4-1 直線方程式及其圖形

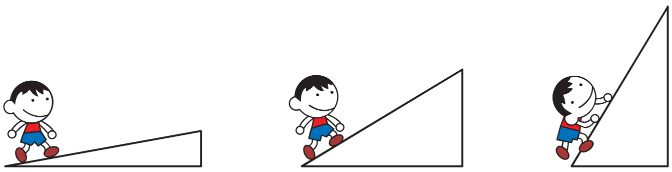
自行車車友都知道，從南投縣埔里出發到武嶺的這條道路非常具有挑戰性，原因是全長約 57 公里的路途中必須爬升 2982 公尺，平均坡度大約 5.24 %. 這對於完全靠雙腳為動力的自行車是非常大的挑戰. 特別是從昆陽到終點武嶺的最後一小段路又剛好特別陡峭，坡度達 8.4 %，因此這段路被車友們戲稱為 “天堂路.” 坡度的計算，就是本節介紹的直線斜率的應用.

圖 1

利用第三章介紹的平面坐標系，我們可以將幾何性質與代數運算結合在一起. 本章要詳細介紹直線與圓，在本節裡，我們將透過直線的傾斜程度來推導直線方程式.

1 直線的斜率

觀察圖 2 的三個斜坡，很顯然地圖 2(c) 最陡.



(a) (b) (c)

圖 2

我們可以用水平方向每前進一單位時，鉛直方向上升或下降多少單位來描述斜坡的傾斜程度．如圖 3(a)的斜坡，其傾斜程度以 $\frac{0.1}{1}$ 表示；如圖 3(b)的斜坡，其傾斜程度則以 $\frac{0.4}{1}$ 表示．$0.4>0.1$ 展現了圖 3(b)較圖 3(a)更陡的關係．

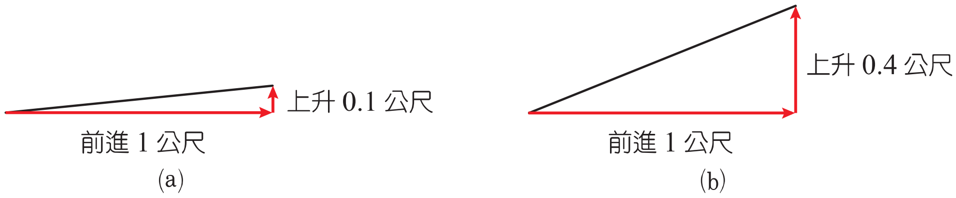


圖 3

我們將用這個概念來表示坐標平面上直線的傾斜程度．如圖 4 所示，若直線 L 非鉛垂線，我們可將直線 L 看成一個斜坡，當我們沿著 L 上的點 $A(x_1, y_1)$ 走到點 $B(x_2, y_2)$ 時，直線 L 的傾斜程度就可以表示為

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad ①$$

而且，此比值 m 不會受選取的點與順序的影響，說明如下：

如果在直線 L 上所選取的是異於 A, B 的任意兩點 $P(x_3, y_3)$，$Q(x_4, y_4)$，如圖 5 所示，那麼，由 $\triangle ABC\sim\triangle PQR$，可得

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}.$$

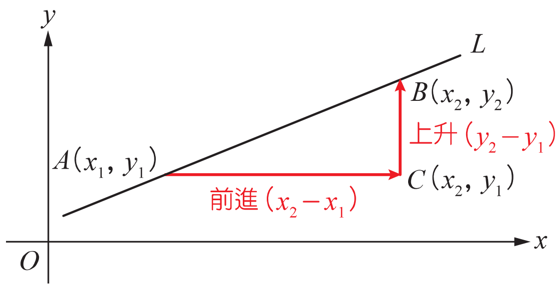


圖 4

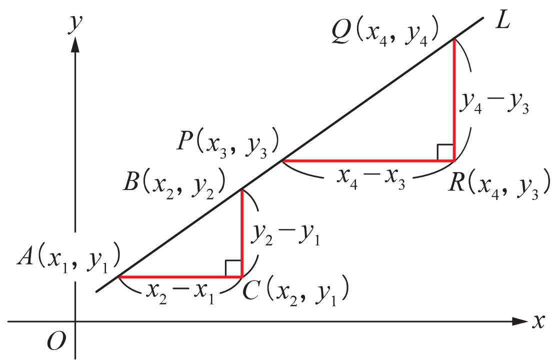


圖 5

因此，我們知道：只要直線 L 給定，那麼比值 m 就會隨之確定．這個比值 m 我們稱它為直線 L 的**斜率**．

直線的斜率

設直線 L 不是鉛垂線且 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 為直線 L 上相異兩點，則直線 L 的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$．

此外，當 L 是鉛垂線時，會有 $x_1=x_2$，故①式的分母為 0，所以我們不規定鉛垂線的斜率．

例題 1

坐標平面上六點 $A(2,\ 1)$，$B(3,\ 1)$，$C(3,\ 2)$，$D(3,\ 3)$，$E(1,\ 2)$，$F(1,\ 3)$，試求下列各直線的斜率：

(1) 直線 AB．(2) 直線 AC．(3) 直線 AD．

(4) 直線 AE．(5) 直線 AF．

解

(1) 直線 AB 的斜率為 $\dfrac{1-1}{3-2}=0$．（水平線的斜率為 0）

(2) 直線 AC 的斜率為 $\dfrac{2-1}{3-2}=1$．

(3) 直線 AD 的斜率為 $\dfrac{3-1}{3-2}=2$．

(4) 直線 AE 的斜率為 $\dfrac{2-1}{1-2}=-1$．

(5) 直線 AF 的斜率為 $\dfrac{3-1}{1-2}=-2$． □

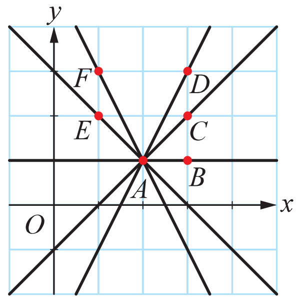


圖 6

隨堂練習

(1) 圖 7 中有直線 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, 分別求其斜率, 並比較斜率大小.

(2) 在圖 8 中畫出一條通過原點且斜率為 3 的直線.

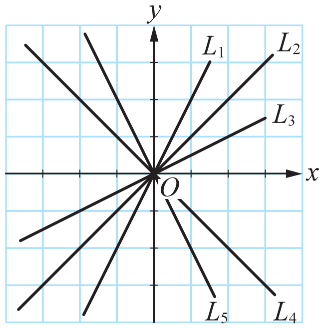


圖 7

圖 8

關於直線的圖形與其斜率的關係, 有以下結論, 如圖 9 所示.

(1) 水平線的斜率為 0.

(2) 直線由左下往右上傾斜時, 斜率為正.

(3) 直線由左上往右下傾斜時, 斜率為負.

(4) 直線愈接近鉛垂線, 其斜率的絕對值也愈大.

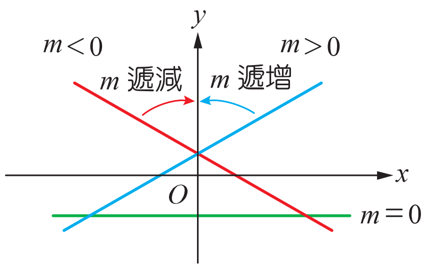


圖 9

隨堂練習

如圖 10 所示, 試比較直線 AB, BC, CD, DE, EA 的斜率大小.

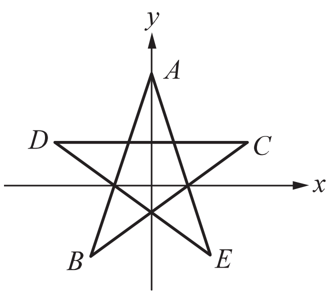


圖 10

2 直線方程式

平面上過點（1, 3）的直線有無限多條，但其中斜率為 2 的就只有一條，如圖 11 所示．一般來說，過定點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線恰有一條．那麼，這條直線的方程式該如何表示呢？

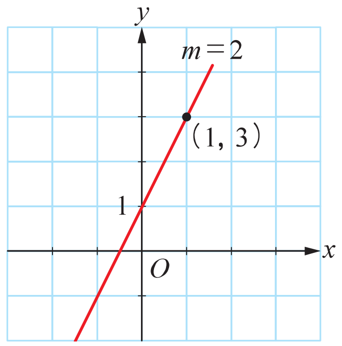


圖 11

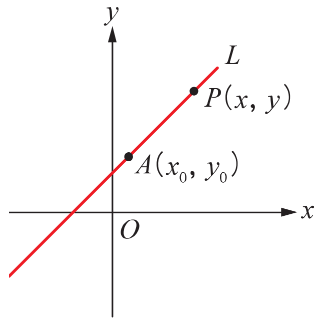


圖 12

如圖 12 所示，我們可以設 $P(x, y)$ 為直線 L 上異於點 A 的任意點．由斜率的定義可知

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

整理後即得

$$y-y_0=m(x-x_0), \qquad ②$$

注意到，點 A 也滿足此式，即點 $(x, y)=(x_0, y_0)$ 時，②式也成立．所以，直線 L 上的每一點都能滿足②式．反之，滿足②式的點 (x, y) 也一定落在直線 L 上，故②式稱為直線 L 的**點斜式**．

點斜式

過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$．

因此，要求直線方程式，只要知道直線上的一點與斜率即可；此外，由點斜式還可以直接看出直線上的一點與斜率．

例題 2

試求滿足下列條件之直線方程式：

(1) 過點 $(3, -1)$ 且斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線.

(2) 通過 $(4, -3)$, $(2, 1)$ 兩點的直線.

解 (1) 由點斜式可得所求直線方程式為

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-3),$$

即 $x-2y-5=0$.

(2) 因為 $(4, -3)$, $(2, 1)$ 為所求直線上兩點，所以直線的斜率為

$$\frac{1-(-3)}{2-4}=-2.$$

又直線過點 $(2, 1)$，故由點斜式得直線方程式為

$$y-1=-2(x-2),$$

即 $2x+y-5=0$. □

隨堂練習

試求滿足下列條件之直線方程式：

(1) 過點 $(-1, 2)$ 且斜率為 1 的直線.

(2) 通過 $(-3, 2)$, $(2, -1)$ 兩點的直線.

如圖 13 所示，當直線 L 與 x 軸交於點 $(a, 0)$ 時，稱 a 為 L 的 **x 截距**；當直線 L 與 y 軸交於點 $(0, b)$ 時，稱 b 為 L 的 **y 截距**. 例如：直線 $3x-2y+6=0$ 的 x 截距為 -2，y 截距為 3.

注意，水平線沒有 x 截距，而鉛垂線沒有 y 截距.

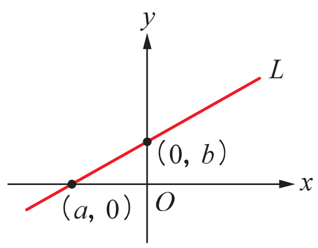


圖 13