

## 2-1 質因數分解

## 2-1 重點

1. 因數與倍數
2. 倍數的判別法
3. 質數與合數
4. 100 以內的質數
5. 標準分解式

## 溫故學習

1. 將 60 做質因數分解可得：\_\_\_\_\_。
2. 求 24、36 的最大公因數：\_\_\_\_\_。
3. 求 30、45 的最小公倍數：\_\_\_\_\_。
4. 計算下列各式：

$$(1) \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (2) \frac{3}{4} \times \frac{6}{11} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (3) \frac{3}{4} \div \frac{6}{11} = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 因數與倍數

如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為任意三個正整數，而且  $a \div b = c$ ，亦即  $a = b \times c$

則稱 (1)  $b$ 、 $c$  是  $a$  的因數。

(2)  $a$  是  $b$ 、 $c$  的倍數。

## 例題 1 因數、倍數的判別

判別下列敘述是否正確。

(1) 210 是 14 的倍數

(2) 15 是 235 的因數

## 隨堂練習

1. 判別下列敘述是否正確。

(1) 91 是 7 的倍數

正確

錯誤

(2) 11 是 1212 的因數

正確

錯誤

2. 下列各數中，哪些是 196 的因數？

2、3、5、7、14、21

**※因數、倍數可以是負數**

一個整數的因數中，大於 0 的因數稱為此整數的**正因數**，小於 0 的因數稱為此整數的**負因數**；同理，一個整數的倍數中，大於 0 的倍數稱為此整數的**正倍數**，小於 0 的倍數稱為此整數的**負倍數**。如： $156 = (-13) \times (-12)$

在國中階段，如果沒有特別說明，因數與倍數都是指正因數與正倍數。

**※1 和 0 這兩個數的因數與倍數：**

- 1 因為任何整數  $a$  除以 1 的結果都是  $a$  (即  $a \div 1 = a$ )，所以所有整數都是 1 的倍數，1 是任何整數的因數。
- 2 因為 0 不可以當作除數，所以 0 不是任何整數的因數。
- 3 因為 0 除以任意的非零整數  $a$ ，所得的結果都是 0 (即  $0 \div a = 0$ )，所以 0 是任何非零整數的

**例題 2** 因、倍數的應用

若  $n$  是正整數，且 20 是  $n$  的倍數，寫出  $n$  的所有可能的值。

**隨堂練習**

若  $n$  是正整數，且  $n$  是 36 的因數，寫出  $n$  的所有可能的值。

**※2、5 的倍數判別法**

1. 如果一個整數的個位數字是 0、2、4、6 或 8，則這個整數是 2 的倍數。
2. 如果一個整數的個位數字是 0 或 5，則這個整數是 5 的倍數。

**例題 3** 判別 2、5 的倍數

下列各數中，哪些是 2 的倍數？哪些是 5 的倍數？

76、459、147、237、66、89、815、1234、6590

**隨堂練習**

有一個四位數  $149\square$ ，既是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則  $\square = ?$

**※4 的倍數判別法**

如果一個整數的末兩位數字是 4 的倍數，則這個整數是 4 的倍數。

**例題 4** 判別 4 的倍數

(1)536

(2)2370

**隨堂練習**

有一個四位數  $23\square 4$ ，如果此數是 4 的倍數，則  $\square$  可以填入哪些數字？

**動動腦**

17528 是不是 8 的倍數呢？

想想看，除了直接利用除法之外，還有沒有更簡便的方法呢？

(提示： $1000=125\times 8$ )

**※3 的倍數判別法**

如果一個整數的各位數字和是 3 的倍數，則這個整數是 3 的倍數。

**※9 的倍數判別法**

如果一個整數的各位數字和是 9 的倍數，則這個整數是 9 的倍數。

**例題 5** 判別 3、9 的倍數

判別下列各數是不是 3 的倍數？是不是 9 的倍數？

(1)536

(2)4173

**隨堂練習**

1. 下列各數中，哪些是 3 的倍數？哪些是 9 的倍數？

76、459、147、237、66、89、815、1234、6592

3 的倍數：\_\_\_\_\_ 9 的倍數：\_\_\_\_\_

2. 有一個三位數  $7\square 6$ ，如果此數是 3 的倍數，則  $\square$  可以填入哪些數字？

**動動腦**

1. 如果一個整數是 9 的倍數，則這個整數一定是 3 的倍數嗎？
2. 如果有一個整數既是 2 的倍數，也是 3 的倍數，則這個整數一定是 6 的倍數嗎？

**※11 的倍數判別法**

如果一個整數的「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數（包含 0），則這個整數是 11 的倍數。

**例題 6 判別 11 的倍數**

判別下列各數是不是 11 的倍數。

(1)9724

(2)98760

**隨堂練習**

1. 判別 2345、123321 是不是 11 的倍數。

2. 有一個四位數  $7\square 36$ ，如果此數是 11 的倍數，則  $\square = ?$

※質數與合數

- 1 如果一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為質數。例如：2、3、5、7
- 2 如果一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為合數。例如：6
- 3 1 既不是質數，也不是合數。
- 4 2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

例題 7 質數、合數的判別

寫出 10、12、17 的因數，並判別這三個數中，哪些是質數？哪些是合數？

隨堂練習

寫出 22、23、24 的因數，並判別這三個數中，哪些是質數？哪些是合數？

※100 以內的質數

古希臘的數學家埃拉托賽尼 (Eratosthenes, 276BC-194BC) 發現了一個非常美妙的質數篩法，可以簡化逐一判別每個數是否為質數的步驟，這個方法稱為「埃拉托賽尼篩法」。

步驟 1：因為 1 不是質數，也不是合數，所以刪去 1。

步驟 2：剩下最小的數是 2，圈出 2 並刪去其餘 2 的倍數。

步驟 3：剩下最小的數是 3，圈出 3 並刪去其餘 3 的倍數。……

利用埃拉托賽尼篩法，找出小於 100 的質數：\_\_\_\_\_，共\_\_\_\_\_個數。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

動動腦

利用埃拉托賽尼篩法找出小於 100 的質數，為何只須使用質數 2、3、5、7 篩檢就可以，而不須使用 11 (或更大的質數) 篩檢？

**※質因數分解**

將一個正整數完全分解為幾個質因數連乘積的過程，稱為這個正整數的**質因數分解**。

**※標準分解式**

約定作完質因數分解後，把較小的質因數寫在前面，較大的寫在後面，遇有相同的質因數連乘時，就以指數形式表示，像這樣的表示方式，稱為這個正整數的**標準分解式**。

註：一個正整數寫成標準分解式後，任取一個質因數或幾個質因數的乘積，都是這個整數的因數。

**例題 9** 標準分解式

將 1020 寫成標準分解式，並求出 1020 的相異質因數。

**隨堂練習**

1. 已知  $36=2^2 \times 3^2$ ，下列哪些是 36 的因數？（複選）

(1) 2

(2)  $2^2 \times 3^3$

(3)  $2 \times 3 \times 5$

(4)  $2 \times 3^2$

2. 將下列各數寫成標準分解式，並求出這些數的相異質因數。

(1) 260

(3) 756

**例題 10** 綜合應用

$a$ 、 $b$  為兩個正整數，其中  $a < b$ ，如果  $a \times b = 70$ ，且  $a + b = 19$ ，則  $a$ 、 $b$  之值分別是多少？

**隨堂練習**

- $a$ 、 $b$  為兩個正整數，如果  $a \times b = 98$ ，且  $a - b = 7$ ，則  $a$ 、 $b$  之值分別是多少？
  
- $a$ 、 $b$  為兩個正整數，其中  $a < b$ ，如果  $a \times b = 36$ ，且  $a + b$  為質數，則  $a$ 、 $b$  之值分別為多少？

**2-1 自我評量**

- 判別下列各數是否為 2、3、4、5、9 或 11 的倍數，並在表格中打「✓」。

	102	594	4851	28160
2 的倍數				
3 的倍數				
4 的倍數				
5 的倍數				
9 的倍數				
11 的倍數				

- 下列哪些數是 6 的倍數？

(1)  $22 \times 57$

(2)  $3^6$

(3)  $6^3$

- 將右表中出現的質數圈起來，恰好可形成一個英文字母，此英文字母是\_\_\_\_\_。

59	61	19	29
47	63	14	36
23	2	79	57
17	25	15	93
3	1	91	87

4. 列出 105 所有的因數，並寫出 105 的質因數。

5. 將下列各數寫成標準分解式：

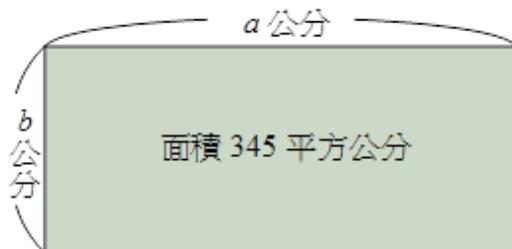
(1) 117

(2) 528

(3) 56700

6. 志玲拿了 18 個大小相同的正方體積木玩分堆的遊戲，每堆積木的個數都一樣，不能剩下；而且每堆至少 2 個，但不能多於 10 個。寫出志玲分堆的方法有哪幾種？

7. 右圖為周長 76 公分的長方形色紙，設長為  $a$  公分，寬為  $b$  公分，其中  $a$ 、 $b$  皆是正整數且  $a > b$ ，如果此長方形的面積為 345 平方公分，則  $a$ 、 $b$  二數之值分別是多少？



## 2-1 平時考

## 一、選擇題（每題 4 分，共 20 分）

- ( ) 1. 下列何者不是 60 的質因數？  
(A) 5 (B) 15  
(C) 2 (D) 3
- ( ) 2. 在 76、459、147、237、1234、6590 六個數當中，是 2 的倍數的有多少個？  
(A) 1 個 (B) 2 個  
(C) 3 個 (D) 4 個
- ( ) 3. 100 以內的質數共有多少個？  
(A) 19 個 (B) 21 個  
(C) 23 個 (D) 25 個
- ( ) 4. 有一個五位數  $94\square 72$  為 11 的倍數，則  $\square = ?$   
(A) 0 (B) 1  
(C) 2 (D) 3
- ( ) 5. 如果  $a = 24 \times 25 \times 26$ ，則  $a$  的相異質因數總和為多少？  
(A) 21 (B) 23  
(C) 25 (D) 27

## 二、填充題（每格 5 分，共 40 分）

1. 寫出下列各數的標準分解式：

(1)  $36 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)  $87 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3)  $162 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4)  $520 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 回答下列問題：

(1) 有一個三位數  $8\square 6$  為 3 的倍數，則  $\square = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 有一個四位數  $8\square 36$  為 11 的倍數，則  $\square = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 有一個五位數  $1234\square$  為 6 的倍數，則  $\square = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 下列各數中，含有因數 3 的數有哪些？

182、264、339、437、643、1935

---

\_\_\_\_\_。

## 三、計算題（共 40 分）

1. 已知正整數 1120，則：

(1) 標準分解式為何？（8 分）

(2) 所有相異質因數的總和為多少？（8 分）

2.  $a$ 、 $b$  為兩個正整數，其中  $a < b$ ，如果  $a \times b = 80$ ，且  $a + b = 21$ ，則  $a$ 、 $b$  的值各為多少？

（12 分）

3. 某水果商欲將 160 顆蘋果平分裝在若干個紙箱中，因考量成本及紙箱的承載重量，故每個紙箱最少裝 15 顆，最多裝 35 顆，則分裝方式共有多少種？（12 分）