

第三章 圓與球

3-1 圓的方程式

一、圓的方程式：

定義：平面上，和一個定點 M 等距離的所有點所成的圖形稱為一個圓。

這個定點 M 叫做圓心，圓心和圓上一點的距離叫做半徑。

1. 標準式：

以 $M(h, k)$ 為圓心， r 為半徑的圓方程式為 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 。

【證明】：若 $P(x, y)$ 是圓 C 上任意一點，則因為 $\overline{PM} = r$ ，依距離公式可得

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \quad \text{整理得} \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

2. 一般式：

將圓的標準式 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 展開，可得形如 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

的方程式，我們稱之為圓的一般式。

注意： x^2 與 y^2 的係數相同，並無 xy 項。

【討論】：將方程式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，配方得

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(d^2 + e^2 - 4f).$$

令 $D = d^2 + e^2 - 4f$ ，可判斷圖形：

(1) 當 $D > 0$ 時，代表一圓，圓心為 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ ，半徑為 $\frac{\sqrt{D}}{2}$ 。

(2) 當 $D = 0$ 時，代表一點 $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ 。

(3) 當 $D < 0$ 時，沒有圖形。

3. 參數式：

利用 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，將圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 的 x, y 寫成參數式：

$$\begin{cases} x-h = r \cos \theta, \\ y-k = r \sin \theta, \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi).$$

利用參數式可解決一些關於圓的極值問題。

【例 1】求符合下列條件的圓方程式：

- (1) 以點 $(0, 0)$ 爲圓心，半徑爲 4 的圓，
- (2) 以點 $(2, -3)$ 爲圓心，半徑爲 2 的圓。

【例 2】將下列方程式化成 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = l$ 的形式，並說明它所表示的圖形。

- (1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
- (2) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.
- (3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17 = 0$.

【例 3】求下列以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓方程式。

- (1) $A(4, 9), B(6, 3)$,
- (2) $A(2, 3), B(5, -1)$,

【例 4】求下列各圓的圓心和半徑：

- (1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$,
- (2) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$,
- (3) $9x^2 + 9y^2 - 6x - 35 = 0$.