

1

整數運算與科學記號

1-1 數與數線

1-2 整數的加減運算

1-3 整數的乘除運算

1-4 指數記法與科學記號





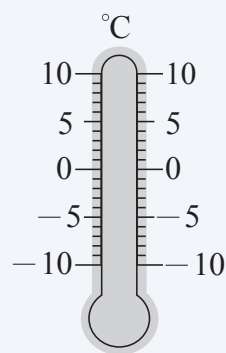
學完本章內容後，
依霖的問題就可以解決囉！



溫故啟思

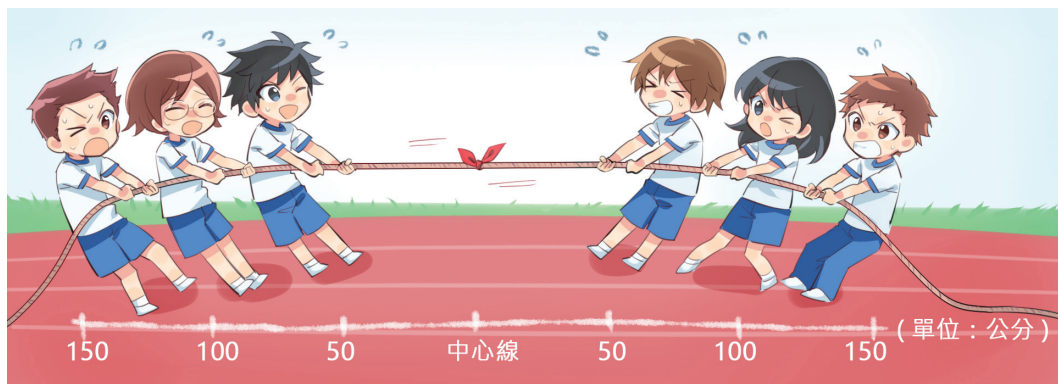
據氣象報告玉山今天白天的最高溫度為攝氏 3 度，不過明天寒流來襲，溫度驟降，玉山白天的最高溫估計下降 8 度。

- (1) 請在右圖的溫度計圖形上標出 3 度的位置。
- (2) 按照氣象新聞所說，玉山明天的最高溫估計為攝氏零下 _____ 度。



1 正數與負數

小新班上參加學校的拔河比賽，場地布置如下圖：



準備就位時拔河繩上綁的紅絲帶停止在中心線的地方，小新班上在中心線的右方。比賽開始後不久，紅絲帶被對方拉到中心線左方 20 公分處，不過在比賽結束的哨聲響起時，紅絲帶在中心線右方 60 公分處。

生活中有很多像左右這種有著相反意義的量，例如獲利與虧損、上升與下降，要怎麼用符號簡單地表示兩個相反意義的量呢？事實上數學裡就有「+」、「-」這兩個符號表示相反的數量。

在上述的例子中，我們可用中心線為基準點，在基準點右邊 20 公分以「+20」（讀作正 20）公分表示，在基準點左邊 20 公分以「-20」（讀作負 20）公分表示。最後紅絲帶在基準點右邊 60 公分，表示成「+60」公分。

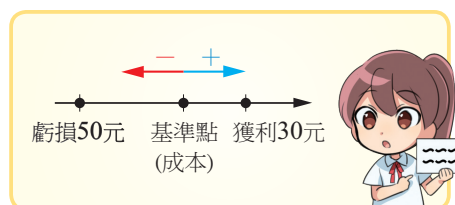


兩個有相反意義的數量，皆可以「+」、「-」來分別表示。

例 1 用 +、- 表示相反意義的量

若以成本金額為基準點，將獲利以「+」表示，虧損以「-」表示，那麼獲利 30 元該如何表示？虧損 50 元該如何表示？

解 將獲利以「+」表示，虧損以「-」表示，
因此獲利 30 元表示成 +30 元；
虧損 50 元表示成 -50 元。



隨堂練習

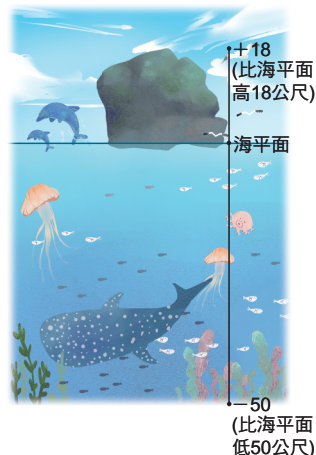
將下列相反意義的量，以「+」、「-」表示：

- (1) 若以攝氏 0 度為基準點，攝氏 10 度表示成 +10 度，那麼零下 3 度該如何表示？
- (2) 若以海平面為基準點，墾丁大灣海水的深度 50 公尺表示成 -50 公尺，那麼海拔 18 公尺的船帆石高度該如何表示？



以 $+$ 、 $-$ 表示相反意義的量時，通常「 $+$ 」可以省略不寫，如上述的 $+30$ 元，可記為 30 元，「 $+$ 」符號即省略。

從隨堂練習的例子可知，若我們以海平面為基準（高度為 0 公尺），比海平面高的高山高度可用「 $+$ 」來表示，比海平面低的海水深度可用「 $-$ 」來表示。



例 2 比 0 小的數

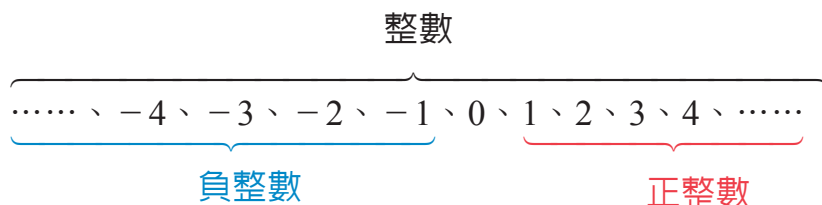
若以「 $+$ 」表示比 0 大的數，以「 $-$ 」表示比 0 小的數，即比 0 大 2 的數表示成 $+2$ ，那麼比 0 小 3 的數該如何表示？

解 若以「 $+$ 」表示比 0 大的數，那麼比 0 小的數以「 $-$ 」表示，因此將比 0 小 3 的數表示成 -3 。

隨堂練習

- 1 若比 0 大 12 的數表示成 $+12$ ，那麼比 0 小 12 的數表示成 _____。
- 2 若比 0 小 6 的數表示成 -6 ，那麼比 0 大 6 的數表示成 _____。
- 3 若比 0 小 2 的數表示成 -2 ，那麼 -8 表示比 0 小 _____。

在所有的數字中，我們將比 0 大的數稱為**正數**，例如 1、2、8、 $10\frac{1}{2}$ 、13.6、……，其中像 1、2、3、4、……這樣的數稱為**正整數**，也稱為**自然數**。比 0 小的數稱為**負數**，例如 -1、-2、 $-7\frac{3}{4}$ 、-10.13、……，其中像 -1、-2、-3、-4、……這樣的數稱為**負整數**。而 0 不是正數也不是負數，我們將負整數、0、正整數合起來稱為**整數**。



當我們用「+」、「-」區分正負數時，

- ① 數字前面的符號稱為**性質符號**，分別念作「正」、「負」，例如 +5 或 -3。
- ② 性質符號相同的數稱為**同號數**，例如 5 與 8，-3 與 -8。
- ③ 性質符號相異的數稱為**異號數**，例如 5 與 -3。

但是當「+」、「-」用來表示運算時，稱為**運算符號**，分別念作「加」、「減」，例如「5+3」、「5-3」。

隨堂練習

下列哪些數是正數？哪些數是負數？

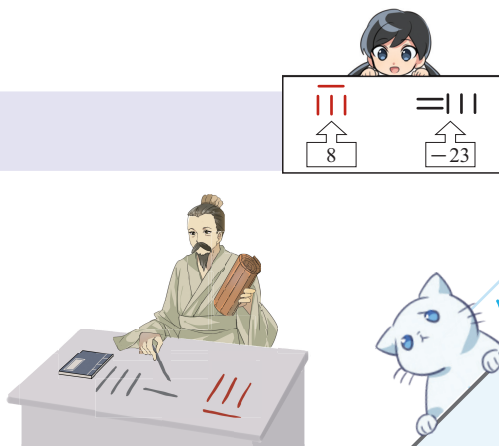
4、13、-7.5、0、112、 $-8\frac{2}{3}$



數養時光機

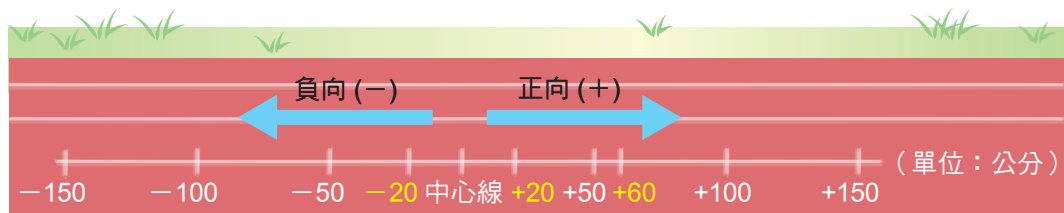
算籌

中國古代用算籌（形狀像小竹棍）的擺放來表示數與進行數的計算。用算籌表示正負的方式，其中一種以顏色區分，紅色代表正數，黑色代表負數。



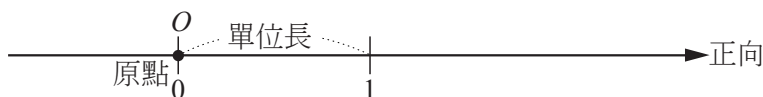
2 數線與數的大小

在前面的例子中，相反意義的數量除了以 $+$ 、 $-$ 表示之外，還可以在圖形上利用方向來區分，譬如拔河比賽的例子。



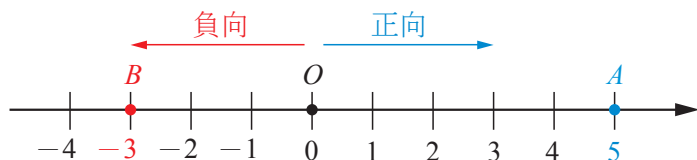
仿照同樣的方法，我們也可以將數字表示在圖形上：

- 1 在一條直線上任取一點當基準點，用來表示「0」這個數字，稱此點為**原點**，通常記作 O 點。
- 2 在原點的右邊以箭頭所指方向為**正向**，與箭頭相反方向為**負向**。
- 3 選一個適當的長度當**單位長**，在正向方向與 O 點相距 1 個單位長的地方表示「1」這個數字。如下圖所示：



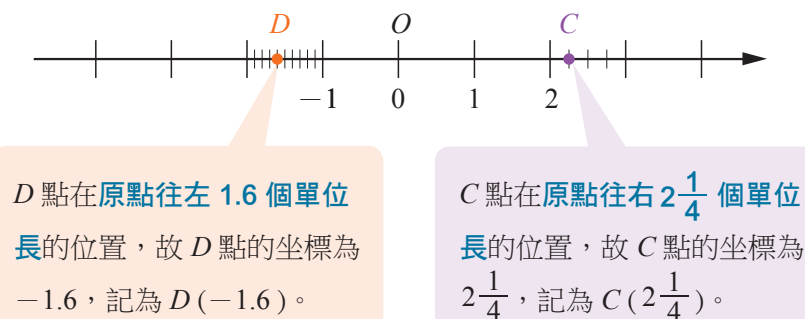
當我們在一條直線上規定原點、正向及單位長之後，這一條直線上的點就可以用來表示正數、0 與負數，這樣的直線稱為**數線**。

從 O 點向右，每隔 1 個單位長依序代表 1、2、3、…… 這些正整數在這一條線上的位置；同理，從 O 點向左，每隔 1 個單位長依序代表 -1 、 -2 、 -3 、…… 這些負整數在這一條線上的位置，如下圖：



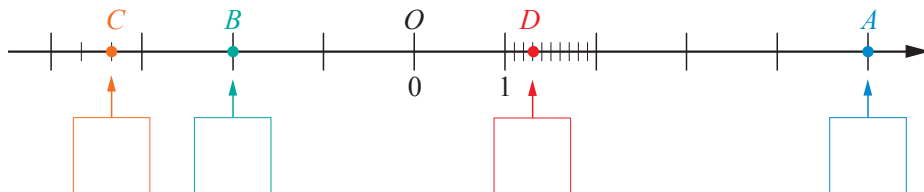
在前一頁的下圖中， A 點在原點的右邊 5 個單位長的地方，表示 5 這個數字，我們稱 A 點的坐標為 5，記為 $A(5)$ 。同理， B 點在原點的左邊 3 個單位長的地方，表示 -3 這個數字，我們稱 B 點的坐標為 -3 ，記為 $B(-3)$ 。

在數線上也可將單位長等分來表示分數或小數，如下圖。



隨堂練習

在下面的空格中，填入 A 、 B 、 C 、 D 四點的坐標：

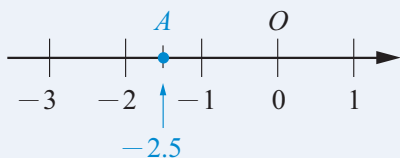


迷思診療

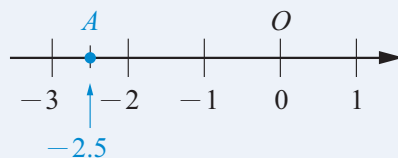
負數坐標的表示

老師要求在數線上標示 $A(-2.5)$ ，小明與小美的作法如下：

小明：



小美：



請問誰的作法正確？

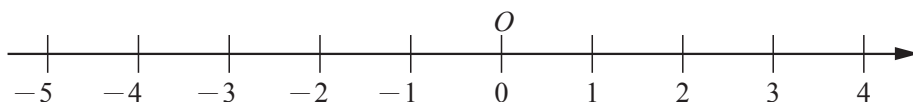


例3 在數線上描點

畫出一條數線，並在此數線上標示出下面各點：

$$P(-5)、Q(1\frac{1}{3})、R(3.2)、S(-2\frac{1}{5})$$

解 (1) 畫一條數線，如下圖。

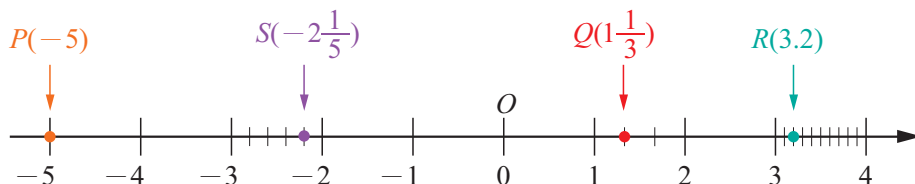


(2) 在原點 O 的左邊 5 個單位長處，標示為 $P(-5)$ ，如下圖。

(3) Q 點在原點右邊 $1\frac{1}{3}$ 個單位長處，標示為 $Q(1\frac{1}{3})$ ，如下圖。

(4) R 點在原點右邊 3.2 個單位長處，標示為 $R(3.2)$ ，如下圖。

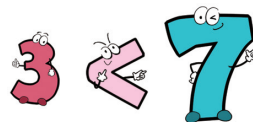
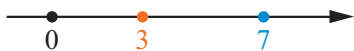
(5) S 點在原點左邊 $2\frac{1}{5}$ 個單位長處，標示為 $S(-2\frac{1}{5})$ ，如下圖。

**隨堂練習**

畫出一條數線，並在此數線上標示出下面各點：

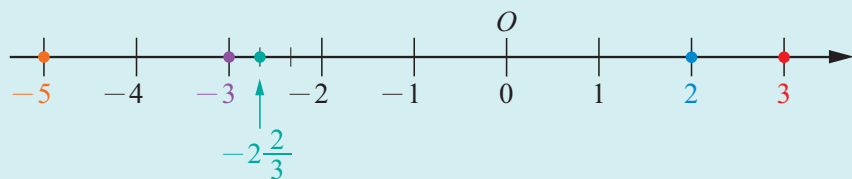
$$A(1.6)、B(-2\frac{3}{4})、C(-4)、D(3\frac{1}{2})$$

國小時我們學過比較兩個正數的大小，例如 7 比 3 大，記為 $7 > 3$ ，也可記為 $3 < 7$ ；同時，由 7 與 3 在數線上的位置可知，0 的右邊代表正數，愈往右邊的正數愈大。但是負數之間的大小關係又是如何呢？



例 4 利用數線比較數的大小

- 在數線上標示出 -5 與 -3 這兩個數，並比較他們的大小。
- 下圖是數線上代表 -5 、 -3 、 2 、 $-2\frac{2}{3}$ 、 3 各數的點，哪一個數最大？哪一個數最小？



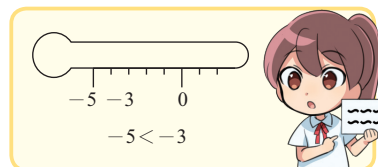
解

- 在數線上標示出 -5 與 -3 ，如下圖：



由數線圖可以看出 -5 表示比 0 小 5 的數，
 -3 表示比 0 小 3 的數，因此可知 $-5 < -3$ 。

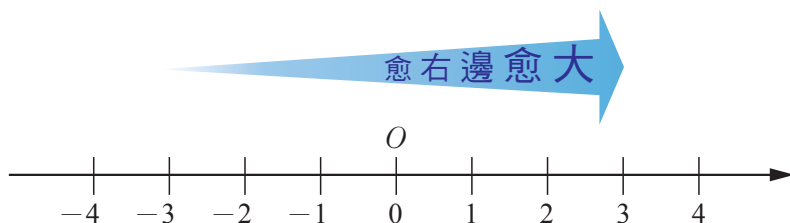
- 由圖可知， 2 與 3 都是比 0 大的數，且 $3 > 2$ ，因此最大數為 3 ；
而 -5 、 -3 、 $-2\frac{2}{3}$ 都是比 0 小的數，
其中 -5 比 0 小 5，是最小的數。



隨堂練習

在數線上標示出 2 、 -1 、 -3.75 、 $2\frac{4}{5}$ 這四個數，並判斷哪一個數最大？
哪一個數最小？

數線上，在原點 $O(0)$ 的右邊為正數，原點 O 的左邊為負數；愈往右邊代表的數愈大，愈往左邊代表的數愈小。



綜合以上的說明，可知：

- ① 正數大於 0，負數小於 0，因此負數 $< 0 <$ 正數。
- ② 數線上的兩個數，右邊的數大於左邊的數。



比較三個數 a 、 b 、 c 的大小時，例如 -2 、 -5 、 3 這三個數，因為 $-5 < -2$ ，且 $-2 < 3$ ，因此可知 $-5 < 3$ ，可記為 $-5 < -2 < 3$ ，也可記為 $3 > -2 > -5$ 。

一般而言，如果 $a < b$ ，且 $b < c$ ，那麼我們就可知道 $a < c$ ，並且可記為 $a < b < c$ ，這個性質稱為**遞移律**。

隨堂練習

比較下列各數的大小： 3 、 $-3\frac{1}{4}$ 、 6 、 -2 、 0 、 -6 。

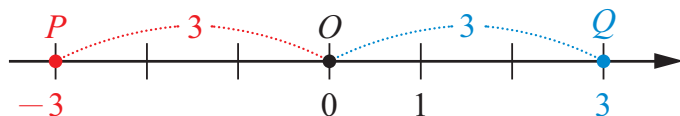
3 、 $-3\frac{1}{4}$ 、 6 、 -2 、 0 、 -6

___ $<$ ___ $<$ ___ $<$ ___ $<$ ___



3 相反數與絕對值

如果我們將 $+3$ 與 -3 標示在數線上，可以發現 $+3$ 與 -3 分別在原點的右方與左方，而且與原點的距離都是 3 個單位長。



如果兩個數在數線上的位置分別位於原點的左右兩側，且這兩個數到原點的距離相同，就稱這兩個數互為**相反數**，例如 -3 與 3 ， -5.2 與 5.2 、 $-\frac{7}{2}$ 與 $\frac{7}{2}$ ……都互稱為相反數。

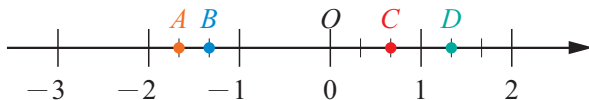
事實上，由於一個正數的相反數，就是這個數前面冠上一個「 $-$ 」號，例如 3 的相反數就是 -3 ；同樣地，負數的相反數也可在前面冠上一個「 $-$ 」號，因此 -3 的相反數也可記為 $-(-3)$ ，而由前面可知 -3 的相反數是 3 ，因此可得 $-(-3)=3$ 。 0 的相反數仍是 0 。

也就是說：

a 的相反數為 $-a$ ，而 $-a$ 的相反數為 a ，即 $-(-a)=a$ 。

隨堂練習

- ① 1 的相反數為 _____， -1 的相反數為 _____， $-(-1)=$ _____。
- ② 0 的相反數為 _____； $\frac{2}{3}$ 的相反數為 _____； $-(-8)=$ _____。
- ③ 如下圖， A 、 B 、 C 、 D 四個點中哪一點代表「 $-1\frac{1}{3}$ 的相反數」？
答：_____。



迷思診療

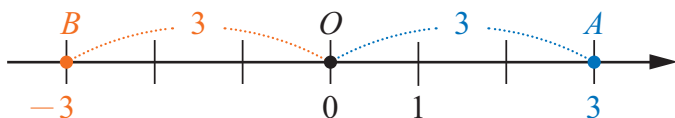
a 的相反數是 $-a$ ，所以 $-a < 0$ ？

某天小新斬釘截鐵的告訴曉華說：「 a 的相反數是 $-a$ ，所以 $-a < 0$ 。」請用 $a = 2$ 、 0 、 -2 時，分別檢驗是否正確。



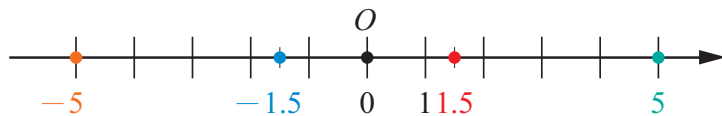
我們知道兩個互為相反數的數，它們到原點的距離相等，譬如 $+3$ 與 -3 ，其中「 $+$ 」、「 $-$ 」符號代表在原點右方與左方的方向；若僅考慮一數到原點的距離，我們就可用絕對值來表示。

在數線上，點 $A(a)$ 到原點 $O(0)$ 的距離叫作 a 的**絕對值**，記作 $|a|$ 。例如： $A(3)$ 到原點的距離為 3 ，故 $|3| = 3$ 。而 $B(-3)$ 到原點的距離亦為 3 ，故 $|-3| = 3$ ，也就是 $|3| = |-3| = 3$ ，同時也可知 $|0| = 0$ 。



隨堂練習

- 1 觀察下圖，並寫出下列各數的絕對值： 5 、 -5 、 1.5 、 -1.5 、 0 。



- 2 寫出下列各式的值：

$$|12| = \underline{\quad\quad\quad}; |-23| = \underline{\quad\quad\quad} = -(\underline{\quad\quad\quad});$$

$$|4\frac{3}{7}| = \underline{\quad\quad\quad}; |-3\frac{4}{5}| = \underline{\quad\quad\quad}.$$

從上面的例子我們可以知道：



絕對值的性質

若 $a > 0$ ，則 $|a| = a$ ；若 $a < 0$ ，則 $|a| = -a$ ；若 $a = 0$ ，則 $|a| = 0$ 。

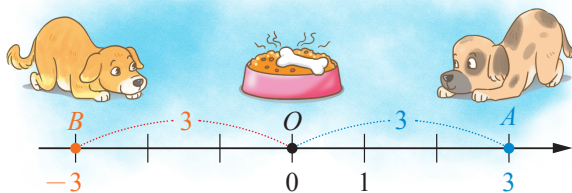
? 迷思診療

$|-a| = a$ 嗎？

依霖在學習絕對值時，學到 $|-3| = 3$ ，因此她認為 $|-a| = a$ ，請用 $a = 1$ 、 0 、 -1 時，分別檢驗是否正確。



由上面的例子知道： $|3| = |-3| = 3$ ，即到原點距離為 3 的點有兩個： $A(3)$ 與 $B(-3)$ 。因為絕對值表示點到原點的距離，因此絕對值等於 a ($a > 0$) 的數就會有兩個： a 與 $-a$ 。



綜合以上，我們知道：

- ① 除了 0 以外，不論正數或負數，它們的絕對值都是正數。
- ② 兩個互為相反數的數，它們的絕對值相等，即 $|-a| = |a|$ 。



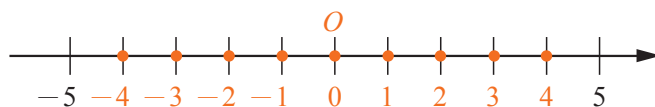
隨堂練習

有一數 a ，若 $|a| = 8$ ，則 a 的可能值為何？

例 5 求絕對值小於某數的整數個數

數線上絕對值小於 5 的整數有幾個？

解 數線上絕對值小於 5 的整數，
就是與原點距離小於 5 的整數點，
如下圖：



因此符合條件的整數為 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ ，
共 $4 \times 2 + 1 = 9$ (個)。

隨堂練習

數線上絕對值小於 4 的整數有幾個？

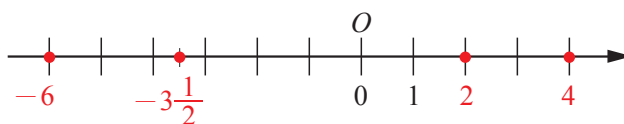


例 6 絕對值比大小

- ① 比較 $4, 2, -3\frac{1}{2}, -6$ 的大小。
- ② 寫出 $4, 2, -3\frac{1}{2}, -6$ 的絕對值。
- ③ 比較 $|4|, |2|, |-3\frac{1}{2}|, |-6|$ 的大小。

解

- ① 由數線上的位置可知 $-6 < -3\frac{1}{2} < 2 < 4$ 。如下圖：



- ② $|4| = 4$; $|2| = 2$; $|-3\frac{1}{2}| = 3\frac{1}{2}$; $|-6| = 6$
- ③ 由(2)可知 $|2| < |-3\frac{1}{2}| < |4| < |-6|$ 。



隨堂練習

- ① 比較 $-2\frac{3}{4}, -1, 2$ 的大小
- ② 比較 $|-2\frac{3}{4}|, |-1|, |2|$ 的大小



探索活動

 a 、 b 與 $|a|$ 、 $|b|$ 之間的大小關係

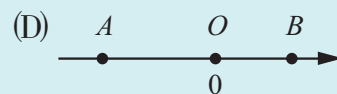
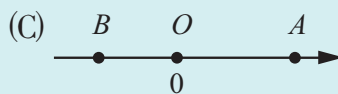
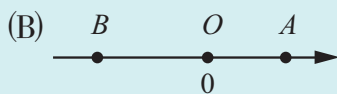
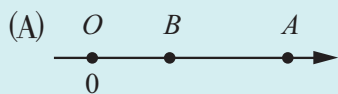
設 a 、 b 代表數

- (1) 如果 $a > b$ ，那麼 $|a| > |b|$ 是否一定成立？請舉例說明。
- (2) 如果 $|a| > |b|$ ，那麼 $a > b$ 是否一定成立？請舉例說明。
- (3) 如果 $|a| = |b|$ ，那麼 $a = b$ 是否一定成立？請舉例說明。

例7 由絕對值判斷數線上的位置

數線上有兩點 $A(a)$ 與 $B(b)$ ，已知 $|a| > |b|$ ，試問：

- (1) A 、 B 兩點中哪一點距離原點較遠？
- (2) 下列選項哪一個不可能是 A 、 B 兩點在數線上的位置？



解

- (1) 因為 $|a|$ 為 $A(a)$ 與原點的距離， $|b|$ 為 $B(b)$ 與原點的距離，且 $|a| > |b|$ ，所以不論 a 、 b 之正負， $A(a)$ 距離原點較遠。
- (2) 由(1)可知，選項(B)的圖形不可能為 A 、 B 兩點在數線上的位置。



隨堂練習

已知兩數 a 、 b ，且 $|a| > |b|$ ，試問下列選項哪一個不可能是 a 、 b 與 0 的大小關係？(A) $a > b > 0$ (B) $a > 0 > b$ (C) $0 > a > b$ (D) $b > 0 > a$



1-1 重點整理

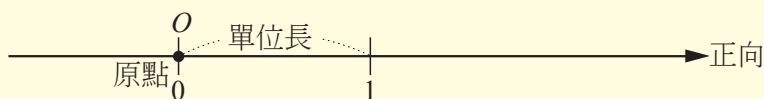
1 正數與負數

比 0 大的數稱為正數，比 0 小的數稱為負數。

例 2、2.4 為正數， -3 、 $-4\frac{2}{5}$ 為負數，0 不是正數也不是負數。

2 數線

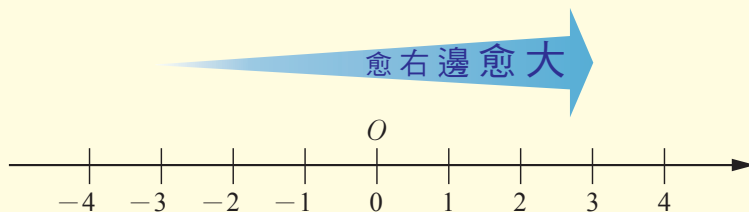
在一條直線上規定原點、正向及單位長之後，這一條直線上的點就可以用來表示正數、0 與負數，這樣的直線稱為數線。



3 數的大小

如果數線的正向朝右，那麼：

- (1) 正數大於 0，負數小於 0，因此負數 $< 0 <$ 正數。
- (2) 數線上的兩個數，右邊的數大於左邊的數。



4 相反數

- (1) 數線上，位於原點兩側，且與原點距離相等的兩個數互為相反數。
- (2) a 的相反數為 $-a$ ，而 $-a$ 的相反數為 a 。

例 2 的相反數為 -2 ， -3 的相反數為 3 ，0 的相反數為 0。

5 絕對值

- (1) $|a|$ 代表數線上點 $P(a)$ 與原點 $O(0)$ 的距離。
- (2) 除了 0 以外，不論正數或負數，它們的絕對值都是正數。
- (3) 兩個互為相反數的數，它們的絕對值相等，即 $|-a| = |a|$ 。

例 $|-3| = |3| = 3$ 。



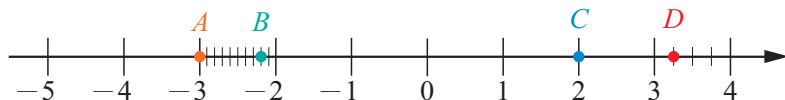
1-1 自我評量

P.7 例 1

- 1 小新在過年前的體重為 50 公斤，以這個體重為基準點，增加以「+」表示，減少以「-」表示。過完年假之後，小新的體重增加了 3 公斤，可表示為 _____ 公斤；之後小新努力控制飲食與運動，三個月之後體重比過年前少了 5 公斤，可表示為 _____ 公斤。

P.11 隨堂練習 P.12 例 3

- 2 分別寫出 A 、 B 、 C 、 D 四點的坐標，並在數線上標出 $P(-4)$ 、 $Q(0.5)$ 、 $R(-1\frac{2}{5})$ 三點。



P.13 例 4

- 3 比較下列各題中兩個數的大小關係（在空格中填入 $>$ 、 $=$ 、 $<$ ）：

(1) 8 _____ -9 (2) -10 _____ -6 (3) 0 _____ -5

P.15 隨堂練習

- 4 寫出下列各數的相反數：

(1) $\frac{4}{5}$ (2) -13 (3) -0.18

P.16 隨堂練習 P.17 隨堂練習

- 5 回答下列問題：

(1) $|-9| =$ _____。

(2) 絕對值等於 3 的數有 _____ 與 _____。

P.19 例 6

6 比較下列各題中兩個數的大小關係（在空格中填入 $>$ 、 $=$ 、 $<$ ）：

(1) -2 _____ $|-3|$

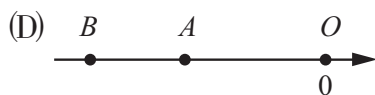
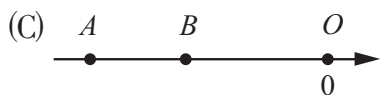
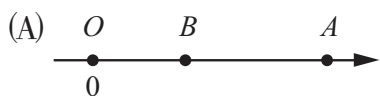
(2) $|-12|$ _____ $|-9|$

(3) 0 _____ $|-5|$ 。

(4) $|-53|$ _____ -53

P.20 例 7

7 已知數線上有兩點 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，若 $a < 0$ ， $b < 0$ ，且 $|b| > |a|$ ，則下圖中哪一個可以用來表示 A 、 B 在數線上的位置？



答：_____。

✗ 錯誤診療

小明和小美針對兩個數 a 、 b 與它們的絕對值說法如下：

① 小明：兩個數 a 、 b ，當 $|a| < |b|$ 時， $a < b$ 。

② 小美：兩個數 a 、 b ，當 $a < b$ 時， $|a| < |b|$ 。

請問下列選項何者正確？

(1) 只有小明正確 (2) 只有小美正確

(3) 2 人都正確 (4) 2 人都錯

答：_____。

