4-2 配方法與公式解

1 利用平方根概念解一元二次方程式　2 利用配方法解一元二次方程式
3 一元二次方程式的公式解

主題 1 利用平方根概念解一元二次方程式

我們在 4-1 節學過利用因式分解解一元二次方程式，但是像 $x^2-13=0$ 這樣的方程式，無法用前面學過的方法解題時，又要如何求解呢？

首先，觀察方程式 $x^2-13=0$，可以發現如果將方程式寫成 $x^2=13$ 的形式，就可以利用平方根的概念，得到 $x=\pm\sqrt{13}$。

例 1 利用平方根概念解方程式

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2=25$　　(2) $(x+3)^2=16$　　(3) $(x+1)^2=2$

學習時光機

對於兩數 a、b，若 $a\geq 0$，且 $b^2=a$，就稱 b 是 a 的平方根。

解 (1) 由 $x^2=25$，得 x 是 25 的平方根，

即 $x=\pm\sqrt{25}$，$x=\pm 5$，

所以方程式的解為 5 和 -5。

(2) 由方程式 $(x+3)^2=16$，得 $x+3$ 是 16 的平方根，

即 $x+3=\pm\sqrt{16}$，$x+3=\pm 4$，$x=-3\pm 4$，得 $x=1$ 或 $x=-7$，

所以方程式的解為 1 和 -7。

(3) 由方程式 $(x+1)^2=2$，得 $x+1$ 是 2 的平方根，

即 $x+1=\pm\sqrt{2}$，$x=-1\pm\sqrt{2}$，

所以方程式的解為 $-1\pm\sqrt{2}$。

Hint

$-1\pm\sqrt{2}$ 也可以寫成 $-1+\sqrt{2}$ 和 $-1-\sqrt{2}$。

當一元二次方程式的解含有根號時，可以利用計算機求出近似值，例如：

$-1+\sqrt{2}$ → 1 [+/-] [+] 2 [SHIFT] [$\sqrt{\ }$ / x^2] [=] 0.414213562

$-1-\sqrt{2}$ → 1 [+/-] [−] 2 [SHIFT] [$\sqrt{\ }$ / x^2] [=] -2.414213562

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2=121$　(2) $(x-4)^2=25$　(3) $(x-2)^2=3$

例 2

先移項再利用平方根概念解方程式

解下列各一元二次方程式。

(1) $(x+7)^2-3=0$　(2) $(2x-3)^2-7=4$

解 (1) $(x+7)^2-3=0$

移項

$(x+7)^2=3$

$x+7=\pm\sqrt{3}$

$x=-7\pm\sqrt{3}$

所以方程式的解為 $-7\pm\sqrt{3}$。

(2) $(2x-3)^2-7=4$

移項

$(2x-3)^2=11$

$2x-3=\pm\sqrt{11}$

$2x=3\pm\sqrt{11}$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{11}}{2}$ (或 $x=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}$)

所以方程式的解為 $\dfrac{3\pm\sqrt{11}}{2}$。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $(x-3)^2-23=0$　(2) $(3x+5)^2-15=2$

主題 2 利用配方法解一元二次方程式

由主題 1 我們發現，若能將一元二次方程式整理成形如 $(ax+b)^2=c$（其中 $a\neq0$，$c>0$）的式子，就可利用平方根的概念求解，其中 $(ax+b)^2$ 稱為**完全平方式**。但是像 $x^2+2x-1=0$ 這類的方程式，既難以用因式分解法求解，也不符合 $(ax+b)^2=c$ 的形式，要如何求解呢？

首先，觀察第 163 頁例 1(3) $(x+1)^2=2$

$$\begin{aligned} (x+1)^2&=2 \\ &\downarrow \text{展開} \\ x^2+2x+1&=2 \\ &\downarrow \text{化簡} \\ x^2+2x-1&=0 \end{aligned}$$

而此方程式 $x^2+2x-1=0$ 正是我們想要求解的方程式。由此可知，若能將 $x^2+2x-1=0$ 整理成 $(x+1)^2=2$，就可利用平方根的概念求此方程式的解。但要如何將 $x^2+2x-1=0$ 整理成 $(x+1)^2=2$ 呢？

我們將前面展開化簡 $(x+1)^2=2$ 的過程反推回去：

$$\text{展開化簡}\ \Big\uparrow \quad \begin{aligned} x^2+2x-1&=0 \\ x^2+2x+1&=2 \\ (x+1)^2&=2 \end{aligned} \quad \Big\downarrow\ \text{配方法}$$

可發現能利用平方根概念求解的關鍵，在於以和的平方公式，將 x^2+2x 加上 1 配成完全平方式 $(x+1)^2$。

事實上，利用和的平方公式（或差的平方公式），將一個式子配成完全平方式的方法，我們稱為**配方法**。

例 3 配成完全平方式

在下列各空格中分別填入適當的數，使各式成為完全平方式。

(1) $x^2+12x+\square$　　(2) $x^2-7x+\square$

解 (1) 利用和的平方公式：$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$

$$x^2+12x+\square=x^2+2\cdot x\cdot 6+\square$$

所以 $b=6$，$b^2=6^2=36$，

$$x^2+12x+\boxed{36}=x^2+2\cdot x\cdot 6+\boxed{6^2}=(x+6)^2\text{。}$$

(2) 利用差的平方公式：$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$

$$x^2-7x+\square=x^2-2\cdot x\cdot \frac{7}{2}+\square$$

所以 $b=\frac{7}{2}$，$b^2=(\frac{7}{2})^2=\frac{49}{4}$，

$$x^2-7x+\boxed{\frac{49}{4}}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{7}{2}+\boxed{(\frac{7}{2})^2}=(x-\frac{7}{2})^2\text{。}$$

由例 3 可發現以下的結論：

x^2+px **加上** $(\frac{p}{2})^2$ 就可配成完全平方式，即 $\boldsymbol{x^2+px+(\frac{p}{2})^2=(x+\frac{p}{2})^2}$。

x^2-px **加上** $(\frac{p}{2})^2$ 就可配成完全平方式，即 $\boldsymbol{x^2-px+(\frac{p}{2})^2=(x-\frac{p}{2})^2}$。

隨堂練習

在下列各空格中分別填入適當的數，使各式成為完全平方式。

(1) $x^2-6x+\square=(x-\triangle)^2$　　(2) $x^2+\frac{1}{3}x+\square=(x+\triangle)^2$

學會將一元二次方程式整理成 $(x+b)^2=c$ 的形式，就可以利用平方根的概念來求解。我們來看下面的例題。

例 4 利用配方法解一元二次方程式

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2+2x-2=0$　　(2) $x^2=x+1$

解 (1) $x^2+2x-2=0$

移項

$x^2+2x=2$

等號兩邊同加 1^2

$x^2+2x+1^2=2+1^2$

$(x+1)^2=3$

$x+1=\pm\sqrt{3}$，$x=-1\pm\sqrt{3}$

所以方程式的解為 $-1\pm\sqrt{3}$。

(2) $x^2=x+1$

移項

$x^2-x=1$

等號兩邊同加 $(\frac{1}{2})^2$

$x^2-x+(\frac{1}{2})^2=1+(\frac{1}{2})^2$

$(x-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$

$x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

所以方程式的解為 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

Hint

$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 也可寫成 $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2-10x=-3$　　(2) $x^2=2-5x$

若一元二次方程式中常數項的絕對值很大，不容易用十字交乘法來解，這類的方程式就常用配方法求解。

例 5 利用配方法解一元二次方程式

解一元二次方程式 $x^2-4x-396=0$。

解

$x^2-4x-396=0$

$x^2-4x=396$ 移項

$x^2-4x+2^2=396+2^2$ 等號兩邊同加 2^2

$(x-2)^2=400$

$x-2=\pm\sqrt{400}=\pm 20$

$x=2\pm 20$

$x=22$ 或 $x=-18$

所以方程式的解為 22 和 -18。

隨堂練習

解一元二次方程式 $x^2-6x=891$。

當一元二次方程式的 x^2 項係數不為 1 時，可利用等量公理使 x^2 項係數變成 1，再利用配方法求解。

例 6 利用配方法解一元二次方程式

解下列各一元二次方程式。

(1) $2x^2-8x+3=0$ (2) $3x^2+6x=-3$

(3) $-2x^2+3x-2=0$

解

(1) $2x^2-8x+3=0$ 等號兩邊同除以 2

$x^2-4x+\frac{3}{2}=0$

$x^2-4x=-\frac{3}{2}$

$x^2-4x+2^2=-\frac{3}{2}+2^2$

$(x-2)^2=\frac{5}{2}$，$x-2=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x-2=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x=2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

所以方程式的解為 $2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$。

(2) $3x^2+6x=-3$ 等號兩邊同除以 3

$x^2+2x=-1$

$x^2+2x+1^2=-1+1^2$

$(x+1)^2=0$，$x+1=0$

$x=-1$ (重根)

所以方程式的兩個解都是 -1。

(3) $-2x^2+3x-2=0$ 等號兩邊同除以 -2

$x^2-\frac{3}{2}x+1=0$

$x^2-\frac{3}{2}x=-1$

$x^2-\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=-1+(\frac{3}{4})^2=-1+\frac{9}{16}$

$(x-\frac{3}{4})^2=-\frac{7}{16}$

目前我們學過的任意數，其平方都不是負數，

也就是說，找不到任何一個數 x 能使 $(x-\frac{3}{4})^2<0$，

所以我們會說此方程式無解。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $3x^2+16x-1=0$

(2) $7x^2-28x+28=0$

(3) $-2x^2+x-4=0$

在利用配方法解一元二次方程式時，是否覺得解題的過程有些公式化的步驟？由第 169 頁例 6 我們可以發現，一元二次方程式的解會有下列三種情況：**兩個相異的根**、**重根**或**無解**。

接著，我們就來探討一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 利用配方法求解的過程。

主題 3　一元二次方程式的公式解

在利用配方法解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之前，為了方便理解計算過程，我們先將一元二次方程式 x^2 項係數 a 限制為正數。

利用配方法解一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$) 的步驟如下：

$ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)		$2x^2+5x+1=0$
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$	等號兩邊 $\div a$ (使 x^2 項係數為 1)	$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$
$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$	常數項 $\frac{c}{a}$ 移到等號右邊	$x^2+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$
$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$	等號兩邊 $+(\frac{b}{2a})^2$	$x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=-\frac{1}{2}+(\frac{5}{4})^2$
$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}=\boxed{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 已知 $4a^2>0$，若 $b^2-4ac\geq 0$，則 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$	等號左邊 配成完全平方式	$(x+\frac{5}{4})^2=\frac{17}{16}$
$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	利用平方根概念	$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	解出 x	$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$

也就是說：**當 $a>0$ 且 $b^2-4ac\geq 0$ 時，**

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，一般稱它為**公式解**。

在前面討論公式解時是假設 $b^2-4ac\geq 0$，得到 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。其實，方程式解的情形可以分別由 b^2-4ac 為正數、0 或負數來討論：

(1) **當 $b^2-4ac>0$ 時，**

方程式的兩根為 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 和 $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

即方程式有**兩個相異的根**。

(2) **當 $b^2-4ac=0$ 時，**

方程式的兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm 0}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$，

即方程式的**兩根相等**，此時稱 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 為**重根**。

(3) **當 $b^2-4ac<0$ 時，**

因為 $4a^2>0$，所以 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，得方程式 $(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$。

又因為找不到任何一個數 x 能使 $(x+\dfrac{b}{2a})^2<0$。

因此在 $b^2-4ac<0$ 的情況下，此方程式**無解**。

從以上的討論可知，由 b^2-4ac 為正數、0 或負數，便能判別方程式解的情形，因此稱 b^2-4ac 為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的**判別式**。

Key point

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$) 的判別式與其解

判別式 b^2-4ac	解的情形	解的值
(1) $b^2-4ac>0$	兩個相異的根	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
(2) $b^2-4ac=0$	兩根相等 (重根)	$x=-\dfrac{b}{2a}$ (重根)
(3) $b^2-4ac<0$	無解	

隨堂練習

利用判別式判斷下列各方程式解的情形。

(1) $4x^2+2x+\dfrac{1}{4}=0$　　(2) $2x^2-9x+5=0$　　(3) $x^2+x+2=0$

例 7 利用公式解解一元二次方程式 ($b^2-4ac>0$)

解下列各一元二次方程式。

(1) $5x^2-13x+7=0$　　(2) $3x^2+7x=-2$

解 (1) 令 $a=5$、$b=-13$、$c=7$，

得 $b^2-4ac=(-13)^2-4\times5\times7=169-140=29>0$，

所以方程式的兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-13)\pm\sqrt{29}}{2\times5}$

$=\dfrac{13\pm\sqrt{29}}{10}$。

(2) 先將方程式 $3x^2+7x=-2$ 改寫為 $3x^2+7x+2=0$，

令 $a=3$、$b=7$、$c=2$，

得 $b^2-4ac=7^2-4\times3\times2=25>0$，

故方程式的兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-7\pm\sqrt{25}}{2\times3}=\dfrac{-7\pm5}{6}$，

即 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=-2$，

所以方程式的兩根為 $-\dfrac{1}{3}$ 和 -2。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2+8x+12=0$　　(2) $3x^2+5x=7$

例 8 利用公式解解一元二次方程式 ($b^2-4ac\leq 0$)

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2+22x+121=0$　　(2) $2x^2+3x+4=0$

解 (1) 令 $a=1$、$b=22$、$c=121$，

得 $b^2-4ac=22^2-4\times1\times121=0$，

所以方程式的兩根為 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{22}{2\times1}=-11$ (重根)。

(2) 令 $a=2$、$b=3$、$c=4$，

得 $b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=-23<0$，

所以方程式無解。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2+x+\dfrac{1}{4}=0$　　(2) $x^2-4x+5=0$

對於任意的一元二次方程式，只要 x^2 項係數大於 0，就可以使用公式解。若 x^2 項係數為負數時，是否也還能使用公式解呢？

例 9　利用公式解解一元二次方程式

解一元二次方程式 $-3x^2-x+3=0$。

解　$-3x^2-x+3=0$

等號兩邊同乘以 (-1)

$3x^2+x-3=0$

令 $a=3$、$b=1$、$c=-3$，

得 $b^2-4ac=1^2-4\times3\times(-3)=37>0$，

所以方程式的兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$。

若例 9 直接利用公式解：

令 $a=-3$、$b=-1$、$c=3$，得 $b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-3)\times3=37>0$，

所以方程式的兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{-6}=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$。

比較上面兩種解法，發現答案是相同的。也就是說，當一個一元二次方程式的 x^2 項係數為負數時，也可以直接利用公式求解，因此得到以下結論：

Key point

一元二次方程式的公式解

當 $a\neq0$ 且 $b^2-4ac\geq0$，則一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

例 10 已知方程式解的情形的應用

已知 x 的一元二次方程式 $x^2-10x+(5m+10)=0$ 有重根，求 m 的值及此方程式的解。

解 因為方程式有重根，所以 $b^2-4ac=0$，

即 $b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(5m+10)=0$，

$100-20m-40=0$

$20m=60$

$m=3$

將 $m=3$ 代入原方程式，

得原方程式為 $x^2-10x+25=0$，即 $(x-5)^2=0$，

所以方程式的解為 $x=5$ (重根)。

隨堂練習

已知 x 的一元二次方程式 $x^2-8x+(3m+7)=0$ 有兩個相異的根，求 m 的最大整數值。

目前為止，我們知道解一元二次方程式的方法有：
因式分解 (提公因式、乘法公式、十字交乘法)、配方法和公式解，
只要根據題型選擇適當的方法，要求出一元二次方程式的解就容易多了。

重點整理

1 利用平方根概念解一元二次方程式

形如 $x^2=k\ (k\geq 0)$ 及 $(ax+b)^2=c\ (a\neq 0、c>0)$ 的一元二次方程式，可以利用平方根的概念來求解。

例 $(2x+3)^2=8$，$2x+3=\pm 2\sqrt{2}$，$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}$，

所以方程式的解為 $-\frac{3}{2}\pm\sqrt{2}$。

2 將 $x^2\pm px$ 配成完全平方式

將形如 $x^2\pm px$ 的式子加上 $(\frac{p}{2})^2$，可以配成完全平方式。

例 $x^2+14x+(\frac{14}{2})^2=x^2+14x+7^2=(x+7)^2$。

3 利用配方法解一元二次方程式

利用配方法解一元二次方程式的步驟如下：

(1) 利用等量公理使 x^2 項的係數變為 1。

(2) 將方程式整理為 $x^2+px=c$ 的形式。

(3) 等號兩邊同加 $(\frac{p}{2})^2$。

(4) 等號左邊配成完全平方式。

(5) 利用平方根概念解出 x。

例 $3x^2+6x-6=0$

$x^2+2x-2=0$

$x^2+2x=2$

$x^2+2x+(\frac{2}{2})^2=2+(\frac{2}{2})^2$

$(x+1)^2=3$

$x+1=\pm\sqrt{3}$，$x=-1\pm\sqrt{3}$

4 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的判別式與其解

判別式 b^2-4ac	解的情形	解的值
(1) $b^2-4ac>0$	兩個相異的根	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
(2) $b^2-4ac=0$	兩根相等 (重根)	$x=-\frac{b}{2a}$ (重根)
(3) $b^2-4ac<0$	無解	

自我評量

1 在下列各空格中分別填入適當的數，使各式成為完全平方式。 P.166 例 3

(1) x^2+18x+__________$=(x+$__________$)^2$

(2) x^2-x+__________$=(x-$__________$)^2$

2 解下列各一元二次方程式。

(1) $(x+3)^2=19$ P.163 例 1

(2) $(3x-2)^2-16=0$ P.164 例 2

(3) $2x^2-8x-1792=0$ P.168 例 5、P.169 例 6

(4) $3x^2+5x+1=0$ P.173 例 7

(5) $9x^2+4=12x$ P.174 例 8

(6) $-5x^2+2x-3=0$ P.175 例 9

3 已知 x 的一元二次方程式 $mx^2-5x+1=0$ 無解，求 m 的最小整數值。 P.176 例 10

挑錯題

以下是小翊和小妍「解一元二次方程式 $x^2+3x-1=0$」的過程，判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：

利用配方法

$x^2+3x-1=0$

$x^2+3x=1$

$x^2+3x+3^2=1+3^2$

$(x+3)^2=10$

$x+3=\pm\sqrt{10}$

$x=-3\pm\sqrt{10}$

小妍：

利用公式解

$x^2+3x-1=0$

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$