

2

標準分解式與分數運算

在第 1 章我們建立了正負數的概念，正負數包含整數、小數與分數。而在生活中，你知道藥物的半衰期可以利用分數的指數記法來計算嗎？

本章將延伸第 1 章的概念，進一步學習分數與指數的運算。

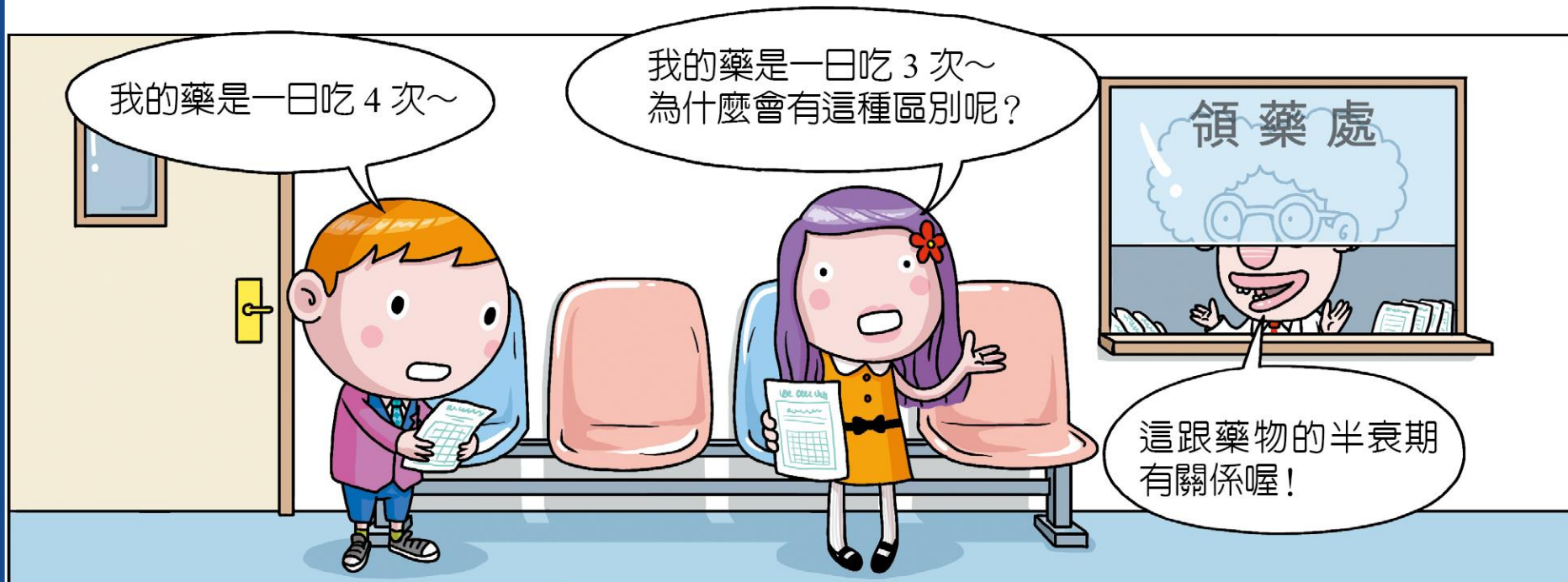
聯合診所

內科．小兒科．家醫科

你也來看醫生啊？

對啊！
咳嗽、流鼻涕…
很不舒服！

咳
咳



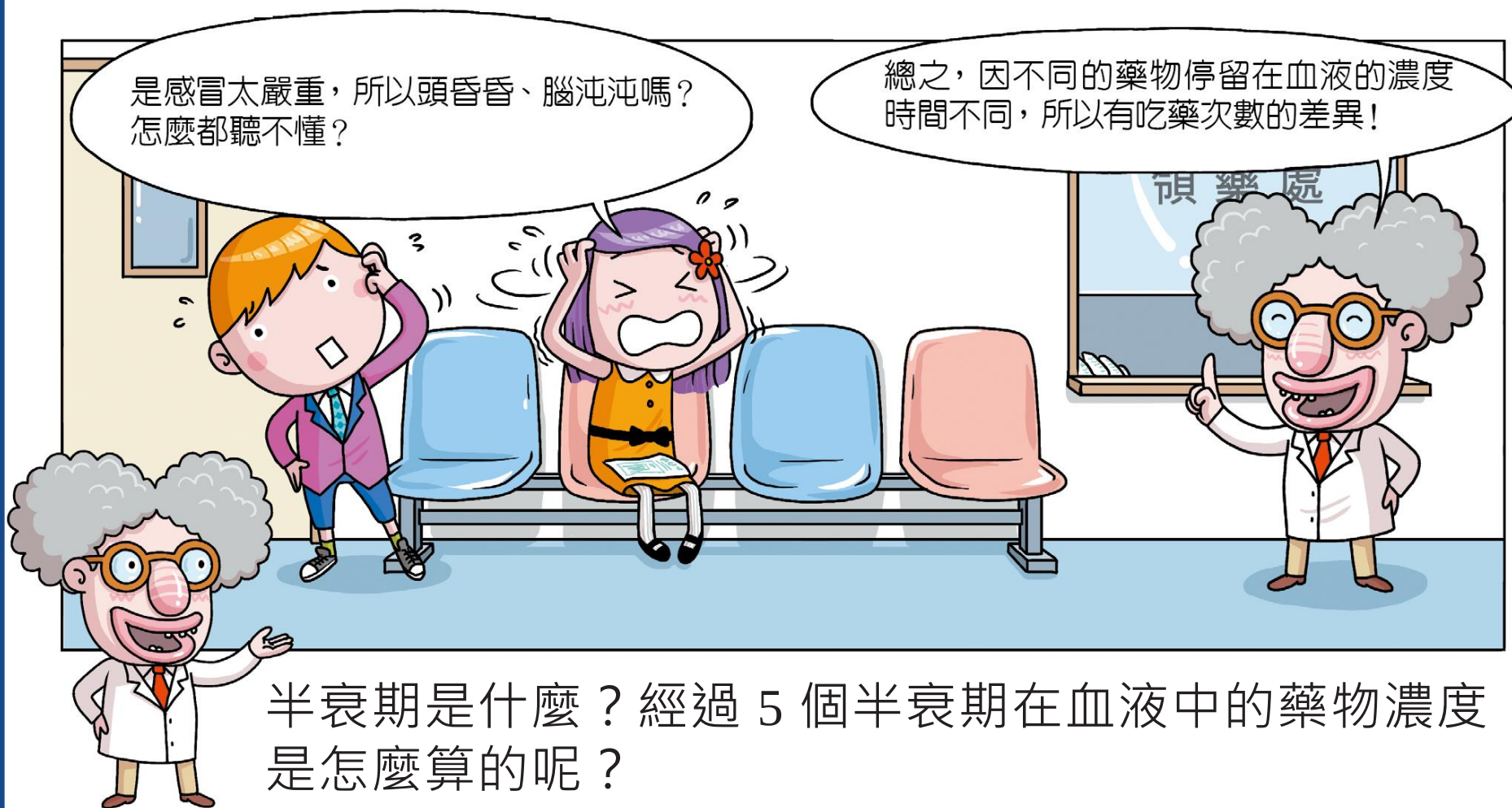
半衰期長的藥物，在體內消除慢，停留時間長，服藥的間隔時間就要比較長；反之，半衰期短的藥物，在體內消除快，服藥的間隔時間就會比較短。

通常經過 5 個半衰期，藥物在血中的濃度只剩原來的 $\frac{1}{32}$ ，就已經非常低了！

半衰期？

藥物濃度 $\frac{1}{32}$ ？







回顧 ① 2 和 5 的倍數判別法

(1) 如果一個整數的個位數字是 0、2、4、6 或 8，則這個整數是 2 的倍數。

例如：1024、2310。

(2) 如果一個整數的個位數字是 0 或 5，則這個整數是 5 的倍數。

例如：735、2310。



學習前哨站



課前練習

解

(1) 26 是

☒ 2 的倍數

☐ 5 的倍數

(2) 730 是

☒ 2 的倍數

☒ 5 的倍數

(3) 2465 是

☐ 2 的倍數

☒ 5 的倍數

#

解





學習前哨站

回顧 2

最大公因數與最小公倍數

70 與 98 的
最大公因數
為 $2 \times 7 = 14$

2	70	98
7	35	49
5		
7		

70 與 98 的最小
公倍數為
 $2 \times 7 \times 5 \times 7 = 490$



學習前哨站



課前練習

利用短除法求 48、60 的最大公因數與最小公倍數：

解

$$\begin{array}{r|rr}
 2 & 48 & 60 \\
 \hline
 2 & 24 & 30 \\
 \hline
 3 & 12 & 15 \\
 \hline
 & 4 & 5
 \end{array}$$

(1) 48、60 的最大公因數為 12。

(2) 48、60 的最小公倍數為 240。



解



CH2-1 質因數分解



① 因數與倍數

② 質數與合數

③ 標準分解式



重點回顧



自我評量

國小時學過以短除法做質因數分解，本章將從質因數分解出發來學習標準分解式，經由標準分解式認識公因數與公倍數，也可從最小公倍數進行分數的通分。

① 因數與倍數

趣味派



$1740 \div 29 = 60$ ，所以一個爌肉便當 60 元。

在左圖中，
 $1740 \div 29 = 60$ ，
 即 $1740 = 60 \times 29$ ，
 因此：

- (1) 29 和 60 都是 1740 的因數。
- (2) 1740 是 29 和 60 的倍數。



因數與倍數

如果 a 、 b 、 c 為任意三個整數，且 a 、 b 、 c 皆不為 0，若 $a \div b = c$ ，即 $a = b \times c$ ，則

(1) b 、 c 是 a 的因數。

(2) a 是 b 、 c 的倍數。

根據因數、倍數的意義，我們可以來討論 1 和 0 這兩個數的因數與倍數：

- ① 因為任何整數 a 除以 1 的結果都是 a (即 $a \div 1 = a$)，**所以任何整數都是 1 的倍數，1 是任何整數的因數。**
- ② 因為 **0 不可以當作除數，所以 0 不是任何整數的因數。**
- ③ 因為 $0 \div a = 0 (a \neq 0)$ ，所以 **0 是任何非零整數的倍數。**

在國中階段，若沒有特別說明，因數都是指正因數；而倍數指的是正倍數。

在學習前哨站，已複習曾學過的 2、5 倍數判別法，接下來我們將學習 4、3、9、11 的倍數判別法。

▶ 4 的倍數判別法

要判別一個數是不是 4 的倍數，除了直接用除法判別外，還有更簡便的方法。

例如：判別 7528 是不是 4 的倍數時，

因為 $100 = 25 \times 4$ ，所以 100 的倍數都是 4 的倍數，

而 $7528 = 75 \times 100 + 28$ ， 75×100 必為 4 的倍數，末兩位數 28 是 4 的倍數，所以 7528 是 4 的倍數。



4 的倍數判別法

如果一個整數的末兩位數是 4 的倍數，則這個整數是 4 的倍數。

例 1 判別 4 的倍數

判別下列各數是否為 4 的倍數。

(1) 536

解 (1) 因為 536 的末兩位數 36 是 4 的倍數，
所以 536 是 4 的倍數。

#

解



例 1 判別 4 的倍數

判別下列各數是否為 4 的倍數。

(2) 2370

解 (2) 因為 2370 的末兩位數 70 不是 4 的倍數，
所以 2370 不是 4 的倍數。

#



隨堂練習

有一個四位數 $23\square 4$ ，如果此數是 4 的倍數，則 $\square$ 可以填入哪些數字？

四位數 $23\square 4$ 的末二位數中，

04、24、44、64、84 為 4 的倍數，

所以可填 0、2、4、6、8。

#

解





Thinking

7528 是不是 8 的倍數呢？除了直接利用除法之外，還有沒有更簡便的方法呢？

(提示： $1000 = 125 \times 8$)

解

是，判別該數的末三位數是否為 8 的倍數即可。

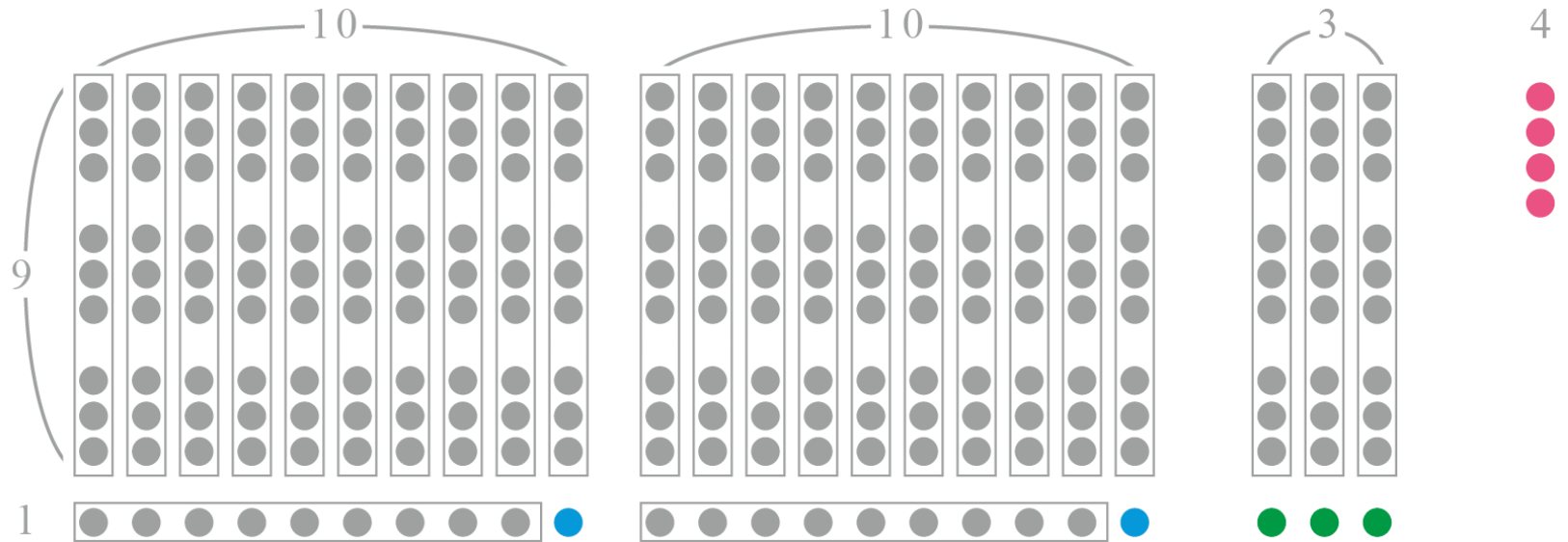
解



3、9 的倍數判別法

要判別 234 是不是 3 的倍數或 9 的倍數，
可以先將 234 寫成 $200 + 30 + 4$ ，再透過下圖
來學習它們的判別法。

$$234 = \boxed{200} + \boxed{30} + \boxed{4}$$



觀察上圖可得，

$$\begin{aligned}
 234 &= 2 \times 100 & + 3 \times 10 & + 4 \\
 &= 2 \times (99 + 1) & + 3 \times (9 + 1) & + 4 \\
 &= 2 \times 99 + 2 & + 3 \times 9 + 3 & + 4 \\
 &= (2 \times 99 + 3 \times 9) + (2 + 3 + 4)
 \end{aligned}$$

9 的倍數，也是 3 的倍數
?

所以要判別 234 是否為 9 的倍數，只要看「 $2+3+4$ 的和」是否為 9 的倍數。同樣地，要判別 234 是否為 3 的倍數，只要看「 $2+3+4$ 的和」是否為 3 的倍數。因為 $2+3+4=9$ ，所以 234 是 9 的倍數，也是 3 的倍數。



3、9 的倍數判別法

如果一個整數的各位數字和是 3 的倍數，則這個整數是 3 的倍數；

如果一個整數的各位數字和是 9 的倍數，則這個整數是 9 的倍數。

例 2 判別 3、9 的倍數

判別 6108 是否為 3 的倍數？是否為 9 的倍數？

解 6108 的各位數字和為 $6 + 1 + 0 + 8 = 15$ ，

$$15 \div 3 = 5 ; 15 \div 9 = 1 \cdots \cdots 6$$

所以 6108 是 3 的倍數，不是 9 的倍數。

#

解





隨堂練習

1. 有一個四位數 $149\square$ 是 3 的倍數，則 $\square$ 可填入哪些數字？

1、4、7。



解





隨堂練習

2. 有一個四位數 $149\square$ 是 9 的倍數，則 $\square$ 可填入哪些數字？

4。

#

解





Thinking

如果一個整數是 3 的倍數，則這個整數一定是 9 的倍數嗎？

解 不一定。

例如：12、15、21……是 3 的倍數，但不是 9 的倍數。

#

解



▶ 11 的倍數判別法

要判別 42537 是不是 11 的倍數，可以將 42537 寫成

42537

$$= 4 \times 10000 + 2 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 7$$

$$= 4 \times (9999 + 1) + 2 \times (1001 - 1) + 5 \times (99 + 1) + 3 \times (11 - 1) + 7$$

$$= 4 \times 9999 + 4 + 2 \times 1001 - 2 + 5 \times 99 + 5 + 3 \times 11 - 3 + 7$$

$$= (4 \times 9999 + 2 \times 1001 + 5 \times 99 + 3 \times 11) + (4 + 5 + 7) - (2 + 3)$$

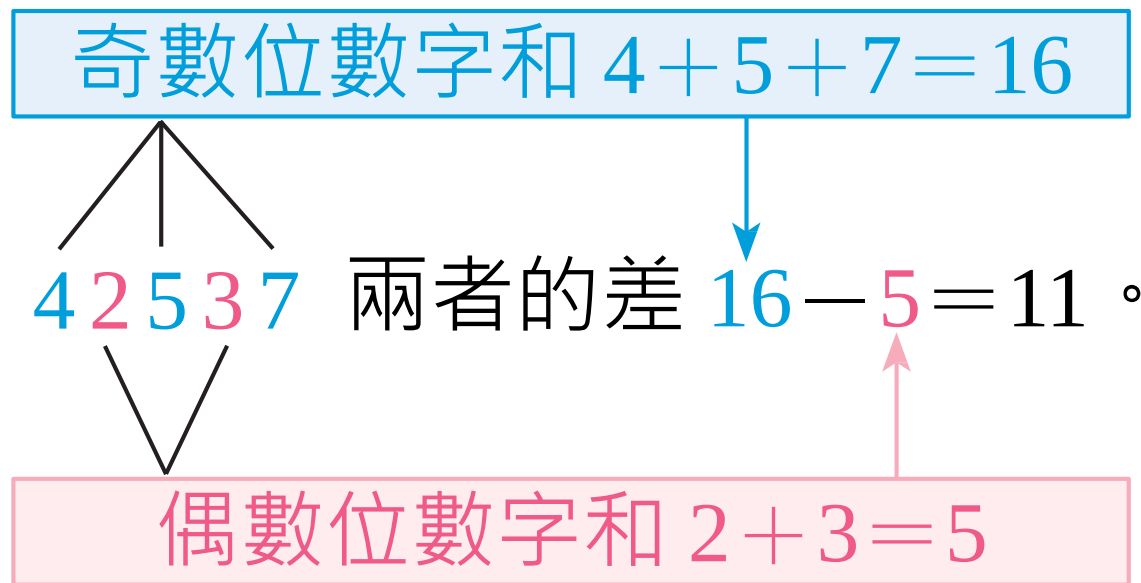
11 的倍數

(9999、1001、99、11 都是 11 的倍數)

奇數位數字和

偶數位數字和

所以 42537 除以 11 的餘數與
 $(4 + 5 + 7) - (2 + 3)$ 除以 11 的餘數相同。
 因為 $(4 + 5 + 7) - (2 + 3) = 11$ ，所以 42537 是
 11 的倍數。





11 的倍數判別法

如果一個整數的「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0，則這個整數是 11 的倍數。

例 3 判別 11 的倍數

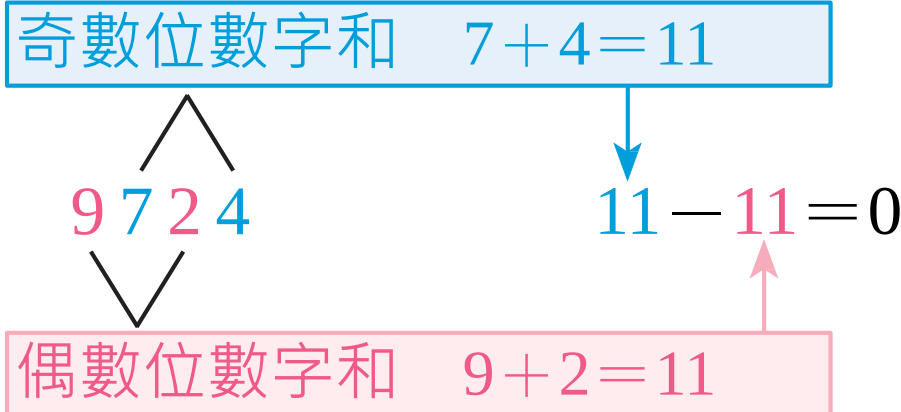
判別下列各數是否為 11 的倍數。

(1) 9724

解 (1) 9724 的奇數位數字和為 $7 + 4 = 11$ ，
偶數位數字和為 $9 + 2 = 11$ 。

$$11 - 11 = 0，$$

所以 9724 是 11 的倍數。



解



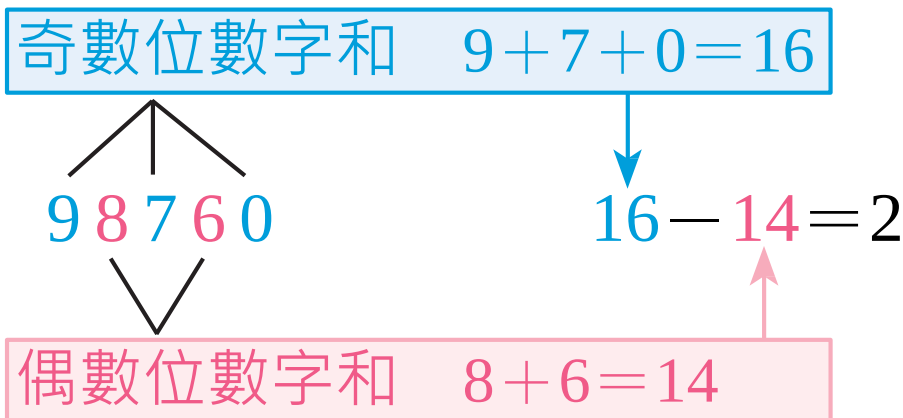
例 3 判別 11 的倍數

判別下列各數是否為 11 的倍數。

(2) 98760

解 (2) 98760 的奇數位數字和為 $9 + 7 + 0 = 16$ ，
偶數位數字和為 $8 + 6 = 14$ 。

$16 - 14 = 2$ (不是 11 的倍數或 0)，
所以 98760 不是 11 的倍數。



解





隨堂練習

1. 判別 2345、123321 是否為 11 的倍數。

2345 的奇數位數字和是 $3+5=8$ ，

偶數位數字和是 $2+4=6$ 。

$8-6=2$ (不是 11 的倍數或 0)，

所以 2345 不是 11 的倍數。

123321 的奇數位數字和是 $2+3+1=6$ ，

偶數位數字和是 $1+3+2=6$ 。

$6-6=0$ ，

所以 123321 是 11 的倍數。

#

解



 隨堂練習

2. 有一個四位數 $7\square36$ ，如果此數是 11 的倍數，則 $\square = ?$

奇數位數字和： $\square + 6$ ，

偶數位數字和： $7 + 3 = 10$ ，

$$\square + 6 - 10 = \square - 4，$$

則 $\square - 4$ 要是 11 的倍數或 0，

所以 $\square = 4$ 。

#

② 質數與合數

在國小我們學過：

- ① 如果一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為質數。例如：2、3、5、7、11 的因數都只有 1 和本身，所以 2、3、5、7、11 都是質數。
- ② 如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為合數。例如：6 的因數有 1、2、3、6，所以 6 是合數。

- ③ 1 既不是質數，也不是合數。
- ④ 2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

自然



17 年蟬



在美洲的北部存在一種生命週期很長的昆蟲，牠們的幼蟲窩在地面底下十七年以後，才會爬出地面羽化成成蟲，然後交配與產卵，接著面臨死亡，我們稱之為『十七年蟬』。如此一來，同一地區每十七年，就會出現大量的十七年蟬，而中間不見其蹤影！另外還有一種『十三年蟬』，也被觀察到有同樣的現象。

自然



17 年蟬



生物學家們推測：可能當初蟬有一種天敵，假設這種天敵的生命週期是 3 年，蟬要避開這種天敵，在演化上就是避開 3 的倍數的生命週期；同樣地，如果天敵的生命週期是 5 年，就在演化上避開 5 的倍數。依此類推，蟬的最佳生存策略就是選擇一個質數的生命週期，這樣蟬和天敵就比較難相遇！17 是一個質數，假設掠食者的生命週期為 5 年，那麼每 $5 \times 17 = 85$ 年才會受到一次危機，藉以提高存活的機率，讓族群得以代代繁衍下去。



根據達爾文 (Charles Robert Darwin, 1809-1882) 的演化論，演化是最能適應現有環境的族群才能存活下來，而適應環境的方式不一定非得要有獅子或老虎般鋒利的武器才行，像蟬這種利用生命週期的方式也是一種方法，十七年的沉寂，換得一個月的陽光。躲避天敵，繁衍族群，也是另外一種演化的策略。

對於一個 100 以內的數是否為質數，有沒有方法可以篩檢呢？

古希臘的數學家埃拉托賽尼（Eratosthenes，西元前 276-西元前 194）發現了一個方法，可以簡化逐一判別每個數是否為質數的步驟，這個方法稱為「埃拉托賽尼篩法」，以下將利用



探索活動來了解他的想法。

探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 1：

因為 1 不是質數，也不是合數，所以刪去 1。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)

解



探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 2：

剩下的數最小是 2，
圈出 2 並刪去其餘 2 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數
最小是 4。

1	②	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)

解



探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 3：

剩下的數最小是 3，
圈出 3 並刪去其餘 3 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數
最小是 9。

1	②	③	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)

解



探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 4：

剩下的數最小是 5，
圈出 5 並刪去其餘 5 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數
最小是 25。

1	②	③	4	⑤	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)

解



探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 5：

剩下的數最小是 7，
圈出 7 並刪去其餘 7 的倍數。

❓ 此步驟刪去的數
最小是 49。

1	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(接續下頁)

解



探索活動 埃拉托賽尼篩法

在 1~100 的整數中，依埃拉托賽尼的步驟實際操作並回答問題：

步驟 6：

將剩下的數全部圈起來。

❓ 此時所有圈出來的數是否都是質數？

☒ 是

☐ 否

1	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	⑳	24	25	26	27	28	㉑	30
㉓	32	33	34	35	36	㉗	38	39	40
㉙	42	㉛	44	45	46	㉝	48	49	50
51	52	㉟	54	55	56	57	58	㊱	60
㊲	62	63	64	65	66	㊴	68	69	70
㊶	72	㊸	74	75	76	77	78	㊺	80
81	82	㊼	84	85	86	87	88	㊾	90
91	92	93	94	95	96	㊿	98	99	100

#

解





Thinking

1. 由**步驟 2~步驟 5**中，每個步驟圈出的數與所刪去的最小數，有什麼關係呢？

解 每個步驟所刪去的最小數是圈出的數的平方。

#

解





Thinking

2. 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？

解 【解一】

步驟 5 完成後，剩下的數最小的是 11，圈出 11 並刪去其餘 11 的倍數，而由第 1 題可知，刪去的數最小是 $11^2 = 121$ ，已超過 100。

解





Thinking

2. 利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只需使用質數 2、3、5、7 篩檢即可，而不需使用 11 或更大的質數篩檢？

解 【解二】

因為 11 的倍數中，除了 11 以外，
11 的 2、3、4、5、6、7、8、9 倍在前面的
步驟中已經全被刪除，
而 11 的 10、11、…… 倍皆會超過 100。

#

解



由  探索活動可知，利用埃拉托賽尼篩法篩檢小於 100 的質數，只需使用 2、3、5、7 篩檢即可，且 100 以內的質數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個數。

 補給站 質數的個數

質數、合數與 1 構成了所有的正整數，而合數的個數顯然有無限多個（例如：所有 10 的倍數都是合數），於是我們想問：質數的個數也有無限多個嗎？或是存在著一個「最大的質數」，所有比此數大的整數都是合數？

早在西元前三世紀，希臘大數學家歐幾里德（Euclid of Alexandria，西元前 325-西元前 265）在其名著《幾何原本》（*Elements*）中，就對這個問題提出了解答，證明了質數的個數有無限多個。

補給站 質數的個數

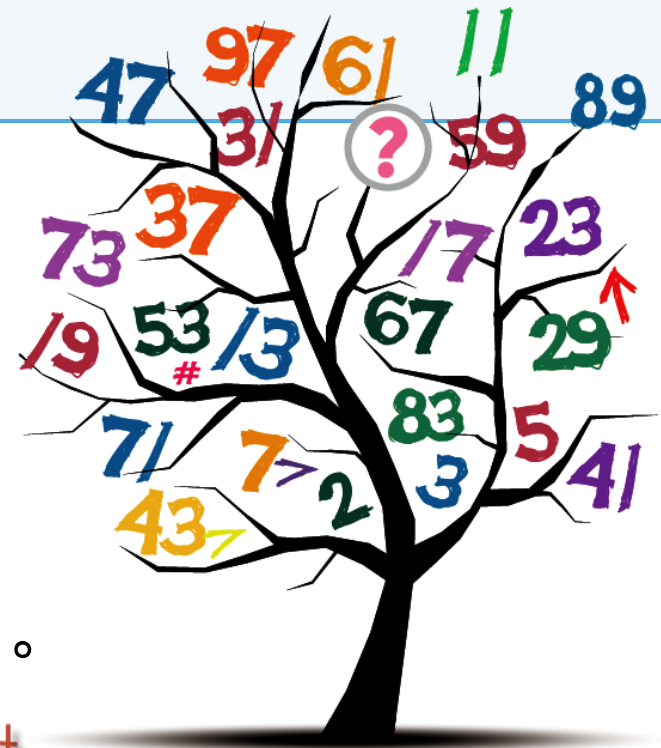
較小的質數很容易判斷，例如：2、3、5、7、11、……等；但是較大的質數要如何搜尋呢？我們可利用電腦強大的運算及判斷能力，來發掘更多的質數。



樹上 1~100 的質數好像還少了一個，?要填入什麼數呢？

答： 79 。

#



解



③ 標準分解式

如果 a 是 b 的因數，且 a 是質數，就稱 a 為 b 的**質因數**。

例如： $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$ ，15 的因數有 1、**3**、**5**、15，其中 **3**、**5** 是質數，所以 **3**、**5** 為 15 的質因數。

例 4 因數與質因數

列出 45 的所有因數，並寫出哪些是 45 的質因數。

解

$$\begin{aligned} 45 &= 1 \times 45 \\ &= 3 \times 15 \\ &= 5 \times 9 \end{aligned}$$

因此 45 的因數有 1、3、5、9、15、45，
其中 3、5 是質數，
所以 3、5 為 45 的質因數。

#



隨堂練習

列出 40 的所有因數，並寫出哪些是 40 的質因數。

$$40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10 = 5 \times 8,$$

因此 40 的因數有 1、2、4、5、8、10、20、40，
其中 2、5 是質數，所以 2、5 是 40 的質因數。

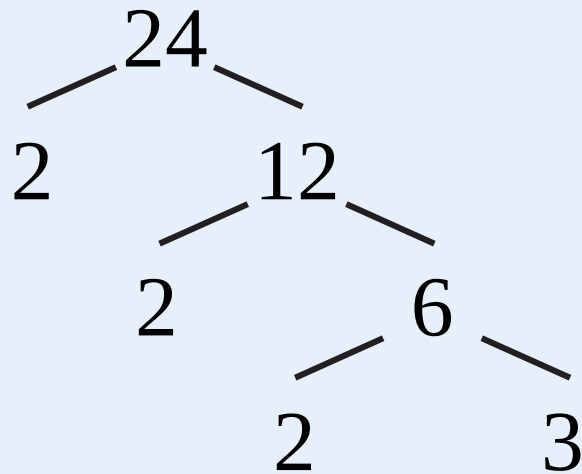


解



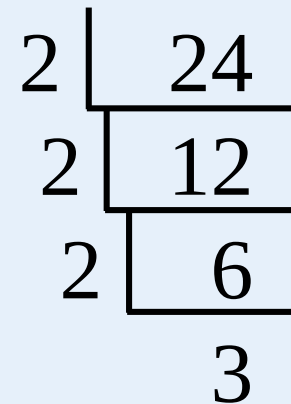
在國小時，我們學過利用樹狀圖或短除法將一個正整數完全分解為幾個質因數的乘積。
例如：

樹狀圖



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

短除法



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

這樣將一個大於 1 的正整數完全分解為幾個質因數連乘積的過程，稱為這個正整數的**質因數分解**。在數學上，為了方便溝通起見，約定做完質因數分解後，把較小的質因數寫在前面，較大的寫在後面，遇有**相同的質因數連乘時，就以指數形式表示**，像這樣的表示方式，稱為這個正整數的**標準分解式**。

例如： $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$2^3 \times 3$ 稱為 24 的標準分解式，

其中 2 與 3 都是 24 的質因數。

例 5 標準分解式

將 1020 寫成標準分解式，並求出 1020 的相異質因數。

解

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 1020} \\
 2 \overline{) 510} \\
 3 \overline{) 255} \\
 5 \overline{) 85} \\
 17
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 1020 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \\
 &= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17
 \end{aligned}$$

所以 1020 的相異質因數有 2、3、5、17。

#

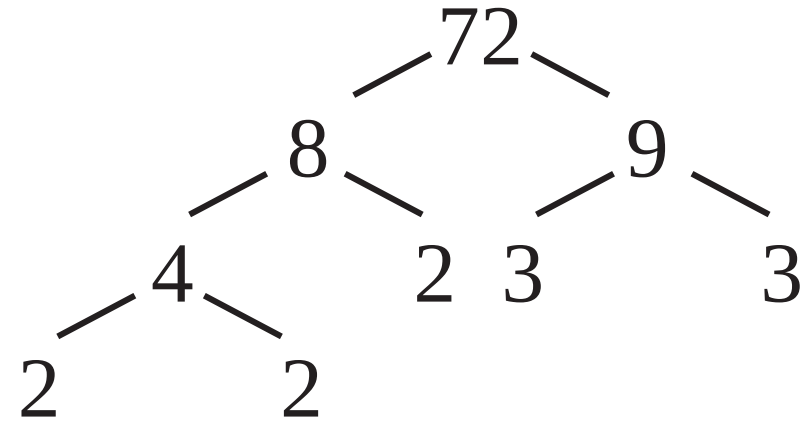
解





隨堂練習

1. 右圖是成俊用樹狀圖將 72 完全分解為質因數乘積的過程，寫出 72 的標準分解式。



$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$= 2^3 \times 3^2$$

#

解





隨堂練習

2. 將 990 寫成標準分解式，並求出 990 的相異質因數。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 990} \\
 3 \overline{) 495} \\
 3 \overline{) 165} \\
 5 \overline{) 55} \\
 11
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 990 &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 \\
 &= 2 \times 3^2 \times 5 \times 11
 \end{aligned}$$

所以 990 的相異質因數有 2、3、5、11。

#

解



接下來，我們要學習如何利用標準分解式來判別因數與倍數，做為用標準分解式求最大公因數與最小公倍數的預備。

例如：5 是否為 5^2 的因數？ 5^2 是否為 5 的倍數？

因為 $5^2 = 5 \times 5$ 可被 5 整除，

所以 5 是 5^2 的因數，

5^2 是 5 的倍數。

又如： 5^2 是否為 5^3 的因數？ 5^3 是否為 5^2 的倍數？

因為 $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ 可被 $5 \times 5 (= 5^2)$ 整除，

所以 5^2 是 5^3 的因數，

5^3 是 5^2 的倍數。

例 6 以標準分解式判別因數與倍數

判別 $2^3 \times 7$ 是否為 $2^2 \times 7$ 的倍數。

解

因為 $2^3 \times 7 = (2 \times 2 \times 7) \times 2 = (2^2 \times 7) \times 2$ ，

又 $(2^2 \times 7) \times 2$ 是 $2^2 \times 7$ 的倍數，

所以 $2^3 \times 7$ 是 $2^2 \times 7$ 的倍數。

#

解





隨堂練習

1. 下列哪些是 $2^2 \times 3^2$ 的因數？在 $\square$ 中打「✓」。



2

 $2^2 \times 3^3$  $2 \times 3 \times 5$  2×3^2

#

解



 隨堂練習

2. 下列哪些是 $2^2 \times 3$ 的倍數？在 $\square$ 中打「✓」。

☐ 2×3^2

☒ $2^3 \times 3$

☒ $2^3 \times 3^2$

☒ $2^2 \times 3^2 \times 5$

#

解





1 因數與倍數

如果 a 、 b 、 c 為任意三個整數，且 a 、 b 、 c 皆不為 0，若 $a \div b = c$ ，即 $a = b \times c$ ，則：

- (1) b 、 c 是 a 的因數。
- (2) a 是 b 、 c 的倍數。

2 2、3、4、5、9、11 的倍數判別法

- (1) 2 的倍數：個位數字是 0、2、4、6 或 8。
- (2) 3 的倍數：各位數字和是 3 的倍數。
- (3) 4 的倍數：末兩位數是 4 的倍數。
- (4) 5 的倍數：個位數字是 0、5。
- (5) 9 的倍數：各位數字和是 9 的倍數。
- (6) 11 的倍數：「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0。

3 質數與合數

- (1) 一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為質數。
- (2) 一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為合數。

例 7 是質數，10 是合數。

- (3) 1 不是質數，也不是合數；2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。



4

質因數

如果 a 是 b 的因數，而且 a 是質數，就稱 a 為 b 的質因數。

例 6 的因數有 1、2、3、6，因為 2、3 是質數，所以 2 與 3 是 6 的質因數。

5 質因數分解與標準分解式

- (1) 將一個大於 1 的正整數完全分解為幾個質因數連乘積的過程，稱為這個正整數的質因數分解。
- (2) 一個正整數做質因數分解後，將此數的所有質因數由小而大相乘，且遇有相同的質因數連乘時，就以指數形式表示，像這樣的表示方式稱為這個正整數的標準分解式。**例** $72 = 2^3 \times 3^2$



自我評量

1 判別下列各數是否為 2、3、4、5、9 或 11 的倍數，並在表格中打「✓」。

解

	102	594	4851	28160
2 的倍數	✓	✓		✓
3 的倍數	✓	✓	✓	
4 的倍數				✓
5 的倍數				✓
9 的倍數		✓	✓	
11 的倍數		✓	✓	✓



解





自我評量

2 將右表中出現的質數圈起來，恰好可形成一個英文字母，此英文字母是 F。

解

59	61	19	29
47	63	14	36
23	2	79	57
17	25	15	93
6	1	91	87



解





自我評量

3 列出 105 所有的因數，並寫出 105 的質因數。

解 105 的因數有 1、3、5、7、15、21、35、105。

105 的質因數有 3、5、7。





自我評量

4 將下列各數寫成標準分解式：

(1) 117

解

$$= 3^2 \times 13$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 117} \\ \underline{39} \\ 13 \end{array}$$

#

解





自我評量

4 將下列各數寫成標準分解式：

(2) 528

解

$$= 2^4 \times 3 \times 11$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 528} \\ 2 \overline{) 264} \\ 2 \overline{) 132} \\ 2 \overline{) 66} \\ 3 \overline{) 33} \\ 11 \end{array}$$

#

解





自我評量

4 將下列各數寫成標準分解式：

(3) 56700

解

$$= 567 \times 100$$

$$= 3^4 \times 7 \times 2^2 \times 5^2$$

$$= 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 567} \\ 3 \overline{) 189} \\ 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 100} \\ 2 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$

#

解





自我評量

5 (1) 下列哪些數是 $2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^3$ 的因數？
在 ☐ 中打「✓」。

解

☐ $2^2 \times 5$

☒ $2^2 \times 11^3$

☐ $7^2 \times 11$

☒ $2 \times 3 \times 11^2$



解





自我評量

5 (2) 下列哪些數是 44 的倍數？
在 ☐ 中打「✓」。

解

☐ 2×11

☐ 11^4

☒ $2^2 \times 3 \times 11$

☒ $2^3 \times 11^3$



解





自我評量

6 桌上有 18 個大小相同的正方體積木，今欲將 18 個積木進行分堆，每堆積木的個數都一樣，不能剩下，試回答下列問題：

(1) 利用分成的堆數，找出每堆積木的個數，並完成下列表格。

解

分成堆數	1	2	3	6	9	18
每堆個數	18	9	6	3	2	1



解





自我評量

6 桌上有 18 個大小相同的正方體積木，今欲將 18 個積木進行分堆，每堆積木的個數都一樣，不能剩下，試回答下列問題：

(2) 承 (1)，若每堆至少 2 個，但不能多於 10 個，則可能的分堆方法有哪些？

解 因每堆至少 2 個，但不能多於 10 個，所以可能的分堆方法有：

① 分成 2 堆，每堆 9 個；

② 分成 3 堆，每堆 6 個；

③ 分成 6 堆，每堆 3 個；

④ 分成 9 堆，每堆 2 個。

答：每堆 2 或 3
或 6 或 9 個。

井

解

