

3-2 利用十字交乘法因式分解

① 二次項係數為 1 的十字交乘法 動畫 趣味派

在第 1 章學過多項式乘法，例如： $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ 。

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \times) x + 3 \\ \hline x^2 + 2x \\ + 3x + 6 \\ \hline x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

\uparrow \uparrow
 $2+3$ 2×3

反之，要將 x^2+5x+6 分解為兩個整係數一次因式的乘積，可以假設：
 $x^2+5x+6=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$ ，因此 $p+q=5$ ， $p \times q=6$ 。
 滿足 $p+q=5$ 的整數 p 、 q 很多，因此可以先找滿足 $p \times q=6$ 的整數 p 、 q ：

$p \times q$	$p+q$
1×6	$1+6=7$
$(-1) \times (-6)$	$(-1)+(-6)=-7$
2×3	$2+3=5$
$(-2) \times (-3)$	$(-2)+(-3)=-5$

這幾種分解中，只有 $p=2$ 、 $q=3$ 才會滿足 $p+q=5$ ，所以可得
 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ 。

上述過程也可以記錄成：

$$\begin{array}{r} x \quad +2 \\ \times) x \quad +3 \\ \hline x \times x = x^2 \\ \hline 2x \quad + \quad 3x = 5x \end{array}$$

$2 \times 3 = 6$

這種因式分解的方法，稱為**十字交乘法**。

如果 x^2+bx+c 可以因式分解為 $(x+p)(x+q)$ 的形式，因為
 $(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq=x^2+bx+c$ ，其中

$$b=p+q \quad \leftarrow x \text{ 項的係數}$$

$$c=pq \quad \leftarrow \text{常數項}$$

所以在因式分解形如 x^2+bx+c 的二次三項式時，只要考慮如何找到兩個整數 p 、 q ，使它們相加的和為 b ，相乘的積為 c 。

放大 例 1 二次項係數為 1，常數項為正數

自評 P140 第 2 題 (1)

利用十字交乘法，因式分解 $x^2+10x+21$ 。

解 常數項 21 為正數，可分解為兩個正數相乘或兩個負數相乘，即

$$\triangle 21=1 \times 21 = (-1) \times (-21)$$

$$\nabla = 3 \times 7 = (-3) \times (-7)$$

$$\begin{array}{r} x \quad ? \\ \times) x \quad ? \\ \hline ?x \quad + \quad ?x = 10x \end{array}$$

利用十字交乘法寫成：

$$\textcircled{1} \begin{array}{r} x \quad +1 \\ \times) x \quad +21 \\ \hline 1x \quad + \quad 21x = 22x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \begin{array}{r} x \quad -1 \\ \times) x \quad -21 \\ \hline -1x \quad + \quad (-21x) = -22x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\textcircled{3} \begin{array}{r} x \quad +3 \\ \times) x \quad +7 \\ \hline 3x \quad + \quad 7x = 10x \text{ (合)} \end{array}$$

$$\textcircled{4} \begin{array}{r} x \quad -3 \\ \times) x \quad -7 \\ \hline -3x \quad + \quad (-7x) = -10x \text{ (不合)} \end{array}$$

因為一次項為 $10x$ ，因此 $\textcircled{3}$ 方法正確，所以 $x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$ 。

放大 例 2 二次項係數為 1，常數項為正數

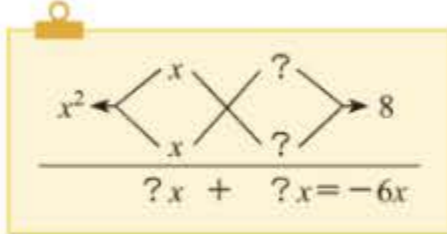
自評 P140 第 1、2 (2) 題

提問 利用十字交乘法，因式分解 $x^2 - 6x + 8$ 。

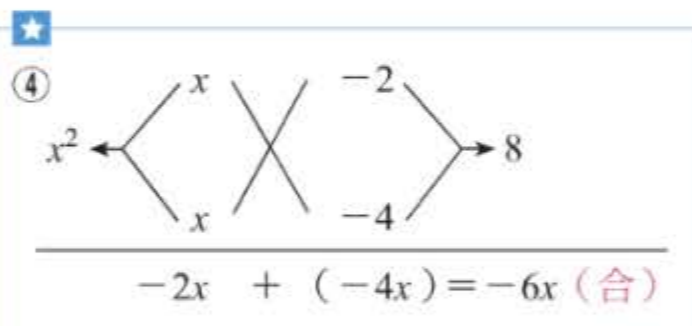
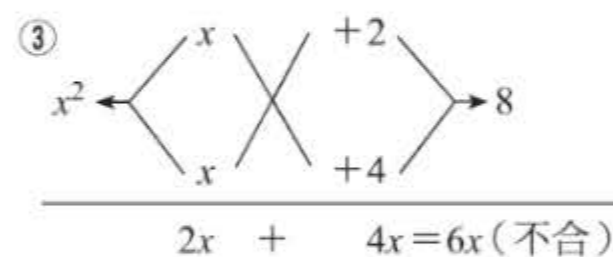
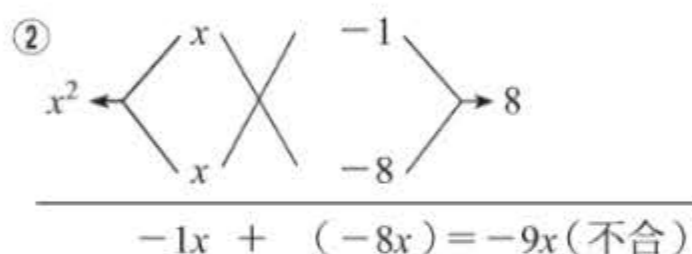
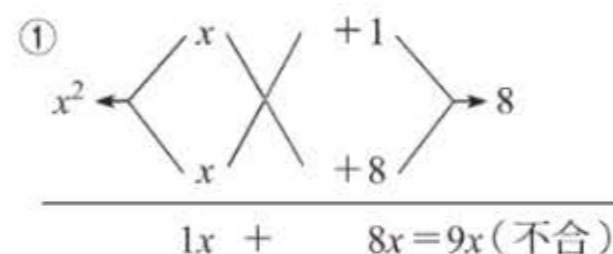
解 常數項 8 為正數，可分解為兩個正數相乘或兩個負數相乘，即

▲ $8 = 1 \times 8 = (-1) \times (-8)$

▼ $= 2 \times 4 = (-2) \times (-4)$



利用十字交乘法寫成：



因為一次項為 $-6x$ ，因此④方法正確，所以 $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ 。

放大 隨堂練習

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

解 (1) $x^2 + 4x + 3$

所以 $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ 。

解 (2) $x^2 - 11x + 18$

所以 $x^2 - 11x + 18 = (x - 9)(x - 2)$ 。

放大 例 3 二次項係數為 1，常數項為負數

自評 P140 第 2 題 (3)

利用十字交乘法，因式分解 $x^2 - x - 6$ 。

思路分析

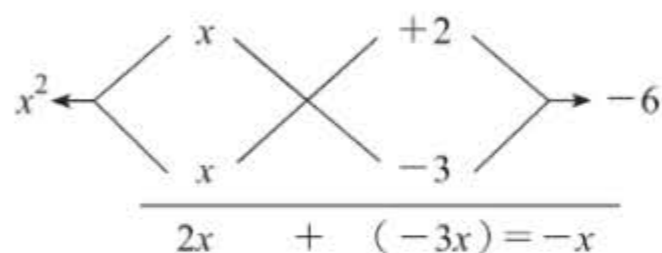
哪兩個整數相乘為 -6 ，相加為 -1 ？

解 $-6 = 1 \times (-6) = 2 \times (-3)$

▲ $= (-1) \times 6 = (-2) \times 3$

▼ 因為一次項為 $-x$ ，

而上列分解中只有 $2 + (-3) = -1$ ，故常數項可分解為 2 和 -3 的乘積，所以 $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ 。



放大 隨堂練習

利用十字交乘法，因式分解下列各式：

解 (1) $x^2 + x - 2$

所以 $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ 。

解 (2) $x^2 - 7x - 30$

所以 $x^2 - 7x - 30 = (x + 3)(x - 10)$ 。

在例 3 的解題過程中，如果將 x^2 項分解為 $(-x) \cdot (-x)$ ，常數項 -6 分解為 $(-2) \times 3$ ，可以得到：

$x^2 - x - 6 = (-x - 2)(-x + 3)$

但 $-x - 2 = -(x + 2)$ ， $-x + 3 = -(x - 3)$ ，所以 $(-x - 2)(-x + 3) = (x + 2)(x - 3)$ 。

因此當 x^2 項係數為正數時，只要考慮其正因數即可。