1-2 數線上的幾何

甲 絕對值的幾何意義

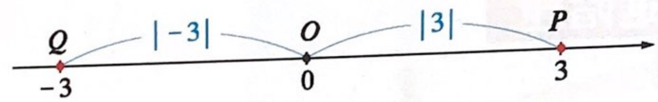
一、實數的絕對值

國中學過：每一個實數 x 都對應到數線上的一點 $P(x)$，我們以 $|x|$（讀作

的絕對值）來表示點 P 到原點 O 的距離，

例如：(a) $|3|$ 表示點 $P(3)$ 到原點 O 的距離，即 $|3|=3$.

(b) $|-3|$ 表示點 $Q(-3)$ 到原點 O 的距離，即 $|-3|=3$.



▲ 圖 1-10

因為絕對值表示距離，所以對任意實數 x，都有 $|x|\geq 0$，

因此，$|x|$ 有如下的性質：

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{當 } x\geq 0 \text{ 時}, \\ -x, & \text{當 } x<0 \text{ 時}. \end{cases}$$

隨堂練習

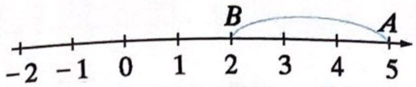
試說明 $|x|=5$ 的幾何意義，並求滿足此方程式的所有 x 值.

二、數線上兩點的距離

設 $A(a)$, $B(b)$ 為數線上相異兩點，則 A, B 兩點的距離要如何表示呢？我們

國中學過，數線上 A, B 兩點的距離為「右邊的點坐標減去左邊的點坐標」.

例如：設 $A(5)$, $B(2)$ 為數線上兩點，則 A, B 兩點的距離 $\overline{AB}=5-2=3$,



▲ 圖 1-11

由於 $|5-2|=3$, $|2-5|=3$, 因此，我們可用兩點坐標相減的絕對值，來表示這兩點的距離，所以 $A(a)$, $B(b)$ 的距離可以用 $|a-b|$ 表示 .

數線上兩點距離

設 $A(a)$, $B(b)$ 為數線上的兩點，則 $|a-b|$ 為 A, B 兩點的距離 .

由於 $|a-b|$ 表示數線上兩點 $A(a)$, $B(b)$ 的距離，所以 $|a-b|\ge 0$,
因此，$|a-b|$ 有如下的性質：

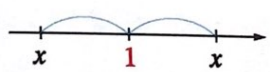
$$|a-b|=\begin{cases} a-b, & \text{當 } a\ge b \text{ 時}, \\ -(a-b), & \text{當 } a<b \text{ 時}. \end{cases}$$

例題 1

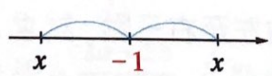
試說明下列絕對值的幾何意義 .

(1) $|x-1|$. (2) $|x+1|$.

解 (1) $|x-1|$ 表示在數線上坐標為 x 與坐標為 1 兩點的距離，如圖所示 .



(2) $|x+1|=|x-(-1)|$ 表示在數線上坐標為 x 與坐標為 -1 兩點的距離，如圖所示 .



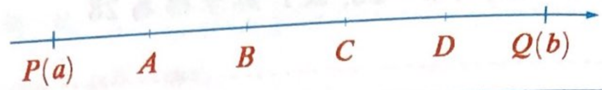
隨堂練習

試說明下列絕對值的幾何意義 .

(1) $|x-3|$. (2) $|x+2|$.

隨堂練習

設 $P(a)$, $Q(b)$ 為數線上兩點，其中 $a<b$, 若 A, B, C, D 為 $\overline{PQ}$ 的五等分點，如下圖所示，則 $\dfrac{3a+2b}{5}$, $\dfrac{2a+3b}{5}$, $\dfrac{a+4b}{5}$, 三數分別是哪些點的坐標？並比較其大小.



丙 含絕對值的一次方程式與不等式

底下我們用絕對值的幾何意義來討論絕對值方程式與不等式.

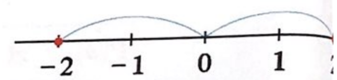
例題 4

試說明下列各式的幾何意義，並求其解.

(1) $|x|=2$. (2) $|x|<2$. (3) $|x|>2$.

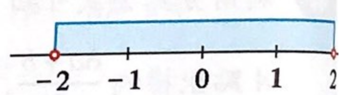
解 (1) $|x|=2$ 表示點 $P(x)$ 與原點 O 的距離等於 2,

如右圖可知 $x=2$ 或 $x=-2$.



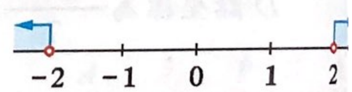
(2) $|x|<2$ 表示點 $P(x)$ 與原點 O 的距離小於 2,

如右圖可知 $-2<x<2$.



(3) $|x|>2$ 表示點 $P(x)$ 與原點 O 的距離大於 2,

如右圖可知 $x<-2$ 或 $x>2$.



隨堂練習

試說明下列各式的幾何意義，並求其解.

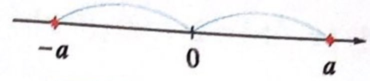
(1) $|x|=3$. (2) $|x|<3$. (3) $|x|>3$.

仿例題 4 的討論，我們可推得如下的結果：

絕對值一次方程式與不等式的解與圖形

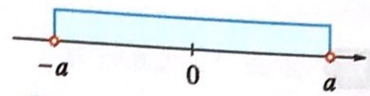
設 $a > 0$.

(1) 若 $|x| = a$, 則 $x = a$ 或 $x = -a$.



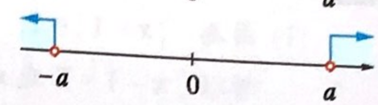
(2) 若 $|x| < a$, 則 $-a < x < a$.

（若 $|x| \le a$, 則 $-a \le x \le a$.）



(3) 若 $|x| > a$, 則 $x > a$ 或 $x < -a$.

（若 $|x| \ge a$, 則 $x \ge a$ 或 $x \le -a$.）



絕對值不等式的解常是一個實數區間，底下介紹區間的集合符號表示法：

設 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$.

範圍	區間符號	範圍	區間符號
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x > a$	(a, ∞)
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x \le b$	$(-\infty, b]$
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < b$	$(-\infty, b)$

註：(1) 符號「∞」表示無窮大的意思，讀作無窮大.

(2) $[a, b]$ 為閉區間，(a, b) 為開區間.