

2-1

二次方根的意義

1. 根號

- 面積為 a 的正方形，其邊長記為 \sqrt{a} 。
- 若 $a > 0$ ，則 $(\sqrt{a})^2 = a$ 。
- 若 $a、b$ 為正數，且 $a > b$ ，則 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

1類題

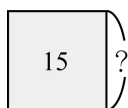
配合課本 P54
隨堂練習

認識根號

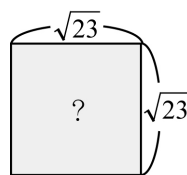
配合課本 P54
隨堂練習

熟練

正方形面積為 15，則其邊長可記為 $\sqrt{15}$ 。



邊長為 $\sqrt{23}$ 的正方形，其面積為 23。



2類題

配合課本 P55
例題 1

\sqrt{a} 的平方

配合課本 P55
隨堂練習

熟練

計算下列各數：

(1) $(\sqrt{22})^2$ (2) $(\sqrt{\frac{6}{5}})^2$

解

(1) $(\sqrt{22})^2 = 22$ (2) $(\sqrt{\frac{6}{5}})^2 = \frac{6}{5}$

若甲數 > 0 ，且 $(\text{甲數})^2 = 5$ ，則甲數可記為多少？

解

$(\text{甲數})^2 = 5$ ，又甲數 > 0 ，故甲數 $= \sqrt{5}$ 。

3類題

配合課本 P56
例題 2

比較大小

配合課本 P56
隨堂練習

熟練

比較 15、 $\sqrt{201}$ 、 $\sqrt{399}$ 三數的大小。

解

$15^2 = 225$

$(\sqrt{201})^2 = 201$

$(\sqrt{399})^2 = 399$

因為 $399 > 225 > 201$ ，且 15、 $\sqrt{201}$ 、 $\sqrt{399}$ 均為正數，所以 $\sqrt{399} > 15 > \sqrt{201}$ 。

比較下列各小題中的大小關係：(填入 $>$ 或 $<$)

(1) 3 $>$ $\sqrt{7}$

(2) 2.2 $<$ $\sqrt{5}$ $<$ 2.3

解

(1) 因為 $3^2 = 9$ ， $(\sqrt{7})^2 = 7$ ，所以 $3 > \sqrt{7}$ 。

(2) 因為 $2.2^2 = 4.84$ ， $(\sqrt{5})^2 = 5$ ， $2.3^2 = 5.29$ ，所以 $2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ 。

即時演練

1. $(\sqrt{12})^2 =$ 12。

2. 若 $a > 0$ ，且 $a^2 = 8$ ，則 a 可記為 $\sqrt{8}$ 。

3. 13、 $\sqrt{170}$ 、 $\sqrt{187}$ 三數的大小關係為 $\sqrt{187} > \sqrt{170} > 13$ 。

2. $\sqrt{a^2}$ 的值

若 $a > 0$ ，則 $\sqrt{a^2} = a$ 。

1類題

配合課本 P58

例題 3

求 $\sqrt{a^2}$ 的值

配合課本 P58

隨堂練習

熟練

計算下列各數：

(1) $\sqrt{6^2}$

(2) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

解

(1) $\sqrt{6^2} = 6$

(2) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

計算下列各數：

(1) $\sqrt{(0.5)^2}$

(2) $\sqrt{81}$

解

(1) $\sqrt{(0.5)^2} = 0.5$

(2) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

2類題

配合課本 P59

隨堂練習

根號內為完全平方數

配合課本 P59

隨堂練習

熟練

計算下列各數：

(1) $\sqrt{144}$

(2) $\sqrt{400}$

解

(1) $\sqrt{144} = \sqrt{(12)^2} = 12$

(2) $\sqrt{400} = \sqrt{(20)^2} = 20$

餐桌上有一張方格圖案的正方形桌巾，它是由 144 個邊長為 2 的正方形組成，這個桌巾的邊長是多少？

解

每邊由 $\sqrt{144} = 12$ 個方格組成，
所以邊長為 $12 \times 2 = 24$ 。

3類題

配合課本 P60

例題 4

利用質因數分解求 $\sqrt{a^2}$ 的值

配合課本 P60

隨堂練習

熟練

計算下列各數：

(1) $\sqrt{441}$

(2) $\sqrt{2.25}$

解

(1) $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = \sqrt{(3 \times 7)^2} = 21$

(2) $\sqrt{2.25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \sqrt{\frac{3^2 \times 5^2}{2^2 \times 5^2}} = \sqrt{\left(\frac{3 \times 5}{2 \times 5}\right)^2}$
 $= \sqrt{\left(\frac{15}{10}\right)^2} = \frac{15}{10} = 1.5$

計算下列各數：

(1) $\sqrt{484}$

(2) $\sqrt{2^2 \times 5^4 \times 11^2}$

解

(1) $\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \times 11^2} = \sqrt{(2 \times 11)^2} = 22$

(2) $\sqrt{2^2 \times 5^4 \times 11^2} = \sqrt{(2 \times 5^2 \times 11)^2}$
 $= \sqrt{550^2} = 550$

3. \sqrt{a} 的近似值

將適當區間十等分，以其中兩相鄰的等分點來逼近 \sqrt{a} 的近似值，稱為十分逼近法。

1 類題

配合課本 P63
例題 5

十分逼近法求近似值

配合課本 P63
隨堂練習

熟練

利用十分逼近法求 $\sqrt{8}$ 的近似值，並以四捨五入法求到小數點後第一位。

解

(1) 因為 $2^2=4$ ， $3^2=9$ ，所以 $2 < \sqrt{8} < 3$ 。

(2) 因為 $(2.8)^2=7.84$ ， $(2.9)^2=8.41$ ，

所以 $2.8 < \sqrt{8} < 2.9$ 。

(3) 因為 $(2.85)^2=8.1225 > 8$ ，

所以 $2.8 < \sqrt{8} < 2.85$ ，

故 $\sqrt{8} \doteq 2.8$ 。

依下列各小題所提供的數據，按步驟回答下列問題，並求 $\sqrt{10}$ 的近似值到小數點後第一位。

(1) 因為 $2^2=4$ ， $3^2=9$ ， $4^2=16$ ，所以 $\sqrt{10}$ 在哪兩個連續整數之間？

答：3 $< \sqrt{10} <$ 4。

(2) 因為 $(3.1)^2=9.61$ ， $(3.2)^2=10.24$ ，所以 $\sqrt{10}$ 在哪兩個連續一位小數之間？

答：3.1 $< \sqrt{10} <$ 3.2。

(3) 根據 $(3.15)^2=9.9225$ ，比較 $\sqrt{10}$ 和 3.15 的大小關係。(填 $>$ 或 $<$)

答： $\sqrt{10}$ $>$ 3.15。

(4) 以四捨五入法求 $\sqrt{10}$ 的近似值到小數點後第一位，得 $\sqrt{10} \doteq$ 3.2。

2 類題

配合課本 P64
隨堂練習

利用計算機求根號的值

配合課本 P64
隨堂練習

熟練

利用計算機計算，並回答下列各題：

(1) 求 $\sqrt{57.76}$ 的值。

(2) $\sqrt{678}$ 的整數部分是多少呢？

(3) 比較 $\sqrt{276}$ 與 $\sqrt{267}$ 的大小。

解

(1) 7.6

(2) 整數部分為 26

(3) $\sqrt{276} > \sqrt{267}$

利用計算機計算，並回答下列各題：

(1) 求 $\sqrt{44.89}$ 的值。

(2) $\sqrt{777}$ 的整數部分是多少呢？

(3) 比較 $\sqrt{178}$ 與 $\sqrt{187}$ 的大小。

解

(1) 6.7

(2) 整數部分為 27

(3) $\sqrt{178} < \sqrt{187}$

即時演練

1. 計算下列各數：

(1) $\sqrt{(16)^2} =$ 16

(2) $\sqrt{676} =$ 26

2. 以十分逼近法求 $\sqrt{6}$ 的近似值為 2.4。(四捨五入法求到小數點後第一位)

4. 平方根的意義

1. 當 $a \geq 0$ ，若 $b^2 = a$ ，則稱 b 是 a 的平方根。
2. 每一個正數 a 都有兩個平方根 $\pm\sqrt{a}$ ，這兩個平方根互為相反數；而 0 的平方根為 0。

1 類題

配合課本 P65
隨堂練習

判別平方根

配合課本 P65
隨堂練習

熟練

1. 13 是否為 169 的平方根？
2. -13 是否為 169 的平方根？

解

1. $13^2 = 169$ ，所以 13 是 169 的正平方根。
2. $(-13)^2 = 169$ ，所以 -13 是 169 的負平方根。

1. 21 是否為 441 的平方根？
2. -21 是否為 441 的平方根？

解

1. $21^2 = 441$ ，所以 21 是 441 的正平方根。
2. $(-21)^2 = 441$ ，所以 -21 是 441 的負平方根。

2 類題

配合課本 P66
例題 6

求平方根

配合課本 P66
隨堂練習

熟練

求下列各數的平方根：

- (1) 729
- (2) $\frac{25}{784}$

解

- (1) 729 的平方根為 $\sqrt{729}$ 和 $-\sqrt{729}$ ，
 $\pm\sqrt{729} = \pm\sqrt{(27)^2} = \pm 27$ ，
所以 729 的平方根為 ± 27 。
- (2) $\frac{25}{784}$ 的平方根為 $\sqrt{\frac{25}{784}}$ 和 $-\sqrt{\frac{25}{784}}$ ，
 $\pm\sqrt{\frac{25}{784}} = \pm\sqrt{\left(\frac{5}{28}\right)^2} = \pm\frac{5}{28}$ ，
所以 $\frac{25}{784}$ 的平方根為 $\pm\frac{5}{28}$ 。

求下列各數的平方根：

- (1) $5\frac{4}{9}$
- (2) 3.24

解

- (1) $5\frac{4}{9}$ 的平方根為 $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ 和 $-\sqrt{5\frac{4}{9}}$ ，
 $\pm\sqrt{5\frac{4}{9}} = \pm\sqrt{\frac{49}{9}} = \pm\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \pm\frac{7}{3}$ 。
- (2) 3.24 的平方根為 $\sqrt{3.24}$ 和 $-\sqrt{3.24}$ ，
 $\pm\sqrt{3.24} = \pm\sqrt{\frac{324}{100}} = \pm\sqrt{\left(\frac{2 \times 3^2}{2 \times 5}\right)^2} = \pm 1.8$ ，
所以 3.24 的平方根為 ± 1.8 。

3 類題

配合課本 P67
例題 7

平方根的應用

配合課本 P67
隨堂練習

熟練

1. 若 7 是 a 的正平方根，則 $a = ?$
2. 若 -5 是 $3x - 8$ 的負平方根，則 $x = ?$

解

1. $a = 7^2 = 49$
2. $3x - 8 = (-5)^2$
 $3x - 8 = 25$
 $3x = 33, x = 11$

若 3 和 -3 都是 $4x + 1$ 的平方根，求 x 的值。

解

$$\begin{aligned}4x + 1 &= (-3)^2 \\4x + 1 &= 9 \\4x &= 8 \\x &= 2\end{aligned}$$

2-1 自我磨練

配合課本 P69~70 自我評量

1. 在下列空格中填入適當的數：

$$(1) (\sqrt{6})^2 = \underline{6} \quad (2) (-\sqrt{13})^2 = \underline{13} \quad (3) (\sqrt{3.9})^2 = \underline{3.9}$$

$$(4) (-\sqrt{\frac{5}{12}})^2 = \underline{\frac{5}{12}} \quad (5) (\sqrt{\frac{14}{3}})^2 = \underline{\frac{14}{3}} \quad (6) (\sqrt{10\frac{2}{7}})^2 = \underline{10\frac{2}{7}}$$

2. 計算下列各數：

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{144} &= \sqrt{2^4 \times 3^2} \\ &= \sqrt{(2^2 \times 3)^2} = 12 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \sqrt{361} &= \sqrt{19^2} \\ &= 19 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (3) \sqrt{22500} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^4} \\ &= \sqrt{(2 \times 3 \times 5^2)^2} = 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{\frac{49}{81}} &= \sqrt{\frac{7^2}{3^4}} \\ &= \sqrt{(\frac{7}{3^2})^2} = \frac{7}{9} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (5) \sqrt{\frac{256}{1089}} &= \sqrt{\frac{2^8}{3^2 \times 11^2}} \\ &= \sqrt{(\frac{2^4}{3 \times 11})^2} = \frac{16}{33} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (6) \sqrt{7\frac{9}{16}} &= \sqrt{\frac{121}{16}} \\ &= \sqrt{(\frac{11}{4})^2} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \sqrt{3.24} &= \sqrt{\frac{324}{100}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 3^4}{2^2 \times 5^2}} \\ &= \sqrt{(\frac{2 \times 3^2}{2 \times 5})^2} = \frac{9}{5} = 1.8 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (8) \sqrt{12.25} &= \sqrt{\frac{1225}{100}} = \sqrt{\frac{5^2 \times 7^2}{2^2 \times 5^2}} \\ &= \sqrt{(\frac{5 \times 7}{2 \times 5})^2} = \frac{7}{2} = 3.5 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (9) \sqrt{23.04} &= \sqrt{\frac{2304}{100}} = \sqrt{\frac{2^8 \times 3^2}{2^2 \times 5^2}} \\ &= \sqrt{(\frac{2^4 \times 3}{2 \times 5})^2} = \frac{24}{5} = 4.8 \end{aligned}$$

3. 已知一個正方形花圃面積為 57600 平方公尺，求其邊長。

正方形花圃面積為 57600

$$\text{邊長為 } \sqrt{57600} = \sqrt{2^8 \times 3^2 \times 5^2} = \sqrt{(2^4 \times 3 \times 5)^2} = 240 \text{ (公尺)}$$

4. 利用計算機算出下列各數的值或近似值。(若該值為近似值，則以四捨五入取到小數點後第一位)

$$(1) \sqrt{320} \approx \underline{17.9} \quad (2) \sqrt{1444} = \underline{38} \quad (3) \sqrt{888} \approx \underline{29.8}$$

5. 求下列各數的平方根：

(1) 85

85 的平方根為 $\sqrt{85}$ 和 $-\sqrt{85}$ ，
合併記為 $\pm\sqrt{85}$ 。

(2) 49

49 的平方根為 $\sqrt{49}$ 和 $-\sqrt{49}$ ，
 $\pm\sqrt{49} = \pm\sqrt{7^2} = \pm 7$ ，
所以 49 的平方根為 ± 7 。

(3) 169

169 的平方根為 $\sqrt{169}$ 和 $-\sqrt{169}$ ，
 $\pm\sqrt{169} = \pm\sqrt{13^2} = \pm 13$ ，
所以 169 的平方根為 ± 13 。

(4) 12.96

12.96 的平方根為 $\sqrt{12.96}$ 和 $-\sqrt{12.96}$ ，
 $\pm\sqrt{12.96} = \pm\sqrt{\frac{1296}{100}} = \pm\sqrt{\left(\frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 5}\right)^2}$
 $= \pm 3.6$ ，
所以 12.96 的平方根為 ± 3.6 。

(5) 1764

1764 的平方根為 $\sqrt{1764}$ 和 $-\sqrt{1764}$ ，
 $\pm\sqrt{1764} = \pm\sqrt{(2 \times 3 \times 7)^2} = \pm 42$ ，
所以 1764 的平方根為 ± 42 。

(6) $3\frac{33}{64}$

$3\frac{33}{64}$ 的平方根為 $\sqrt{3\frac{33}{64}}$ 和 $-\sqrt{3\frac{33}{64}}$ ，
 $\pm\sqrt{3\frac{33}{64}} = \pm\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = \pm\frac{15}{8}$ ，
所以 $3\frac{33}{64}$ 的平方根為 $\pm\frac{15}{8}$ 。

6. (1) 若 $x^2=64$ ，則 $x=?$

$$x^2=64$$
$$x = \pm\sqrt{64}$$
$$x = \pm 8$$

(2) 若 $m^2=0.81$ ，且 $m < 0$ ，則 $m=?$

$$m^2=0.81$$
$$m = \pm\sqrt{0.81} = \pm 0.9$$

又 $m < 0$ ，所以 $m = -0.9$ 。

7. 依下列各小題所提供的數據，按步驟回答問題，並求 $\sqrt{14}$ 的近似值到小數點後第一位。

(1) 因為 $1^2=1$ ， $2^2=4$ ， $3^2=9$ ， $4^2=16$ ，所以 $\sqrt{14}$ 在哪兩個連續整數之間？

答： 3 $< \sqrt{14} <$ 4 。

(2) 因為 $(3.5)^2=12.25$ ， $(3.6)^2=12.96$ ， $(3.7)^2=13.69$ ， $(3.8)^2=14.44$ ，所以 $\sqrt{14}$ 在哪兩個連續一位小數之間？

答： 3.7 $< \sqrt{14} <$ 3.8 。

(3) $(3.75)^2=14.0625$ ，比較 $\sqrt{14}$ 和 3.75 的大小關係。(填 $>$ 或 $<$)

答： $\sqrt{14}$ $<$ 3.75 。

(4) 以四捨五入法求 $\sqrt{14}$ 的近似值到小數點後第一位，得 $\sqrt{14} \doteq$ 3.7 。