

主題 1 根式運算的基本性質

1 在進行根式的運算之前，先讓學生知道其與數的運算規律相同。

由 2-1 節知道 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $-\sqrt{5}$ 、……分別代表不同的數，這些帶有根號的數像整數、分數一樣，也能做加、減、乘、除的運算，而且滿足加法、乘法的交換律、結合律及分配律。

我們將含有根號的算式稱為**根式**，例如： $2+\sqrt{3}$ 、 $1\div\sqrt{5}$ 、 $3\times\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8}-1$ 等都是根式。接下來就來討論根式運算的基本性質。

✓ 根式的表示

在第一冊我們學過：

$$x+x+x \text{ 寫成 } 3 \cdot x \text{ 或 } 3x;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \text{ 寫成 } -\frac{1}{2}x \text{ 或 } -\frac{x}{2};$$

$$x \div 3 \text{ 寫成 } \frac{x}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3}x。$$

而根式也可以利用這種形式來表示：

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2} \text{ 寫成 } 3\times\sqrt{2} \text{ 或 } 3\sqrt{2};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{2} \text{ 寫成 } -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{5} \div 3 \text{ 寫成 } \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3}\sqrt{5}。$$

一般而言，若 $a \neq 0$ ， $b \geq 0$ ，則 $a \times \sqrt{b}$ 寫成 $a\sqrt{b}$ ；

$$\sqrt{b} \div a \text{ 寫成 } \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}。$$

學習內容

N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。

根式也滿足乘法的交換律與結合律，我們來看下面的例題。

例 1

◆ 搭配習作
P.22 第1題

$a\sqrt{b} \times c$ 的運算 學習內容 N-8-1

計算下列各式的值。

(1) $(-2) \times 3\sqrt{5}$

(2) $4\sqrt{2} \times \frac{1}{6}$

(3) $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

解

$$\begin{aligned} (1) & (-2) \times 3\sqrt{5} \\ & = (-2) \times 3 \times \sqrt{5} \\ & = -6 \times \sqrt{5} \\ & = -6\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 4\sqrt{2} \times \frac{1}{6} \\ & = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{6} \\ & = 4 \times \frac{1}{6} \times \sqrt{2} \\ & = \frac{2}{3} \times \sqrt{2} \\ & = \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \text{〈方法一〉} \\ & \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ & = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \\ & = \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ & \text{〈方法二〉} \\ & \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ & = \frac{2 \times \sqrt{3}}{3 \times 3} \\ & = \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\frac{3}{5} \times 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & = \frac{3}{5} \times 5 \times \sqrt{2} \\ & = 3 \times \sqrt{2} \\ & = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{12} \times (-16)$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{12} \times \sqrt{5} \times (-16) \\ & = -\frac{4}{3} \times \sqrt{5} \\ & = -\frac{4}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

(3) $\frac{3\sqrt{7}}{4} \times \frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} & = \frac{3\sqrt{7}}{4 \times 9} \\ & = \frac{\sqrt{7}}{12} \end{aligned}$$

重新布題

下列敘述正確的打「○」，錯誤的打「×」。

(×) (1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$ 可寫成 $5\sqrt{5}$ 。

(×) (2) $4 \times \sqrt{\frac{3}{8}}$ 可寫成 $\sqrt{4\frac{3}{8}}$ 。

(×) (3) $\sqrt{6} \div \frac{7}{5}$ 可寫成 $\frac{7}{5}\sqrt{6}$ 。

(○) (4) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ 可寫成 $(\sqrt{2})^3$ 。

重新布題

計算下列各式的值。

(1) $(-5) \times (-2\sqrt{3})$ (2) $(-2\sqrt{13}) \times (-4)$

(3) $\frac{3}{4}\sqrt{2} \times (-\frac{1}{6})$ (4) $(-\frac{1}{5}) \times 4\sqrt{5}$

答：(1) $10\sqrt{3}$

(2) $8\sqrt{13}$

(3) $-\frac{1}{8}\sqrt{2}$

(4) $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$

✓ 根式的乘除運算

1. 根式的乘法運算

我們知道 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，那 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 呢？

根據平方根的意義：「若 $b^2 = a$ ，則 b 是 a 的平方根。」

因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = 2 \times 5$ ，

所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 是 2×5 的正平方根，又 $\sqrt{2 \times 5}$ 也是 2×5 的正平方根，

因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ 。事實上，若 $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。



我們也可以利用計算機來檢驗 $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 與 $\sqrt{2 \times 5}$ 的值。

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} \rightarrow 2 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x^2} \times 5 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x^2} = 3.16227766$$

$$\sqrt{2 \times 5} \rightarrow 2 \times 5 = \text{[SHIFT] } \sqrt{x^2} = 3.16227766$$

例 2

◆ 搭配習作
P.22 第 1 題

1 練習兩根式的乘

法運算，知道

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} =$$

$$ac\sqrt{bd}。$$

根式的乘法運算 學習內容 N-8-1 — 1 —

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ (2) $(-\frac{2}{3}\sqrt{5}) \times 4\sqrt{7}$ (3) $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$

解

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

$$(2) (-\frac{2}{3}\sqrt{5}) \times 4\sqrt{7} = (-\frac{2}{3}) \times \sqrt{5} \times 4 \times \sqrt{7}$$

$$= (-\frac{2}{3}) \times 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} = -\frac{8}{3}\sqrt{35}$$

$$(3) 7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 7 \times \sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{2} = 7 \times 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 35 \times 2 = 70$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{11}$
 $= \sqrt{55}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{5})$
 $= -\frac{\sqrt{10}}{10}$

(3) $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{6}$
 $= 12 \times 6$
 $= 72$

重新布題

計算下列各式的值。

(1) $\frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $2\sqrt{6} \times 3\sqrt{11}$

(3) $-\frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{4}{9}\sqrt{3}$ (4) $6\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}$

答：(1) $\frac{\sqrt{21}}{8}$ (2) $6\sqrt{66}$

(3) $-\frac{2}{3}\sqrt{6}$ (4) 84

重新布題

若 $a = -3\sqrt{2}$ 、 $b = 4\sqrt{2}$ 、 $c = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ 、 $d = \frac{9}{2}\sqrt{5}$ ，則：

(1) $a \times b = ?$ (2) $b \times d = ?$

(3) $a \times c = ?$ (4) $b \times c = ?$

答：(1) -24 (2) $18\sqrt{10}$ (3) $-\frac{5}{2}\sqrt{6}$ (4) $\frac{10}{3}\sqrt{6}$

2. 根式的除法運算

我們知道 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 5}$ 呢？
 $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ 的值可用 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 表示，因為 $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$ ，
 所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，又 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 也是 $\frac{2}{5}$ 的正平方根，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ 。
 事實上，若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$ 。



我們也可以利用計算機來檢驗 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 與 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 的值。

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \rightarrow 2 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x^2} \div 5 \text{ [SHIFT] } \sqrt{x^2} = 0.632455532$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \rightarrow 2 \div 5 = \text{ [SHIFT] } \sqrt{x^2} = 0.632455532$$

例 3

◆ 搭配習作
P.22 第 1 題

1 練習任意兩個根式的除法，算法和過去一樣：除了一個數就是乘上這個數的倒數。

根式的除法運算 學習內容 N-8-1 — 1 —

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{35} \div \sqrt{5}$

(2) $(-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

解

(1) $\sqrt{35} \div \sqrt{5} = \sqrt{35 \div 5} = \sqrt{7}$

(2) $(-12\sqrt{6}) \div (8\sqrt{3}) = -\frac{3 \cancel{12} \sqrt{6}}{2 \cancel{8} \sqrt{3}} = -\frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{3}_1}} = -\frac{3}{2} \sqrt{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \div \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3} \div \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{2}_1}} = \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3}$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{98} \div \sqrt{14}$

$$= \sqrt{98 \div 14}$$

$$= \sqrt{7}$$

(2) $9\sqrt{35} \div (-3\sqrt{7})$

$$= -\frac{9\sqrt{35}}{3\sqrt{7}}$$

$$= -3 \times \sqrt{\frac{35}{\cancel{7}_1}}$$

$$= -3\sqrt{5}$$

(3) $\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}} \div \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{21}}$

$$= \sqrt{\frac{33}{\cancel{7}_1} \times \frac{21}{\cancel{11}_1}}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

重新布題

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{45} \div (-\sqrt{5})$

(2) $(-4\sqrt{21}) \div 2\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{5\frac{5}{6}} \div (-\sqrt{5\frac{1}{4}})$

答：(1) -3 (2) $-2\sqrt{3}$ (3) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$

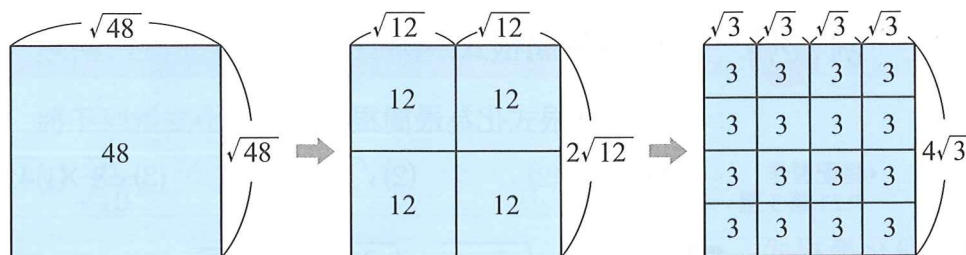
重新布題

若 $a = -\sqrt{24}$ 、 $b = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ ，則 $a \div b = ?$

答：-3

✓ 最簡根式與有理化

我們可以將一個面積為 48 的大正方形切成 4 個面積為 12 的中正方形，也可以切成 16 個面積為 3 的小正方形，如下圖。



由圖可知，三個大正方形的邊長分別會是 $\sqrt{48}$ 、 $2\sqrt{12}$ 、 $4\sqrt{3}$ 。又因為大正方形的面積都相等，所以它們的邊長也會相等，即 $\sqrt{48} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ 。

圖解筆記

最簡根式：
整數、分數、小數

$a\sqrt{b}$

① 正整數
② 標準分解式中，質因數次數都是 1

這些根式看起來雖然不一樣，但它們的值都相等，因此在數學上，我們可以將根式化簡成 $a\sqrt{b}$ 的形式，其中 a 為整數、分數或小數， b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，此時我們稱 $a\sqrt{b}$ 為**最簡根式**，所以 $4\sqrt{3}$ 是最簡根式， $3\sqrt{2}$ 、 $-7\sqrt{3}$ 、 $\frac{1}{2}\sqrt{15}$ 等也都是最簡根式。

若有下列幾種情形，就**不是**最簡根式：

- (1) 根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1。

例如： $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3}$ 、 $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$ 。

2 根式的化簡中，不管被開方數是分數或小數，最後化為最簡根式時都必須是整數。

- (2) 分數的分母含有根式。例如： $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $-\frac{9}{\sqrt{6}}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。

- (3) 根號內的數為分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 、 $-\sqrt{0.1}$ 。

◆ 搭配習作
P.22 第 2 題

隨堂練習

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$\sqrt{2.7}$ $\sqrt{18}$ $-\sqrt{42}$ $\frac{8}{3}\sqrt{15}$ $\frac{7}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{\frac{6}{11}}$ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$

重新布題

圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$\sqrt{6.3}$ $\sqrt{28}$ $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ $4\sqrt{\frac{1}{3}}$
 $\sqrt{85}$ $-\sqrt{72}$ $\frac{3}{5}\sqrt{24}$ $\frac{4}{\sqrt{3}}$

重新布題

圈圈看，下列哪些根式是最簡根式？

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{52}$ $\frac{\sqrt{39}}{2}$
 $6\sqrt{\frac{1}{10}}$ $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{12}}$ $-\sqrt{0.001}$ $\frac{\sqrt{26}}{2}$

第77頁提到的三種不是最簡根式的情形，又該如何化簡呢？

1. 當根號內的數，其標準分解式中質因數的次數大於1：

可以針對完全平方的因數先做處理，讓根式變成最簡根式。

例 4

化為最簡根式 學習內容 N-8-1

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{5^3}$

(2) $\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{8} \times \sqrt{45}$

(4) $\sqrt{4 \times 3 \times 18}$

◆ 搭配習作
P.23 第3題

1 一般化簡根式時都會要求化為最簡根式，以利計算及合併，且在教學時需提醒學生 $\sqrt{b^2c} = b\sqrt{c}$ 只有在 b 、 c 均為正整數時才會成立，避免學生發生如 $\sqrt{(-3)^2 \times 2} = -3\sqrt{2}$ 的情形。

解

$$(1) \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \times 5} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$(2) \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$$

$$(3) \sqrt{8} \times \sqrt{45} = \sqrt{2^2 \times 2} \times \sqrt{3^2 \times 5}$$

$$= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{10}$$

$$(4) \sqrt{4 \times 3 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} \times \sqrt{18}$$

$$= 2 \times \sqrt{3} \times 3\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{6}$$

Hint

根式相乘時，可先將根號內的數相乘之後再化簡，也可以先各自化簡之後再相乘。

◆ 隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{2^5}$

$$= \sqrt{2^4 \times 2}$$

$$= 2^2 \times \sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

(2) $\sqrt{80}$

$$= \sqrt{2^4 \times 5}$$

$$= 2^2 \times \sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

(3) $\sqrt{12} \times \sqrt{20}$

$$= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{15}$$

(4) $\sqrt{6 \times 9 \times 121}$

$$= \sqrt{6} \times \sqrt{9} \times \sqrt{121}$$

$$= \sqrt{6} \times 3 \times 11$$

$$= 33\sqrt{6}$$

● 重新布題

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{3^5}$

(2) $\sqrt{540}$

(3) $\sqrt{48 \times 42}$

(4) $\sqrt{27} \times \sqrt{63}$

答：(1) $9\sqrt{3}$

(2) $6\sqrt{15}$

(3) $12\sqrt{14}$

(4) $9\sqrt{21}$

● 重新布題

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{6 \times 28 \times 24}$

(2) $\sqrt{8 \times 20 \times 65}$

(3) $\sqrt{39 \times 26 \times 3}$

(4) $\sqrt{30 \times 12 \times 75}$

答：(1) $24\sqrt{7}$

(2) $20\sqrt{26}$

(3) $39\sqrt{2}$

(4) $30\sqrt{30}$