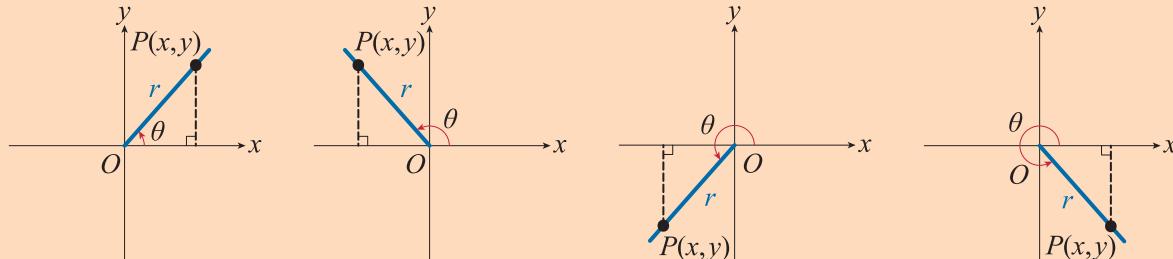
$$\cos \theta = \frac{x}{r} \text{ (餘弦)} ,$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \text{ (正切)} ,$$

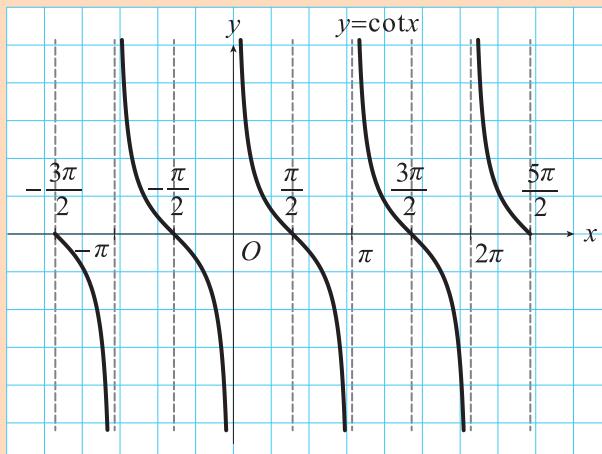
$$\cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \text{ (餘切)} ,$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0 \text{ (正割)} ,$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0 \text{ (餘割)} .$$



2. 餘切函數 $y = \cot x$ 的圖形與特性：



(1) 定義域：餘切函數 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

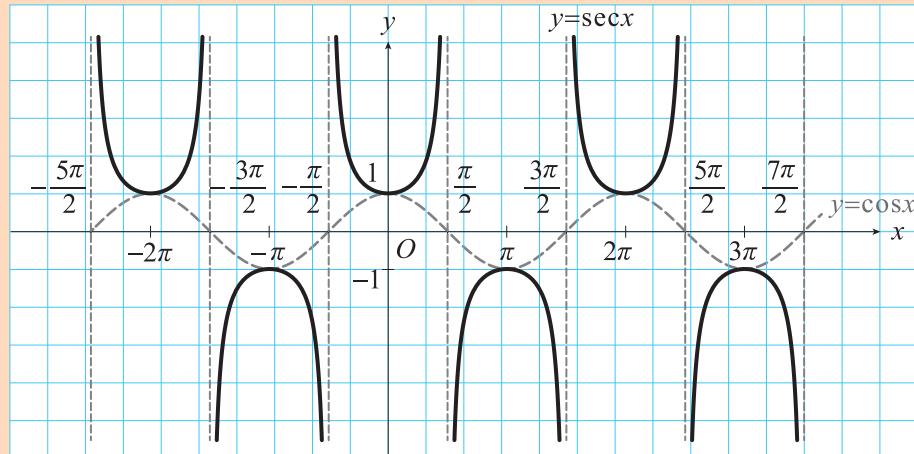
(2) 值域：因為餘切函數的值涵蓋每一個實數，所以其值域為全體實數 \mathbb{R} 。

(3) 週期：由圖形可知其週期為 π 。

(4) 對稱性：由換算公式 $\cot(-x) = \frac{1}{\tan(-x)} = \frac{1}{-\tan x} = -\cot x$ 知其圖形對稱於原點。

單元 2 三角函數的圖形

3. 正割函數 $y = \sec x$ 的圖形與特性：



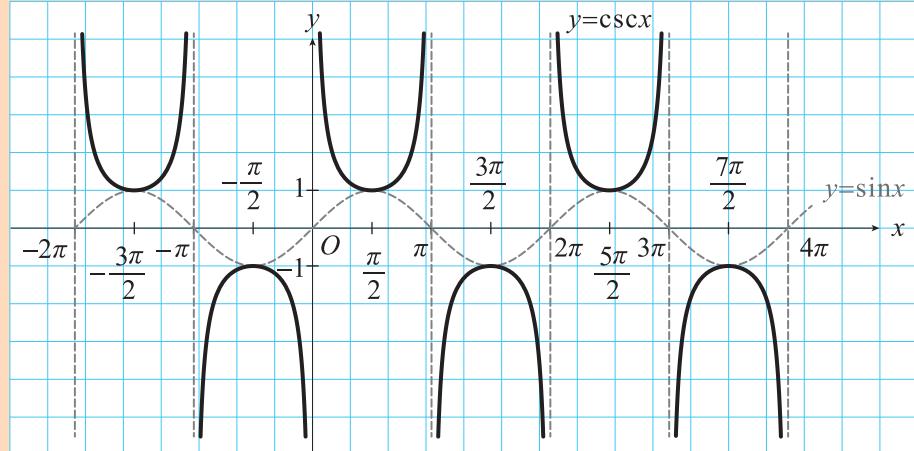
(1) 定義域：正割函數 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 的定義域為 $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(2) 值域：正割函數的值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1 \text{ 或 } y \leq -1\}$ 。

(3) 週期：由圖形知其週期為 2π 。

(4) 對稱性：由換算公式 $\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ 知其圖形對稱於 y 軸。

4. 餘割函數 $y = \csc x$ 的圖形與特性：



(1) 定義域：餘割函數 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 的定義域為 $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 。

(2) 值域：餘割函數的值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1 \text{ 或 } y \leq -1\}$ 。

(3) 週期：由圖形知其週期為 2π 。

(4) 對稱性：由換算公式 $\csc(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-\sin x} = -\csc x$ 知其圖形對稱於原點。



重要精選考題



基礎題

(主：代表本單元對應的主題)

2

1 選出所有正確的選項。

- (1) 函數 $y = \sin x$ 的圖形對稱於原點
- (2) 函數 $y = \sin x$ 與 $y = -\sin x$ 的圖形，對稱於 y 軸
- (3) 函數 $y = \sin x$ 的週期是 π
- (4) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 。

主一

解

2 下列哪些函數的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{3\pi}{5}$ 單位得到？

- (1) $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{5}\right)$
- (2) $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right)$
- (3) $y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{5}\right)$
- (4) $y = \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right)$ 。

主二

解

3 求下列各函數的最大值及最小值。

- (1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。
- (2) $y = \sin x - 3$ 。
- (3) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$ 。

主二

解

4 下列哪些函數的圖形可由 $y = 2\sin x$ 經適當平移後得到？

- (1) $y = \sin 2x$
- (2) $y = 2\cos x$
- (3) $y = \sin x + 2$
- (4) $y = -2\sin x$
- (5) $y = 2\sin x + 3$ 。

主二

解

5 下列哪些三角函數的週期為 π ？

- (1) $y = \sin 2x$
- (2) $y = \sin \frac{1}{2}x$
- (3) $y = \frac{1}{2}\sin x$
- (4) $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$ 。

主二

解



重要精選考題



6 → 求下列各函數的週期、最大值及最小值。

$$(1) y = \sin(-3x)^\circ \quad (2) y = \sin\frac{x}{4}^\circ \quad (3) y = 3\sin\frac{x}{5}^\circ$$

主三

解

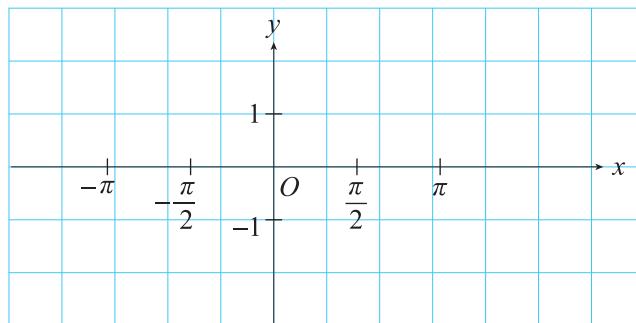
7 → 下列哪些函數與 $y = \sin 5x$ 有相同週期？

$$(1) y = 5\sin x \quad (2) y = \sin 5x - 1 \quad (3) y = \sin(-5x + 2) \quad (4) y = -5\sin x - 3^\circ$$

主四

解

8 → 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 範圍內，畫出函數 $y = \sin 2x$ 與 $y = \cos x$ 的圖形，並求兩者的交點個數。



主三

解

9 → 求方程式 $\tan x = -x$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 範圍內解的個數。

主三

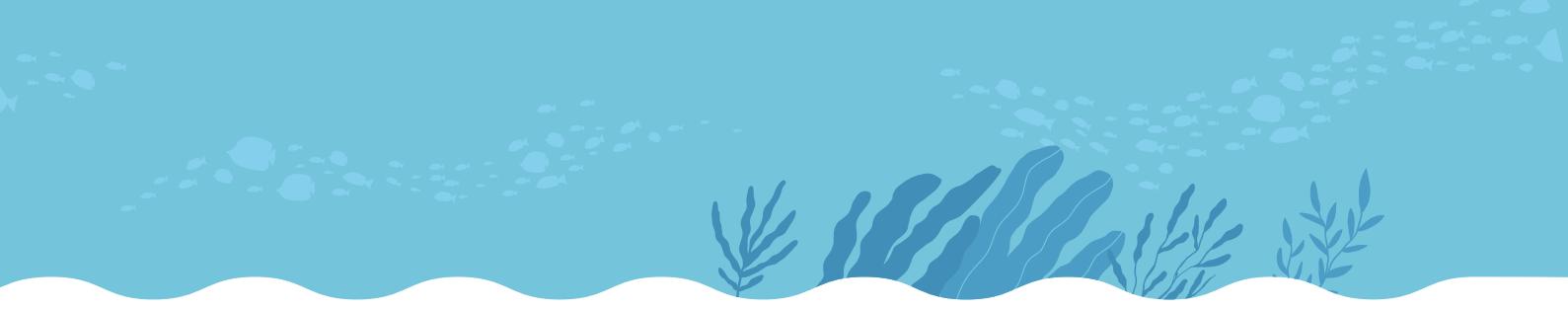
解

10 → 某交流電的電流強度 I (安培) 與時間 t (秒) 可用函數 $I = 100\sin\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$ 表示，求

素 (1)初始 ($t = 0$) 電流。 (2)最大電流。 (3)電流強度變化的週期。

主三

解



進階題

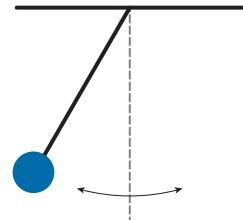
- 1 已知 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ ，求函數 $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos x - 1$ 的最大值與最小值。

解



2

- 2 將長為 a 公分的細繩之一端固定，另一端懸掛一球。當小球來回擺動時，相對於平衡點的位移 y (公分) 與時間 x (秒) 的關係可用函數 $y = 3 \cos\left(\sqrt{\frac{9.8}{a}}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 表示。已知小球擺動的週期為 2 秒，求繩長 a 的近似值。(四捨五入到整數位)



解



- 3 選出所有正確的選項。

(1) $\sin 1 > \sin 1^\circ$ (2) $\cos 1 > \cos 1^\circ$ (3) $\cos 1 > \sin 1^\circ$ (4) $\cos 10 > \sin 10^\circ$ 。

解



- 4 利用函數 $y = \cos x$ 的圖形，在 $0 \leq x < 2\pi$ 範圍內，求滿足不等式 $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 x 之範圍。

解



- 5 令 $a = \sin(\pi^2)$ ，試問下列哪一個選項是對的？

(1) $a = -1$ (2) $-1 < a < -\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2} < a < 0$ (4) $0 < a < \frac{1}{2}$ 。

解





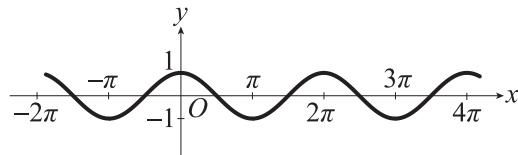
考前衝刺精華



1 → 右圖可以是哪個函數的圖形？

- (1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
 (3) $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ (4) $y = \sin x + 1$ 。

解



【明德高中】



2 → 設 $a > 0$ ，若將函數 $y = \sin(ax + 2) - 3\pi$ 的圖形向右平移 4 單位後，發現會與原圖形重合，則 a 的最小值為 _____ π （請約到最簡分數）。

【高師大附中】

解



3 → 已知函數 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 。則下列選項哪些是正確的？

- (1) $f(0) = \frac{5}{2}$ (2) $f(x)$ 的週期為 π (3) $f(x)$ 的最小值為 -2
 (4) $y = f(x)$ 的圖形對稱 $x - \frac{5\pi}{6} = 0$ 。

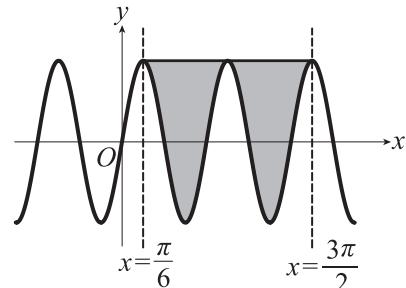
【宜蘭高中】

解



- 4 若 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ，則函數 $y = 2 \sin 3x$ 與直線 $y = 2$ 所圍成的灰色封閉區域之面積為_____。

解



【鳳山高中】

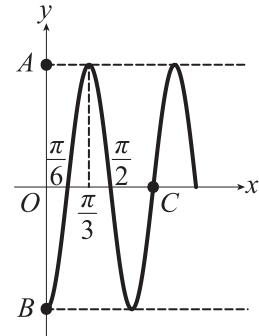


2

- 5 附圖為三角函數 $y = 3 \sin(ax - b)$ 的部分圖形，其中 $a > 0$ ，則下列各項敘述何者正確？

- (1) $B(0, -3)$ (2) $b = \frac{\pi}{6}$ (3) $C\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ (4) y 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$ 。

解



【建國中學】



43



歷屆大考觀摩



1 ➤ 令 $a = \cos(\pi^2)$ ，試問下列哪一個選項是對的？

- (1) $a = -1$ (2) $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ (4) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 。

解

【學測】【答對率 23%】



2 ➤ 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$ ？

- (1) $\sin(2.6\pi)$ (2) $\tan(2.6\pi)$ (3) $\frac{1}{\tan(2.6\pi)}$ (4) $\frac{1}{\cos(2.6\pi)}$ (5) $\frac{1}{\sin(2.6\pi)}$ 。

解

【105 指甲（修）】



3 ➤ 試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \leq \cos x$ ？

- (1) 0 個 (2) 1 個 (3) 2 個 (4) 4 個 (5) 無窮多個。

【106 學測】【答對率 22%】

解

