

2

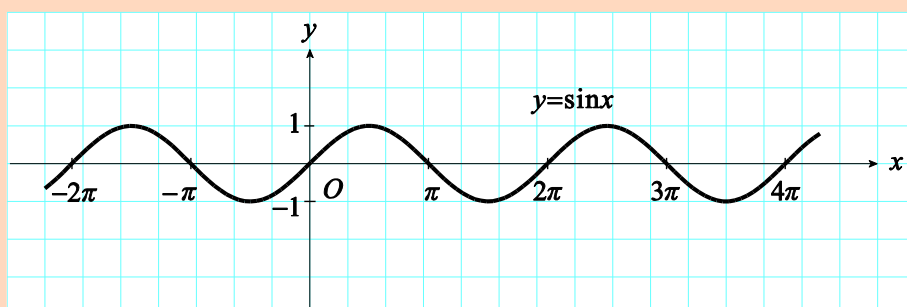
週期性數學模型



主題一 正弦函數的圖形

(搭配課本 P.20 ~ P.24)

1. 三角函數：在各三角比都有定義的情形下，給定一個廣義角 x (徑)， $\sin x$ ， $\cos x$ 與 $\tan x$ 的值都隨之唯一確定；因此它們都是 x 的函數，依序稱為**正弦函數**，**餘弦函數**與**正切函數**。
2. 正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形：



3. 週期函數：當函數 $y = f(x)$ 在 x 軸的方向每隔 p 單位就重複一段相同的圖形時 (即可找到正數 p ，使得 $f(x+p) = f(x)$ 恆成立)，稱函數 $f(x)$ 為**週期函數**。若滿足上述性質的最小正數 p 存在，則稱此週期函數的週期為 p 。
4. 在函數關係中， x 取值的範圍稱作該函數的**定義域**，而其對應值 y 的範圍稱作該函數的**值域**。
5. 正弦函數的特性：
 - (1) 定義域：因為對任意實數 x ， $\sin x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 $\mathbb{R}$ 。
 - (2) 值域：因為正弦函數的值涵蓋每個在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 。
 - (3) 週期：由圖形知其週期為 2π 。
 - (4) 振幅：由圖形發現正弦函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為 1 ；此時稱正弦函數 $y = \sin x$ 的振幅為 1 。
 - (5) 對稱性：
 - ① 觀察正弦函數的圖形，可得圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線 (例如直線 $x = \frac{\pi}{2}$ 或 $x = \frac{3\pi}{2}$)。
 - ② 由換算公式 $\sin(-x) = -\sin x$ 知其圖形對稱於原點。

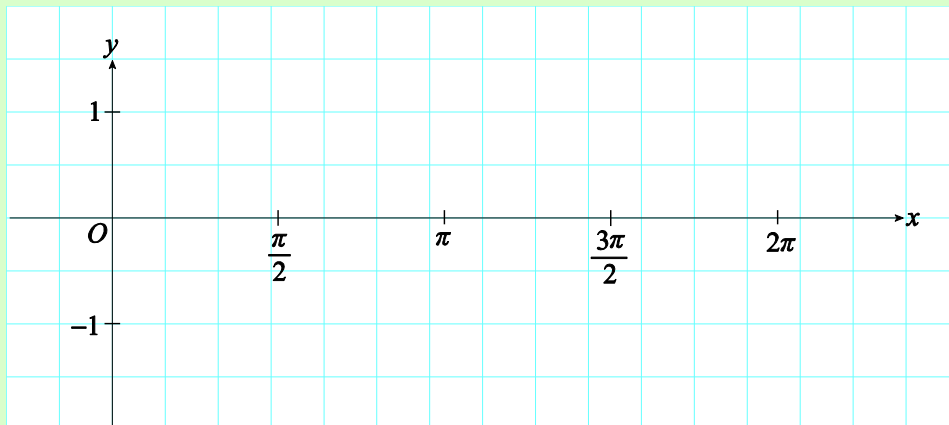
- (6) 頻 率：當自變數 x 的單位為時間時，頻率表示單位時間內事件重複發生的次數，即週期的倒數，常用的單位為赫茲。



例題 1

【配合課本內文】

描繪正弦函數 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形。



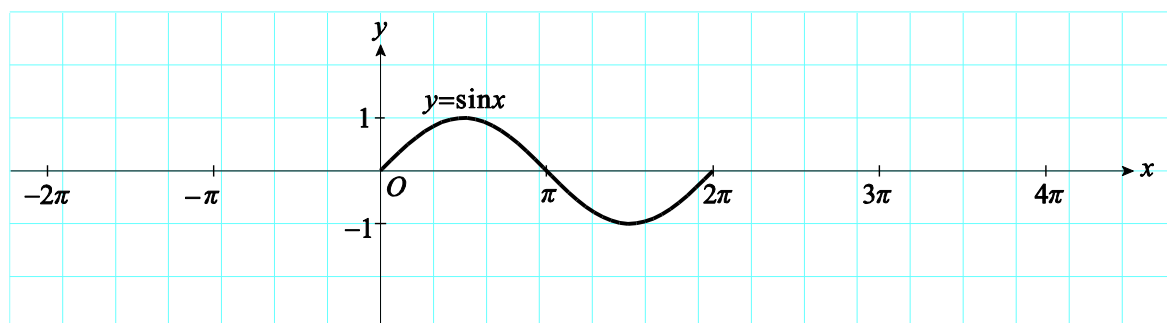
2

解



演練 1

利用 $\sin(2\pi + x) = \sin x$ 與 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形，描繪 $y = \sin x$ 在 $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ 上的圖形。



解



例題 2

【配合課本例 1】

已知 $-\pi \leq x \leq 3\pi$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求滿足 $\sin x < 0$ 的 x 之範圍。

解

 演練 2

已知 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求滿足 $\sin x > 0$ 的 x 之範圍。

解

2



例題 3

【配合課本內文】

(1) 求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

(2) 已知 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

解

 演練 3-1

已知 $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

解

 演練 3-2

已知 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ，觀察 $y = \sin x$ 的圖形，求 $y = \sin x$ 的最大值與最小值。

解

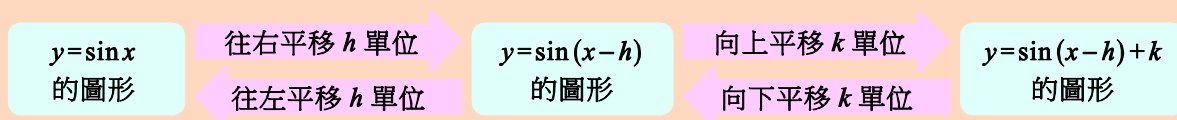


主題二

正弦函數圖形的平移

(搭配課本 P.25 ~ P.31)

1. 關於正弦函數圖形平移的概念，以流程圖表示如下。



說例 (1) 函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，向上平移 2 單位得到。

(2) 函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，向下平移 3 單位得到。

2. 正弦函數圖形平移不改變圖形的週期與振幅，但可能會改變最大值與最小值。

說例 函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + 1$ 的週期為 2π ，振幅為 1，最大值為 $1+1=2$ ，最小值為 $-1+1=0$ 。

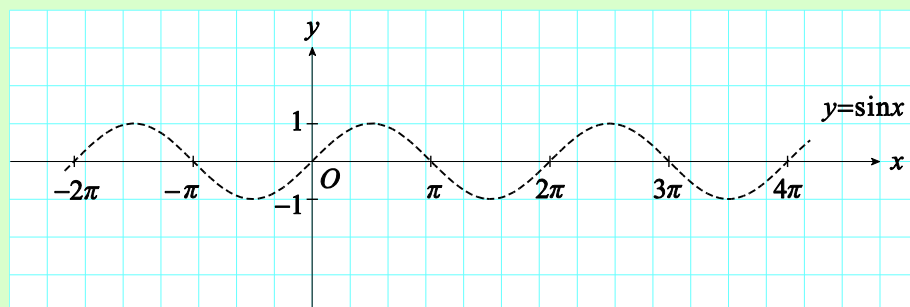


例題 4

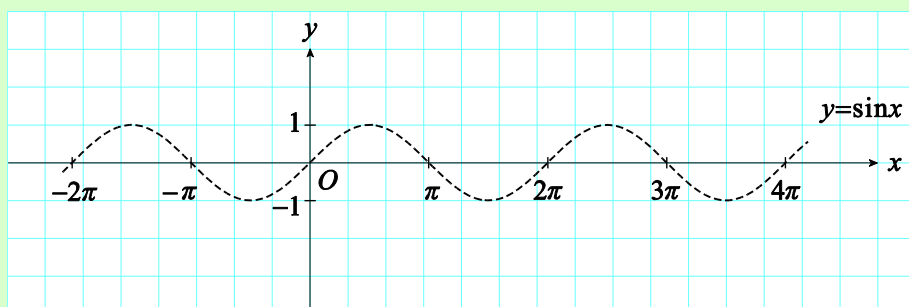
【配合課本例 2】

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = \sin x + 1$ 。



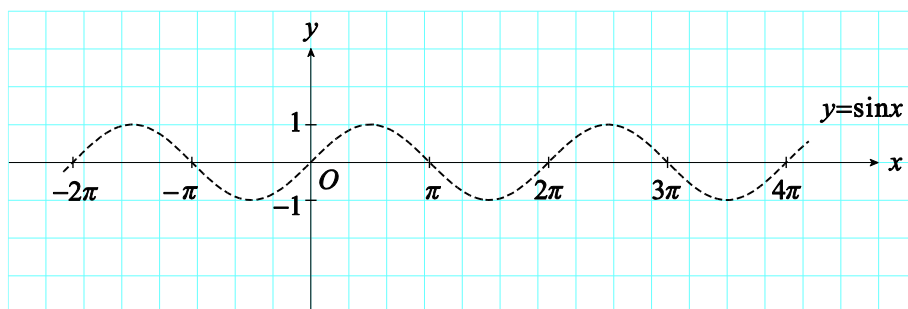
(2) $y = \sin x - \frac{1}{2}$ 。



解

 演練 4-1

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出 $y = \sin x + 2$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



 解

 演練 4-2

下列哪一個選項跟 x 軸有交點？

- (1) $y = \sin x + \frac{1}{3}$ (2) $y = \sin x + 3$ (3) $y = \sin x - \pi$ (4) $y = \sin x - \sqrt{2}$ 。

 解

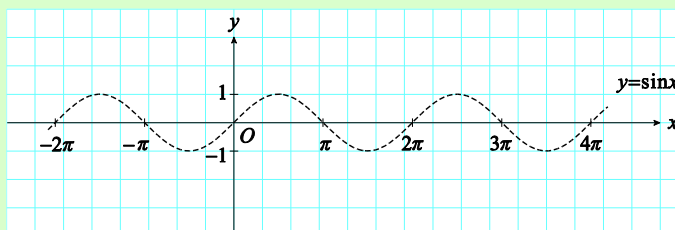


例題 5

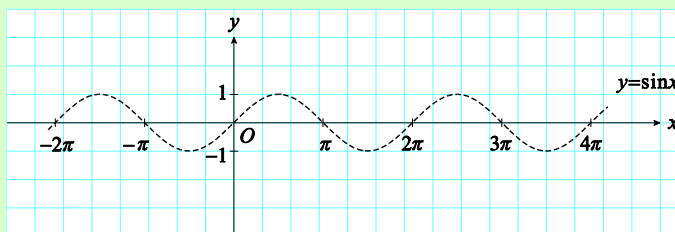
【配合課本例 3】

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。



(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。

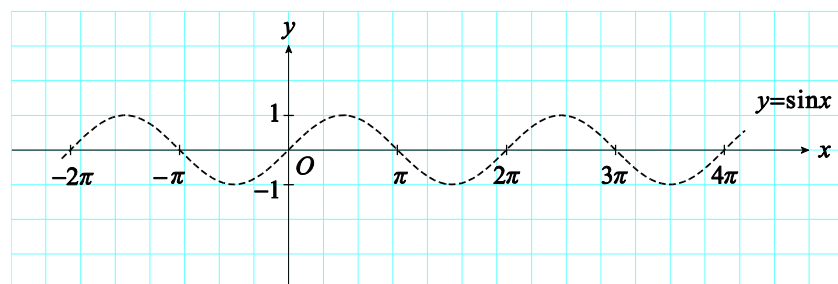


2

解

 演練 5

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



解



例題 6

【配合課本例 4】

將 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位得到 $y = f(x)$ 的圖形，選出所有正確的選項。

- (1) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
 (3) $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)$ (4) $f(x) = \sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right)$ 。

解

 演練 6

將 $y = \sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位得到 $y = f(x)$ 的圖形，選出正確的選項。

- (1) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (2) $f(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
 (3) $f(x) = \sin\left(x - \frac{5\pi}{4}\right)$ (4) $f(x) = \sin\left(x - \frac{7\pi}{4}\right)$ 。

解

2



例題 7

【配合課本例 4】

試問 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形如何由 $y = \sin x$ 的圖形平移得到？

- (1) 往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位 (2) 往右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位 (3) 往左平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位 (4) 往右平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位。

解

 演練 7-1

設函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 h 單位後得到，且 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。

解

 演練 7-2

設函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往左平移 h 單位後得到，且 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。

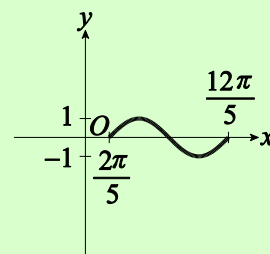
解



例題 8

【配合課本例 6】

已知右圖為 $y = \sin(x + h)$ 一個週期的圖形，其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。



解

 演練 8

若例題 8 的圖為 $y = \sin(x-h)$ 一個週期的圖形，其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。

解

2



主題三

正弦函數圖形的伸縮

(搭配課本 P.32 ~ P.36)

1. 關於正弦函數圖形伸縮的概念，以流程圖表示如下。

$y = \sin x$
的圖形

振幅變為 a 倍 ($a > 0$)

$y = a \sin x$
的圖形

週期變為 $\frac{1}{b}$ 倍 ($b > 0$)

$y = a \sin bx$
的圖形

說例 函數 $y = 2 \sin 3x$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形鉛直伸縮為原來的 2 倍(振幅變為 2)，
水平伸縮為原來的 $\frac{1}{3}$ 倍(週期變為 $\frac{2\pi}{3}$) 後得到。

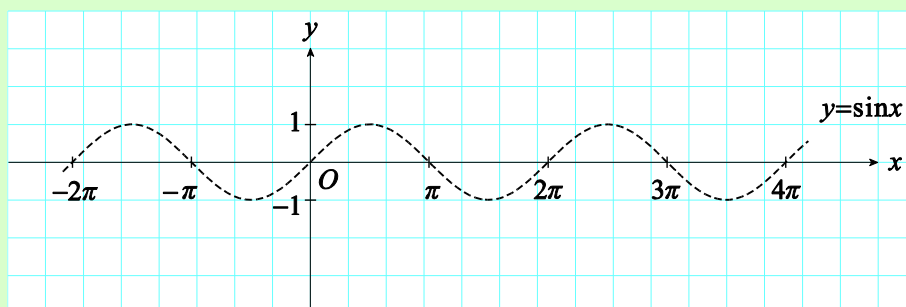


例題 9

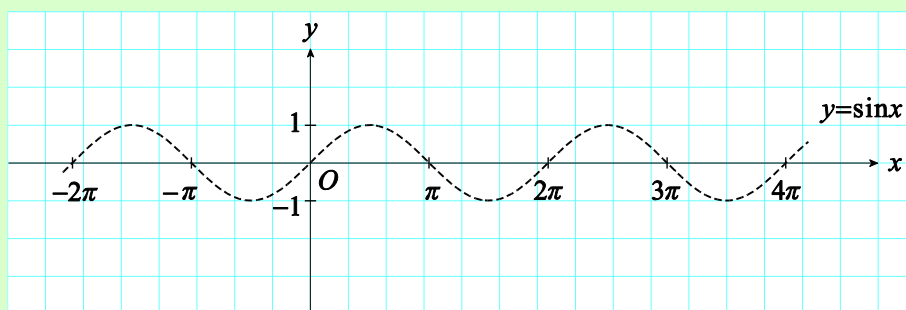
【配合課本例 7】

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = 2 \sin x$ 。



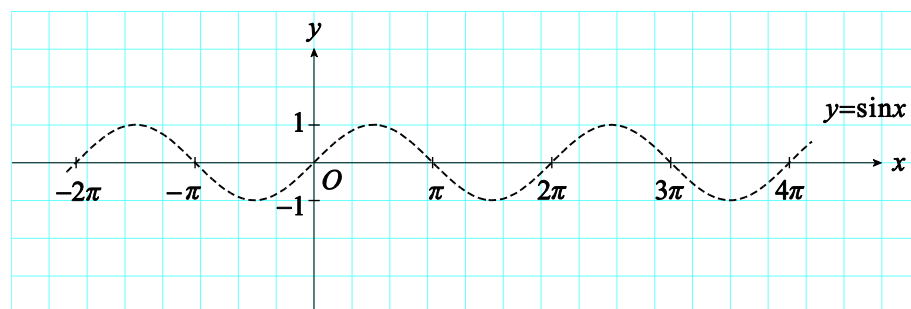
(2) $y = -2 \sin x$ 。



解

 演練 9-1

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出 $y = -\frac{3}{2}\sin x$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



解

2

 演練 9-2

求 $y = \frac{1}{2}\sin x$ 的週期、最大值及最小值。

解

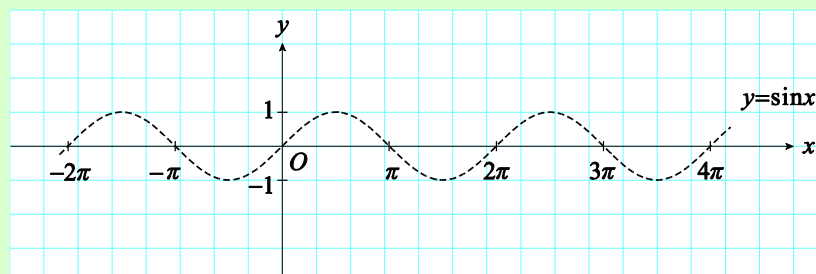


例題 10

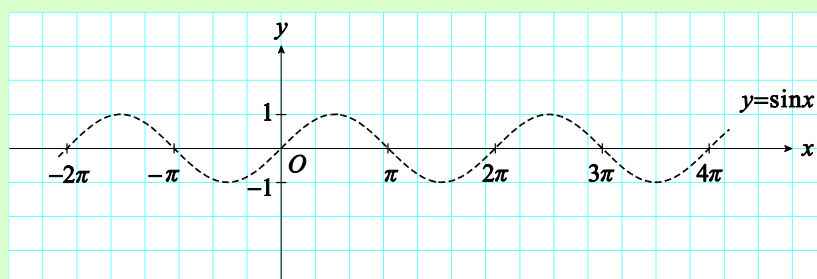
【配合課本例 8】

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = \sin 2x$ 。



(2) $y = \sin \frac{x}{2}$ 。



解

 演練 10-1

求 $y = \sin 3x$ 的週期、最大值及最小值。

解

 演練 10-2

求 $y = \sin \frac{x}{3}$ 的週期、最大值及最小值。

解

2



例題 11

【配合課本例 9】

求 $y = 3\sin\left(-\frac{x}{4}\right)$ 的週期、最大值及最小值。

解

 演練 11

求 $y = -2\sin(-3x)$ 的週期、最大值及最小值。

解



例題 12

【常考題】

已知 $y = a \sin bx$ 的週期為 3π ，求 b 的值。

解



演練 12

已知 $y = a \sin bx$ 的振幅為 7，求 a 的值。

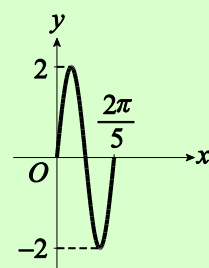
解



例題 13

【配合課本例 10】

已知右圖為 $y = a \sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ，求 a 與 b 的值。

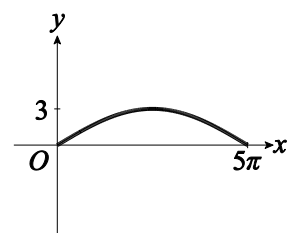


解



演練 13

已知右圖為 $y = a \sin bx$ 半個週期的圖形，其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ，求 a 與 b 的值。



解