1-2 常用的三角比公式

重點整理

一、和角公式與差角公式

對於任意角 α 和 β，有以下公式：

1. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

   例：$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ$。

   例：$\cos81^\circ\cos36^\circ+\sin81^\circ\sin36^\circ=\cos(81^\circ-36^\circ)=\cos45^\circ$。

2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

   例：$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ$。

   例：$\cos21^\circ\cos24^\circ-\sin21^\circ\sin24^\circ=\cos(21^\circ+24^\circ)=\cos45^\circ$。

3. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

   例：$\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin60^\circ\cos45^\circ+\cos60^\circ\sin45^\circ$。

   例：$\sin39^\circ\cos21^\circ+\cos39^\circ\sin21^\circ=\sin(39^\circ+21^\circ)=\sin60^\circ$。

4. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$。

   例：$\sin15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin60^\circ\cos45^\circ-\cos60^\circ\sin45^\circ$。

   例：$\sin75^\circ\cos30^\circ-\cos75^\circ\sin30^\circ=\sin(75^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ$。

5. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$。（其中 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha+\beta)$均有意義）

   例：$\tan75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ}$。

   例：$\dfrac{\tan42^\circ+\tan18^\circ}{1-\tan42^\circ\tan18^\circ}=\tan(42^\circ+18^\circ)=\tan60^\circ$。

6. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$。（其中 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha-\beta)$均有意義）

   例：$\tan15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan45^\circ-\tan30^\circ}{1+\tan45^\circ\tan30^\circ}$。

   例：$\dfrac{\tan60^\circ-\tan45^\circ}{1+\tan60^\circ\tan45^\circ}=\tan(60^\circ-45^\circ)=\tan15^\circ$。

二、二倍角公式

1. $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

   例：$\sin60^\circ=2\sin30^\circ\cos30^\circ$。

   例：$2\sin22.5^\circ\cos22.5^\circ=\sin45^\circ$。

2. $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$。

   例：$\cos120^\circ=\cos^2 60^\circ-\sin^2 60^\circ=2\cos^2 60^\circ-1=1-2\sin^2 60^\circ$。

   例：$\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos30^\circ$。

   例：$2\cos^2 22.5^\circ-1=\cos45^\circ$。

   例：$1-2\sin^2 75^\circ=\cos150^\circ$。

3. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$。（其中 $\tan\theta$、$\tan 2\theta$ 均有意義）

例：$\tan 60^\circ = \dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$。

例：$\dfrac{2\tan 60^\circ}{1-\tan^2 60^\circ} = \tan 120^\circ$。

三、半角公式

底下列出正弦、餘弦的半角公式，等號右邊的正負號由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。

1. $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$。

例：$\sin 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}}$，因為 15° 在第一象限，故取正號。

例：$\sin 210^\circ = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 420^\circ}{2}}$，因為 210° 在第三象限，故取負號。

2. $\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$。

例：$\cos 22.5^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 45^\circ}{2}}$，因為 22.5° 在第一象限，故取正號。

例：$\cos 120^\circ = -\sqrt{\dfrac{1+\cos 240^\circ}{2}}$，因為 120° 在第二象限，故取負號。

例題 1　餘弦的和差角公式

(1) 試用餘弦的差角公式計算 $\cos 15^\circ$。（提示：$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$）（5 分）

(2) 試求 $\cos 23^\circ \cos 22^\circ - \sin 23^\circ \sin 22^\circ$ 之值。（5 分）

解

例題 2　正弦的和差角公式

(1) 試用正弦的和角公式計算 $\sin 105^\circ$。（提示：$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$）（5 分）

(2) 試求 $\sin 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 71^\circ \sin 41^\circ$ 之值。（5 分）

解

例題 3　正餘弦和差角公式的應用

已知 α，β 均為銳角，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{5}{13}$，試求：

(1) $\sin(\alpha + \beta)$。（5 分）

(2) $\cos(\alpha - \beta)$。（5 分）

解

例題 4 正切的和差角公式

已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，試求：

(1) $\tan(\alpha+\beta)$。（5 分）　　(2) $\tan(\alpha-\beta)$。（5 分）

解

例題 5 正切差角公式的應用

試求 $(1+\tan 70^\circ)(1-\tan 25^\circ)$ 之值。（10 分）

解

例題 6 計算兩直線夾角（使用計算機）

試求兩直線 L_1：$3x+y-4=0$ 與 L_2：$5x-y+7=0$ 的夾角。（四捨五入至小數點後第二位）（10 分）

解

例題 7　正弦、餘弦的平方關係與二倍角公式

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，若 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{5}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。（10 分）

解

例題 8　二倍角公式

(1) 已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，試求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\tan 2\theta$。（各 2 分）

(2) 已知 $90^\circ < \theta < 180^\circ$，且 $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，試求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$。（各 2 分）

解

例題 9 半角公式

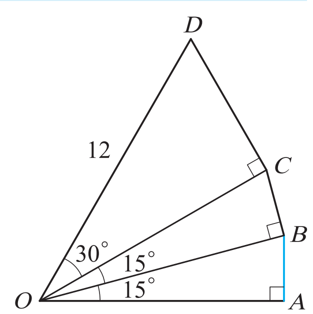
⑴ 已知 θ 是銳角，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試用半角公式計算 $\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}$。（各 2 分）

⑵ 設 $180^\circ<\theta<270^\circ$，且 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，試求 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 及 $\cos\dfrac{\theta}{2}$。（各 2 分）

解

例題 10 二倍角公式綜合應用

如右圖，$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$ 都是直角三角形，$\angle AOB=15^\circ$，$\angle BOC=15^\circ$，$\angle COD=30^\circ$，$\overline{OD}=12$，試求 $\overline{AB}$ 長。（10 分）



解