

2-2 根式的運算



帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2} + 3$ 、 $\sqrt{2} - 1$ 、 $(-2) \times \sqrt{2}$ 、 $1 \div \sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

① 根式的表示

多項式的簡記

$2 \cdot x$ 可寫成 $2x$ 。

$(-\frac{1}{2}) \cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。

$x \div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。



根式的簡記

$2 \cdot \sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。

$(-\frac{1}{2}) \times \sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{2} \div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。



根式的簡記

若 $a \neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b} \quad (2) \sqrt{b} \div a = \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3 \times 2\sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法，我們可以做整數或分數與根式的運算。



隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $-5 \times 2\sqrt{3}$

(2) $-\frac{4}{3}\sqrt{2} \times (-6)$

(3) $(-4\sqrt{2}) \div 6$

② 根式的乘法

由前面的說明可以得到，若 a 、 b 、 c 為正數或 0 時， $a \times b\sqrt{c} = (a \times b) \times \sqrt{c}$ 。
 那麼 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a \times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 $2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2}$ ，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \times 3} (= \sqrt{6})$ 呢？
 因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2$
 $= 2 \times 3$

而且 $(\sqrt{2 \times 3})^2 = 2 \times 3$

由於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2 \times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。事實上，若 $a \geq 0$ ，
 $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

根式的乘法運算

若 a 、 b 為正數或 0，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 1 根式的乘法運算

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

解 (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$
 $= \sqrt{3 \times 7}$
 $= \sqrt{21}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$
 $= \sqrt{6 \times \frac{5}{3}}$
 $= \sqrt{10}$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$
 $= (-3) \times \sqrt{3} \times (-2) \times \sqrt{5}$
 $= (-3) \times (-2) \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$
 $= 6\sqrt{15}$

隨堂練習

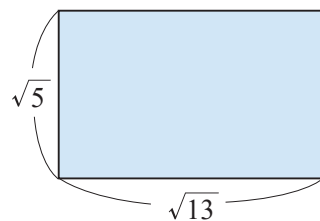
1. 求下列各根式的乘積：

$$(1) \sqrt{5} \times \sqrt{14}$$

$$(2) \sqrt{14} \times \sqrt{\frac{13}{7}}$$

$$(3) (-2\sqrt{3}) \times (4\sqrt{2})$$

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。



例2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

解 $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

$$2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

因為 $\sqrt{18} > \sqrt{12}$ ，所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

也可以這樣做：

$$(3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 18$$

$$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3}) = 12$$

因為 $18 > 12$ ，所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。

③ 根式的除法

前面學過 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 3}$ (即 $\sqrt{\frac{2}{3}}$) 呢？
比較下面兩個式子：

$$(1) \sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ 且 } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}。$$

$$(2) \sqrt{2 \div 3} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ 且 } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}。$$

又 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 均為正數，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ；事實上，若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 3 根式的除法運算

計算下列各式：

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{7}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

解 (1) $\sqrt{35} \div \sqrt{7}$

$$= \sqrt{35 \div 7}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{7}{2} \div \frac{3}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2} \times \frac{6}{3}} = \sqrt{7}$$

隨堂練習

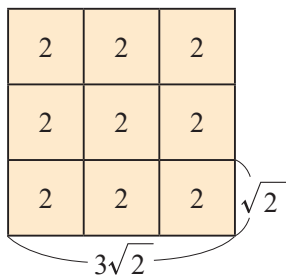
計算下列各式：

$$(1) \sqrt{48} \div \sqrt{8}$$

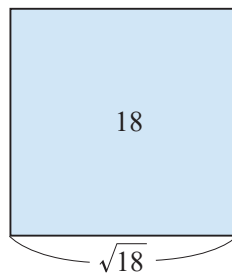
$$(2) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \sqrt{\frac{2}{3}}$$

▶ 最簡根式

下圖是由 9 個面積為 2 的正方形所構成的大正方形，其面積為 18。



因為面積為 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ ，
所以大正方形的邊長為 $3\sqrt{2}$ 。



因為大正方形的面積為 18，
所以其邊長為 $\sqrt{18}$ 。

由上述可以知道 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 。

透過根式的運算，可以得到 $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 。像這種 $r\sqrt{n}$ 形式的根式，其中 r 是整數或分數， n 是正整數，且將 n 化成標準分解式後，每一個質因數的次方都是 1，稱 $r\sqrt{n}$ 為**最簡根式**。例如： $\sqrt{42}$ 、 $3\sqrt{6}$ 、 $\frac{5}{7}\sqrt{21}$ 都是最簡根式。

一個根式有下列任何一種情形時，就不是最簡根式：

(1) 根號內的正整數，化成標準分解式後，有任何一個質因數的次方大於 1。

例如： $\sqrt{75}$ 不是最簡根式。因為 $75 = 3 \times 5^2$ ，質因數 5 的次方為 2。

(2) 根號內有分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt{0.7}$ 都不是最簡根式。

(3) 分母有根式。例如： $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 不是最簡根式。

隨堂練習

下列根式中，哪些是最簡根式？

$$3\sqrt{2}、\sqrt{25}、\sqrt{15}、\frac{2}{3}\sqrt{6}、\sqrt{\frac{7}{5}}、\frac{\sqrt{24}}{2}、\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}、\sqrt{5.1}$$



例4 化為最簡根式

自評 P91 第 1 題 (1)(2)

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{2^4 \times 3^3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 5^3}$

(3) $\sqrt{108}$

解 (1) $\sqrt{2^4 \times 3^3}$

$$= \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 3}$$

$$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$

$$= 2^2 \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3}$$

(2) $\sqrt{2^5 \times 5^3}$

$$= \sqrt{2^4 \times 5^2 \times 2 \times 5}$$

$$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{2 \times 5}$$

$$= 2^2 \times 5 \times \sqrt{10}$$

$$= 20\sqrt{10}$$

(3) $\sqrt{108}$

$$= \sqrt{2^2 \times 3^3}$$

$$= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3}$$

$$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$

$$= 2 \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3}$$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $\sqrt{5^2 \times 3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 3^2}$

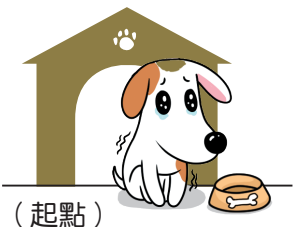
(3) $\sqrt{50}$

數學 FUN 手玩

下圖中有一隻飢餓的狗狗，只要沿著最簡根式，就可以吃到美味的骨頭，試著幫他找出路徑吧！（只能走上、下、左、右，不能走斜的喔！）



最簡根式小遊戲



(起點)

$\sqrt{2}$

$\sqrt{12}$

$\sqrt{18}$

$\sqrt{7}$

$\sqrt{24}$

$\sqrt{20}$

$\sqrt{38}$

$\sqrt{41}$

$\sqrt{42}$

$\sqrt{43}$

$\sqrt{46}$

$\sqrt{47}$

$\sqrt{4}$

$\sqrt{33}$

$\sqrt{35}$

$\sqrt{37}$

$\sqrt{20}$

$\sqrt{50}$

$\sqrt{45}$

$\sqrt{32}$

$\sqrt{51}$

$\sqrt{49}$

$\sqrt{31}$

$\sqrt{16}$

$\sqrt{27}$

$\sqrt{38}$

$\sqrt{61}$

$\sqrt{59}$

$\sqrt{55}$

$\sqrt{53}$

$\sqrt{8}$

$\sqrt{29}$

$\sqrt{28}$

$\sqrt{40}$

$\sqrt{62}$

$\sqrt{60}$

$\sqrt{81}$

$\sqrt{56}$

$\sqrt{72}$

$\sqrt{9}$

$\sqrt{23}$

$\sqrt{44}$

$\sqrt{66}$

$\sqrt{65}$

$\sqrt{96}$

$\sqrt{3}$

$\sqrt{25}$

$\sqrt{32}$

$\sqrt{17}$

$\sqrt{6}$

$\sqrt{48}$

$\sqrt{67}$

$\sqrt{36}$

$\sqrt{88}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{11}$

$\sqrt{19}$

$\sqrt{21}$

$\sqrt{52}$

$\sqrt{79}$

$\sqrt{70}$

$\sqrt{71}$

$\sqrt{77}$ (終點)

