

2-2 根式的運算



帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2} + 3$ 、 $\sqrt{2} - 1$ 、 $(-2) \times \sqrt{2}$ 、 $1 \div \sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

① 根式的表示

多項式的簡記

$2 \cdot x$ 可寫成 $2x$ 。

$(-\frac{1}{2}) \cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。

$x \div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。



根式的簡記

$2 \cdot \sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。

$(-\frac{1}{2}) \times \sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{2} \div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。



根式的簡記

若 $a \neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b} \quad (2) \sqrt{b} \div a = \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3 \times 2\sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法，我們可以做整數或分數與根式的運算。



隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $-5 \times 2\sqrt{3}$

(2) $-\frac{4}{3}\sqrt{2} \times (-6)$

(3) $(-4\sqrt{2}) \div 6$

② 根式的乘法

由前面的說明可以得到，若 a 、 b 、 c 為正數或 0 時， $a \times b\sqrt{c} = (a \times b) \times \sqrt{c}$ 。
 那麼 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a \times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 $2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2}$ ，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \times 3} (= \sqrt{6})$ 呢？
 因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2$
 $= 2 \times 3$

而且 $(\sqrt{2 \times 3})^2 = 2 \times 3$

由於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2 \times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。事實上，若 $a \geq 0$ ，
 $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

📌 根式的乘法運算

若 a 、 b 為正數或 0，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 1 根式的乘法運算

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

解 (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

$$= \sqrt{3 \times 7}$$

$$= \sqrt{21}$$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

$$= \sqrt{6 \times \frac{5}{3}}$$

$$= \sqrt{10}$$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

$$= (-3) \times \sqrt{3} \times (-2) \times \sqrt{5}$$

$$= (-3) \times (-2) \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{15}$$

 隨堂練習

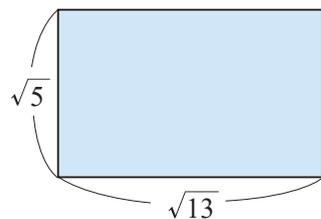
1. 求下列各根式的乘積：

$$(1) \sqrt{5} \times \sqrt{14}$$

$$(2) \sqrt{14} \times \sqrt{\frac{13}{7}}$$

$$(3) (-2\sqrt{3}) \times (4\sqrt{2})$$

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。



例 2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

解 $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

$$2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

因為 $\sqrt{18} > \sqrt{12}$ ，所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

也可以這樣做：

$$(3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 18$$

$$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3}) = 12$$

因為 $18 > 12$ ，所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

 隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。