

4-3 特殊四邊形的性質

主題1 長方形、菱形、箏形與
正方形的性質

主題2 梯形的性質

重點整理

自我評量

一題多解

我們曾經利用線對稱學習一些特殊四邊形的性質，接下來將透過全等性質進行推理與說明。

長方形(矩形)

長方形是四個內角都是直角的四邊形。符合平行四邊形判別性質「兩雙對角分別相等」，因此長方形也是平行四邊形，具有平行四邊形所有的性質。接著我們來看長方形對角線的性質。



長方形的兩對角線相等且互相平分。

說明 (1)如右圖，長方形 $ABCD$ 中，

對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點。

(2) $\because$ 對邊相等， $\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$ 。

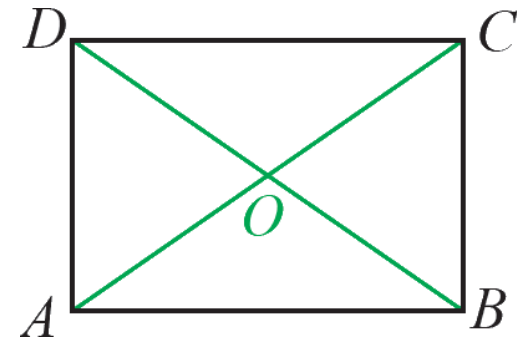
在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$\because \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{CD} = \overline{CD}$ ，

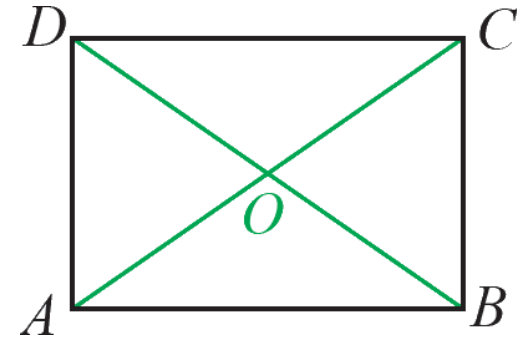
$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SAS 全等性質)，

得 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。因此長方形的兩對角線相等。



長方形的兩對角線相等且互相平分。

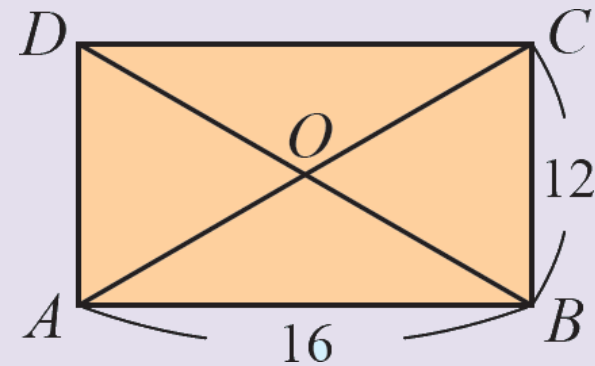
說明 (3) $\because$ 長方形也是平行四邊形，
 $\therefore$ 兩對角線會互相平分，
 得 $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$ 。



例 1 長方形的對角線性質

搭配課本p204

如右圖，長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{BC}=12$ ，
 $\overline{AB}=16$ ，求 $\overline{AC}$ 長與 $\overline{BO}$ 長。



解 (1) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ，

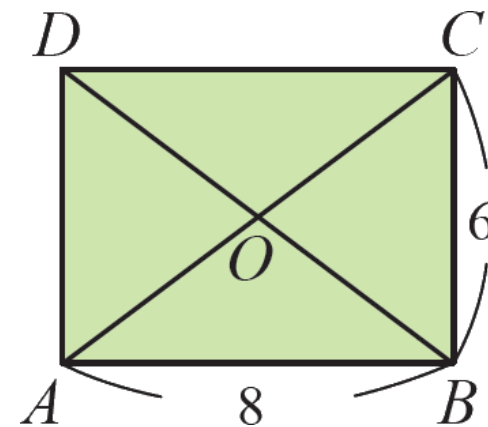
$$\begin{aligned}\text{由畢氏定理可得 } \overline{AC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20\end{aligned}$$

(2) $\because$ 四邊形 $ABCD$ 為長方形，

$$\therefore \overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 20 = 10$$



如右圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形， $\overline{AB}=8cm$ ， $\overline{BC}=6cm$ ，求 $\triangle AOB$ 的周長與面積。

**解**

$$\overline{BD} = \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\text{得 } \overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 5, \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 5$$

$$\text{故 } \triangle AOB \text{ 的周長} = 5 + 5 + 8 = 18(cm)$$

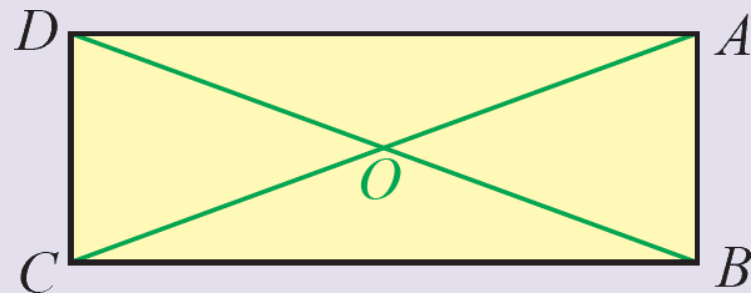
$$\begin{aligned} \triangle AOB \text{ 的面積} &= \frac{1}{4} \times \text{長方形 } ABCD \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{4} \times 6 \times 8 = 12(cm^2) \end{aligned}$$

我們知道「長方形的兩對角線相等且互相平分」。反過來說，兩對角線相等且互相平分的四邊形是長方形嗎？



例 2 長方形的判別性質：兩對角線相等且互相平分 搭配課本p205

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，
且 O 為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 的中點，那麼四邊形 $ABCD$ 是長方形嗎？



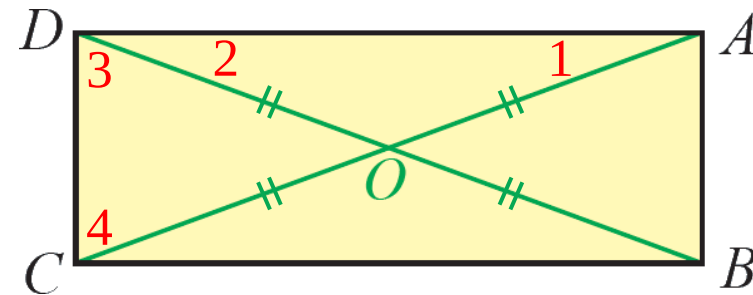
解

(1) 如右圖，

$\because \overline{AC} = \overline{BD}$ ，且 O 為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 的中點，

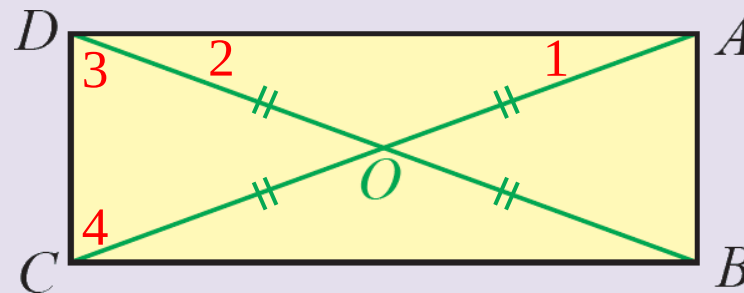
$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ 。

因此 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COD$ 都是等腰三角形，
得 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。

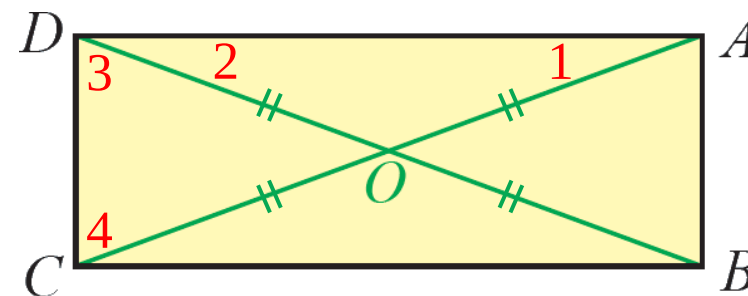


例 2 長方形的判別性質：兩對角線相等且互相平分 搭配課本p205

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，
且 O 為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 的中點，那麼四邊形 $ABCD$ 是長方形嗎？



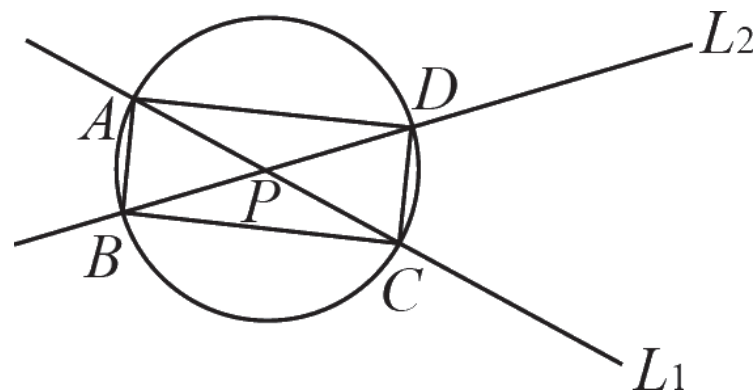
解 (2) 在 $\triangle ADC$ 中， $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ，
故 $2\angle 2 + 2\angle 3 = 180^\circ$ ，
得 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ，也就是說 $\angle ADC = 90^\circ$ 。
同理 $\angle DCB$ 、 $\angle CBA$ 、 $\angle BAD$ 也是 90° ，
 $\therefore$ 四個內角都是直角，
 $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 是長方形。



也就是說，兩對角線相等且互相平分的四邊形是長方形。



如右圖， L_1 、 L_2 相交於 P 點，以 P 為圓心，適當長為半徑畫圓，圓與 L_1 的交點為 A 、 C ，與 L_2 的交點為 B 、 D 。試說明四邊形 $ABCD$ 為長方形的理由。

**解**

由 $\overline{AC} = \overline{BD}$ (圓直徑)

及 $\overline{PA} = \overline{PC}$ 且 $\overline{PB} = \overline{PD}$ (圓半徑)

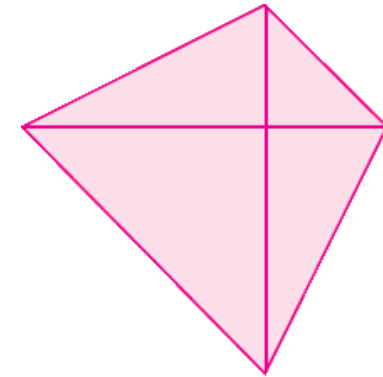
得四邊形 $ABCD$ 的兩對角線相等且互相平分
故四邊形 $ABCD$ 為長方形



動動腦

長方形的兩對角線相等，那麼兩對角線相等的四邊形一定是長方形嗎？說說你的看法。

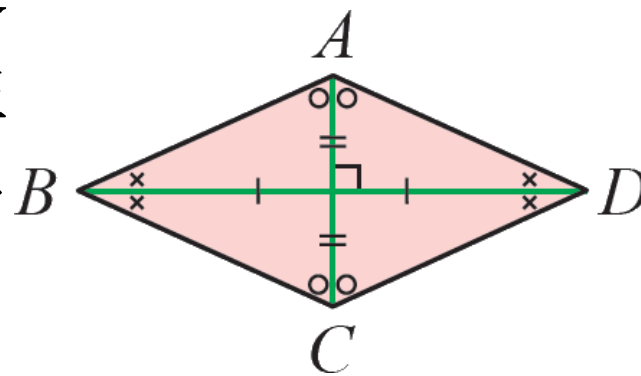
兩對角線等長的四邊形不一定是長方形，
如右圖



菱形

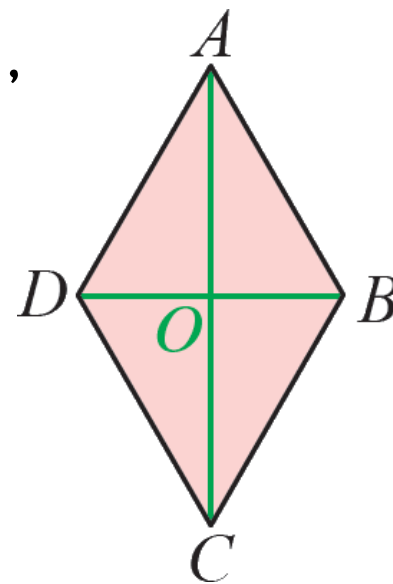
菱形是四個邊都相等的四邊形。符合平行四邊形判別性質「兩雙對邊分別相等」，因此菱形也是平行四邊形，具有平行四邊形所有的性質。

在第 110 頁中，我們知道如右圖的菱形 $ABCD$ 中，兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 皆為對稱軸，利用線對稱概念，可知 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 互相垂直平分且分別平分四個內角。接著利用以上性質做練習。



如右圖，菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAO = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ，
試回答下列問題：

- (1) $\angle ABO$ 是幾度？
- (2) 此菱形兩對角線長之和為多少？

**解**

(1) $\because \overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分， $\therefore \angle AOB = 90^\circ$

得 $\angle ABO = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$

(2) 由(1)可知 $\triangle ADB$ 為正三角形，故 $\overline{BD} = 12$ ， $\overline{DO} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 6$

由畢氏定理得 $\overline{AO} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ ， $\overline{AC} = 12\sqrt{3}$

故兩對角線長之和為 $12 + 12\sqrt{3}$

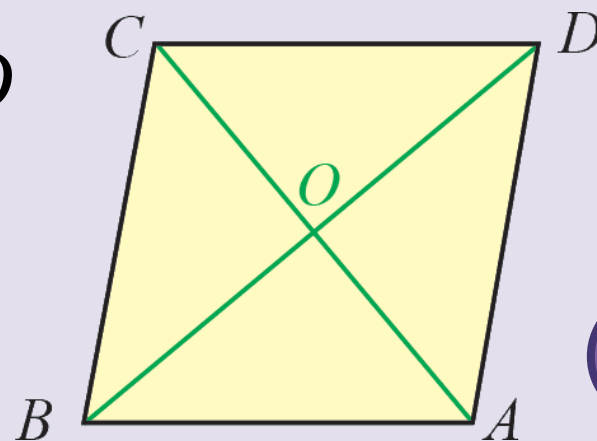
我們知道「菱形的兩對角線互相垂直平分」。

反過來說，兩對角線互相垂直平分的四邊形是菱形嗎？



例 3 菱形的判別性質：兩對角線互相垂直平分 搭配課本p207

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，若 $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ ，且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，則四邊形 $ABCD$ 是菱形嗎？



解

(1) $\because \overline{OB} = \overline{OD}$ ，且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，

$\therefore \overleftrightarrow{AC}$ 是 $\overline{BD}$ 的中垂線，得 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 、 $\overline{CB} = \overline{CD}$ 。

(2) 同理， $\overleftrightarrow{BD}$ 是 $\overline{AC}$ 的中垂線，

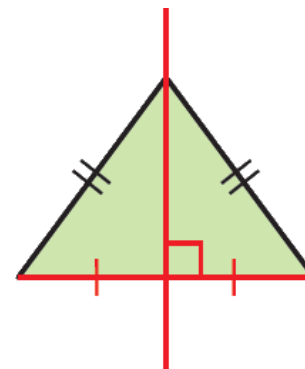
$\therefore \overline{BA} = \overline{BC}$ 、 $\overline{DA} = \overline{DC}$ ，即 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ 。

(3) $\because$ 四邊相等， $\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 是菱形。

也就是說，兩對角線互相垂直平分的四邊形是菱形。

學習時光機

一線段的中垂線上任一點與此線段的兩端點等距離。

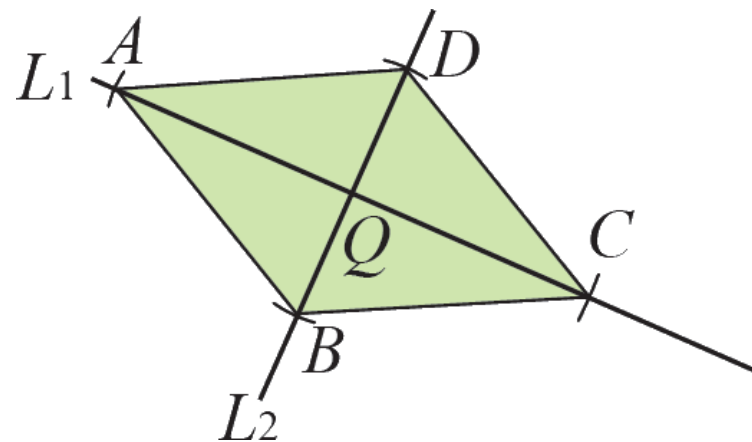


如右圖， L_1 垂直 L_2 於 Q 點。

在 L_1 上取 A 、 C 兩點，使 $\overline{AQ} = \overline{CQ}$ ，

在 L_2 上取 B 、 D 兩點，使 $\overline{BQ} = \overline{DQ}$ ，

試說明四邊形 $ABCD$ 為菱形的理由。

**解**

由 L_1 垂直 L_2 於 Q 點，且 $\overline{AQ} = \overline{CQ}$ ， $\overline{BQ} = \overline{DQ}$

得四邊形 $ABCD$ 的兩對角線互相垂直平分

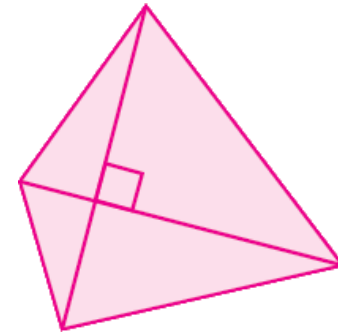
故四邊形 $ABCD$ 即為菱形



動動腦

菱形的兩對角線互相垂直，那麼兩對角線互相垂直的四邊形是菱形嗎？說說你的看法。

兩對角線互相垂直的四邊形不一定是菱形，
如右圖



菱形的面積＝兩對角線長的乘積÷2

說明 如右圖，菱形 $ABCD$ 中，

對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 互相垂直於 O 點，

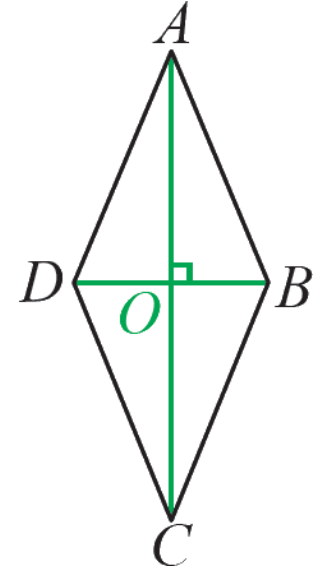
則菱形 $ABCD$ 面積

$= \triangle ABD$ 面積 $+ \triangle BCD$ 面積

$= \frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{OA} + \frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{OC}$

$= \frac{1}{2} \overline{BD} \times (\overline{OA} + \overline{OC}) = \frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{AC}。$

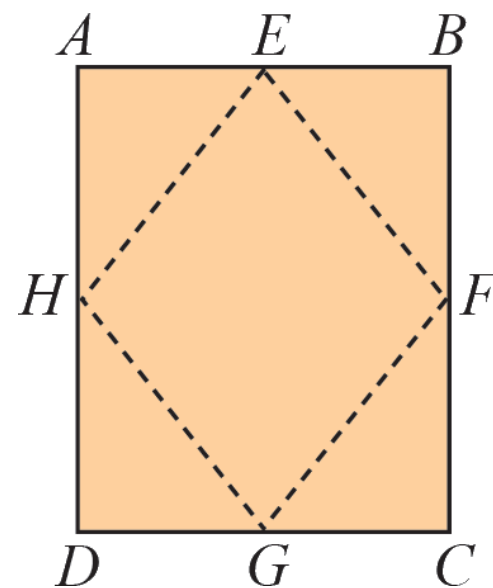
因此菱形 $ABCD$ 面積＝兩對角線長的乘積÷2。



同理，兩對角線互相垂直的四邊形，其面積等於兩對角線長的乘積的一半。



如右圖，四邊形 $ABCD$ 為一張長方形的色紙，已知 $\overline{AB}=16$ 公分， $\overline{BC}=20$ 公分。若取各邊的中點剪去四個角，剩下的圖形恰好為菱形 $EFGH$ ，則菱形的周長和面積各為多少？



解

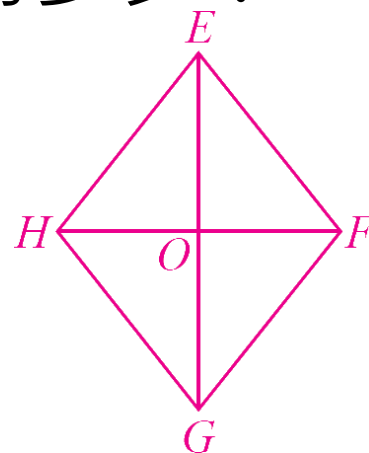
如右圖

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} \overline{HF} = 8, \quad \overline{OE} = \frac{1}{2} \overline{EG} = 10$$

$$\therefore \overline{EH} = \sqrt{8^2 + 10^2} = 2\sqrt{41}$$

因此菱形 $EFGH$ 的周長 $= 4\overline{EH} = 4 \times 2\sqrt{41} = 8\sqrt{41}$ (公分)

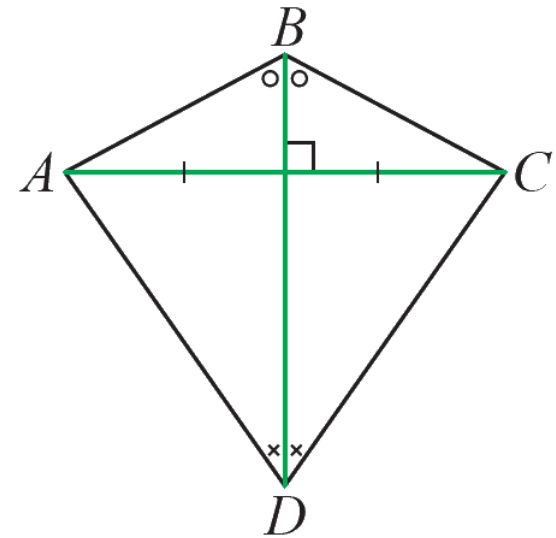
菱形 $EFGH$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{HF} \times \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 16 \times 20 = 160$ (平方公分)



箏形

箏形是兩雙鄰邊分別等長的四邊形。

在第 112 頁中，我們知道如右圖的箏形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{BD}$ 為對稱軸，利用線對稱概念，可知 $\overline{BD}$ 為另一條對角線 $\overline{AC}$ 的中垂線，並平分 $\angle ABC$ 及 $\angle ADC$ 。接著利用以上性質做練習。





如右圖，小毅想製作一只風箏，首先他在紙上剪出一個箏形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 10\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = \overline{CD} = 10\sqrt{5}$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，接著再準備兩根竹棍固定在對角線上，若不計竹棍的寬度，則：

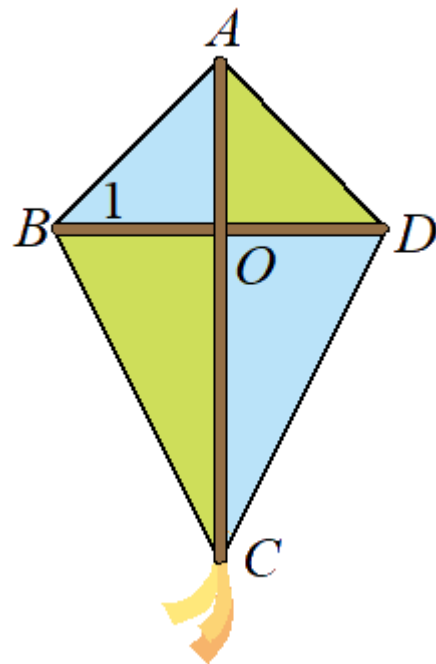
(1) $\angle 1$ 為多少度？

解

$$\because \overline{AB} = \overline{AD}, \angle BAD = 90^\circ$$

$\therefore \triangle BAD$ 為等腰直角三角形

$$\text{故 } \angle 1 = (180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 45^\circ$$



如右圖，小毅想製作一只風箏，首先他在紙上剪出一個箏形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 10\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = \overline{CD} = 10\sqrt{5}$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，接著再準備兩根竹棍固定在對角線上，若不計竹棍的寬度，則：

(2) 兩根竹棍的長度分別為多少？

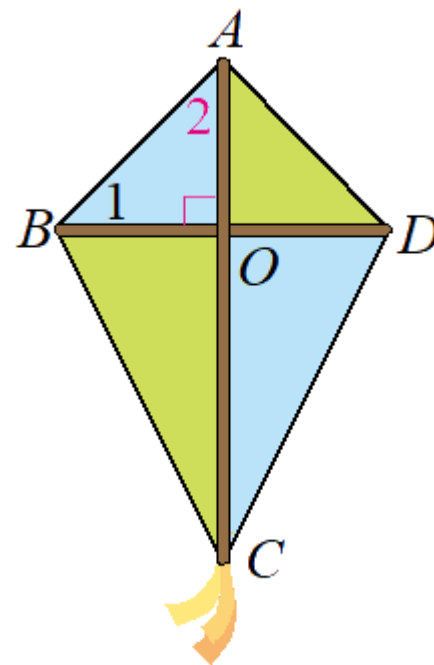
解

$$\because \angle 2 = 90^\circ - \angle 1 = 45^\circ$$

$\therefore \triangle AOB$ 為等腰直角三角形，得 $\overline{AO} = \overline{BO}$

$$\overline{BD} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = 20,$$

$$\text{得 } \overline{AO} = \overline{BO} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 10$$



如右圖，小毅想製作一只風箏，首先他在紙上剪出一個箏形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 10\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = \overline{CD} = 10\sqrt{5}$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，接著再準備兩根竹棍固定在對角線上，若不計竹棍的寬度，則：

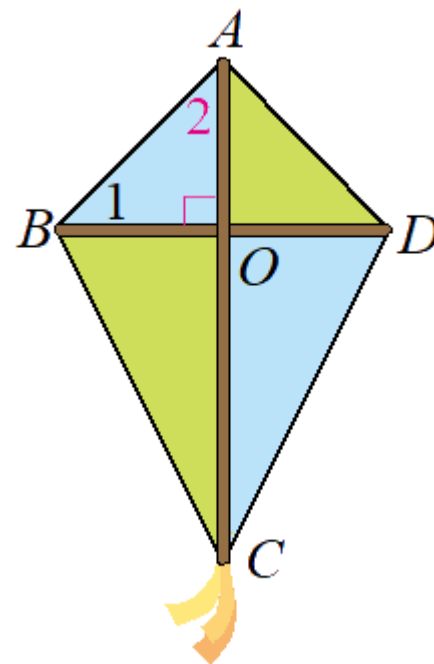
(2) 兩根竹棍的長度分別為多少？

解

$$\overline{OC} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 10^2} = 20,$$

$$\text{得 } \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 30$$

故兩根竹棍長分別為 20、30



在第 208 頁提到，兩對角線互相垂直的四邊形面積等於兩對角線長的乘積的一半，因此**箏形面積也會等於兩對角線長的乘積的一半**。





動 動 腦

箏形是兩雙鄰邊分別等長的四邊形，那麼箏形是否為平行四邊形呢？說說你的看法。

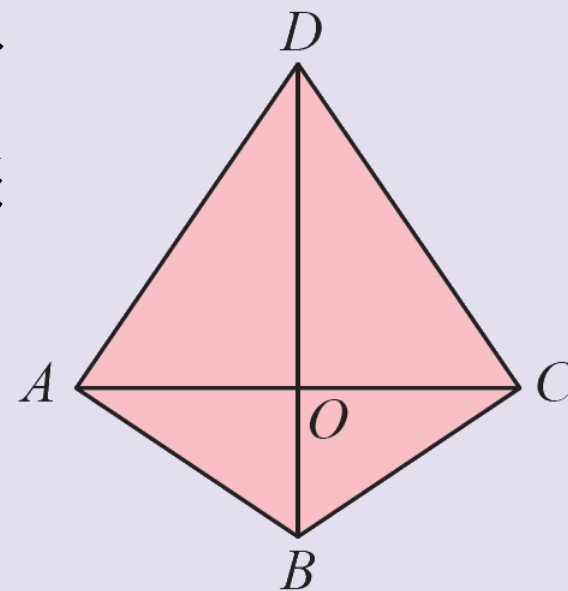
箏形是兩雙鄰邊分別等長的四邊形，而平行四邊形是兩雙對邊分別等長的四邊形，所以箏形不一定是平行四邊形



我們知道「箏形的一條對角線會垂直平分另一條對角線」。反過來說，一條對角線垂直平分另一條對角線的四邊形是箏形嗎？



如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，若 $\overline{BD}$ 垂直平分 $\overline{AC}$ ，則四邊形 $ABCD$ 是箏形嗎？



解

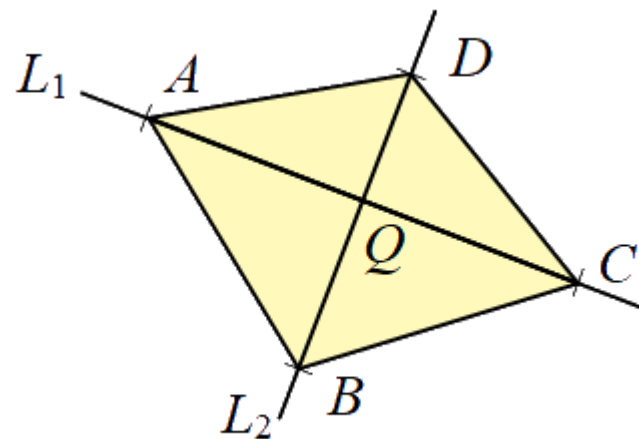
$\because \overline{BD}$ 垂直平分 $\overline{AC}$

由中垂線性質可知 $\overline{DA} = \overline{DC}$ ， $\overline{BA} = \overline{BC}$

即四邊形 $ABCD$ 為箏形



如右圖， L_1 垂直 L_2 於 Q 點。在 L_1 上取 A 、 C 兩點，使 $\overline{AQ} = \overline{CQ}$ ，在 L_2 上取 B 、 D 兩點，且 B 、 D 在 L_1 的兩側。試說明四邊形 $ABCD$ 為箏形的理由。



解 由 L_1 垂直 L_2 於 Q 點，且 $\overline{AQ} = \overline{CQ}$
即 $\overline{BD}$ 垂直平分 $\overline{AC}$
故四邊形 $ABCD$ 為箏形

正方形

正方形是四個角都是直角且四個邊都相等的四邊形。

1. 因為正方形四個內角都是直角，

所以正方形也是長方形，它的兩對角線相等且互相平分。

2. 因為正方形的四個邊等長，

所以正方形是菱形，它的兩對角線互相垂直平分。

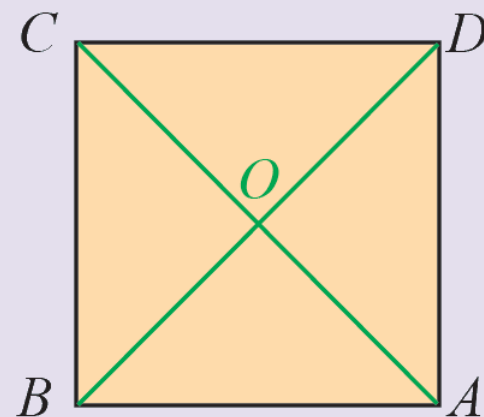
由上可知，正方形的兩對角線相等且互相垂直平分。



例 5 正方形的對角線性質

搭配課本p211

如右圖， O 為正方形 $ABCD$ 對角線的交點，
且 $\overline{BD}=6$ ，則正方形 $ABCD$ 的周長與面積分別為多少？



解

$\because$ 正方形的兩對角線相等且互相垂直平分，
 $\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 3$ 。

由畢氏定理可知， $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 。

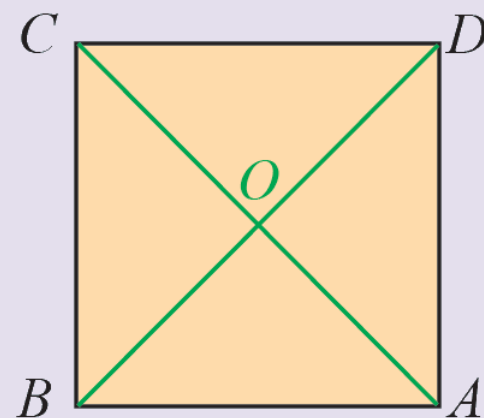
故正方形 $ABCD$ 的周長 $= 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ ，

正方形 $ABCD$ 的面積 $= 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 18$ 。

例 5 正方形的對角線性質

搭配課本p211

如右圖， O 為正方形 $ABCD$ 對角線的交點，
且 $\overline{BD}=6$ ，則正方形 $ABCD$ 的周長與面積分別為多少？



解

Hint

正方形 $ABCD$ 面積也可以這樣算：

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18。$$

若 $ABCD$ 為正方形，且 A 、 C 兩點坐標分別為 $(5, 3)$ 、 $(1, 3)$ ，則 B 、 D 兩點坐標分別為多少？

解

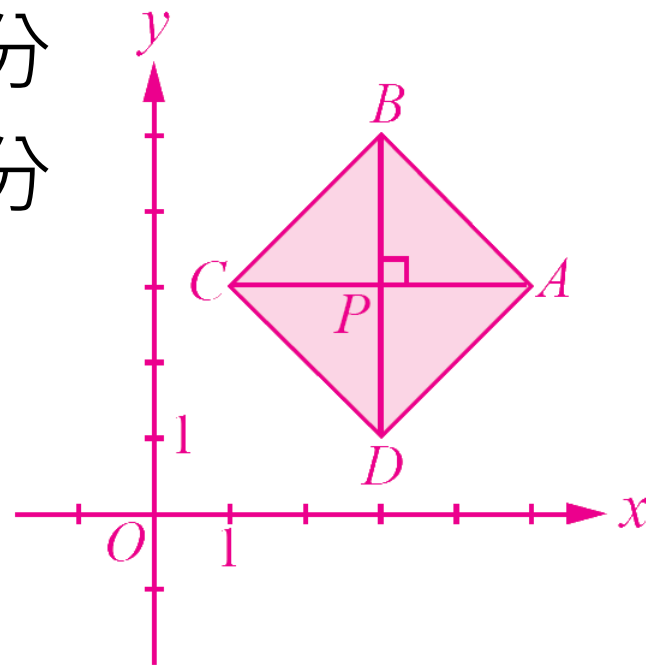
如右圖，

$$\overline{BD} = \overline{AC} = 5 - 1 = 4$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD} = 4 \div 2 = 2$$

故 B 點坐標為 $(1 + 2, 3 + 2) = (3, 5)$

D 點坐標為 $(5 - 2, 3 - 2) = (3, 1)$



國小曾學過：一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形稱為梯形，如圖 1 梯形 $ABCD$ 中，平行的兩邊分別稱為**上底**與**下底**，不平行的兩邊稱為**腰**，而腰與下底形成的夾角稱為**底角**。

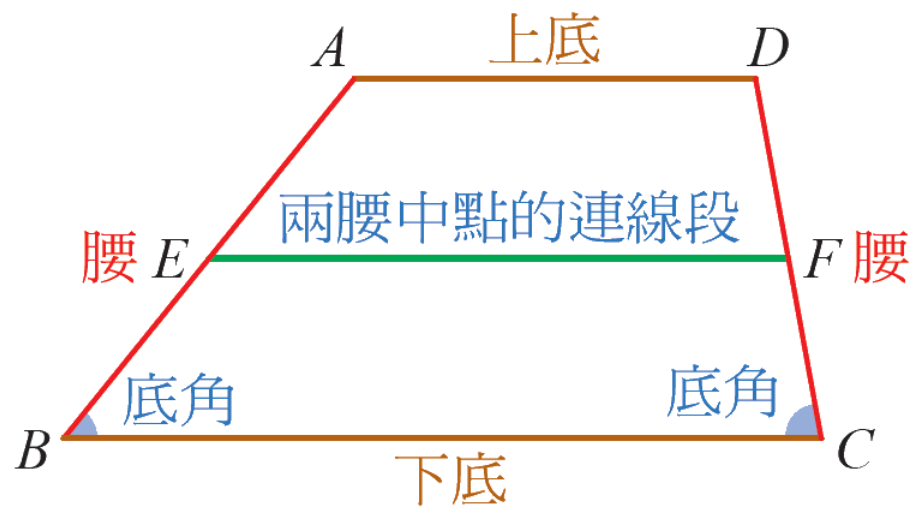


圖 1



此外，若 E 、 F 分別為兩腰 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overline{EF}$ 稱為梯形 $ABCD$ 兩腰中點的連線段。

梯形兩腰中點的連線段有什麼性質呢？我們來看下面的問題探索。



如圖 2-1，有兩個全等的梯形，其中 P 、 R 、 Q 、 R' 分別是 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{C'D'}$ 的中點。如圖 2-2，將這兩個梯形拼在一起，使得 C' 點與 D 點重疊， D' 點與 C 點重疊，試回答下列問題：

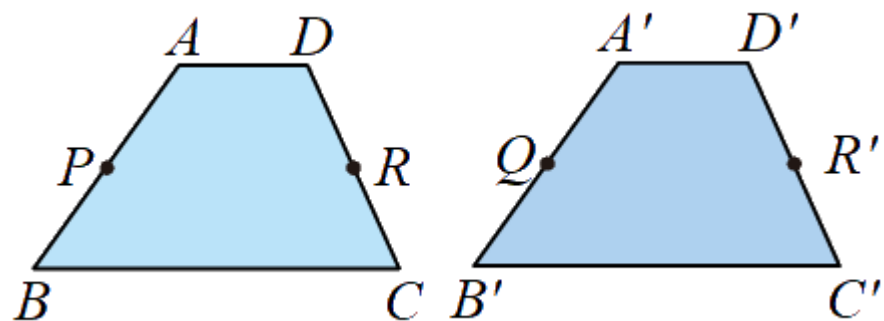


圖 2-1

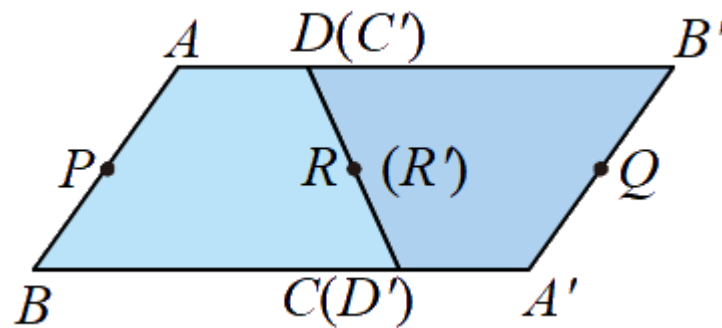
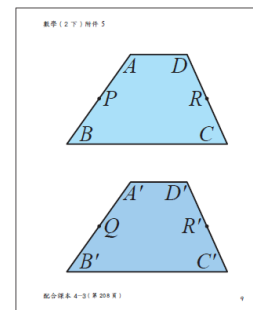


圖 2-2

附件 6



(1) $\angle D + \angle C'$ 是不是 180° ? 是

$A、C'、B'$ 三點是否共線 ? 是

$\angle C + \angle D'$ 是不是 180° ? 是

$B、D'、A'$ 三點是否共線 ? 是

(2) 四邊形 $ABA'B'$ 是平行四邊形嗎 ? 為什麼 ?

是，因為兩雙對邊分別等長

(3) R 點與 R' 點是否重合 ? $P、R(R')、Q$ 三點是否共線 ?

是， $\because \angle DRP + \angle DR'Q = 180^\circ$ ， $\therefore P、R(R')、Q$ 三點共線

(4) 四邊形 $APQB'$ 是否為平行四邊形 ? 為什麼 ?

是，因為 $\overline{AP} = \overline{B'Q}$ ，且 $\overline{AP} \parallel \overline{B'Q}$



由問題探索可知：

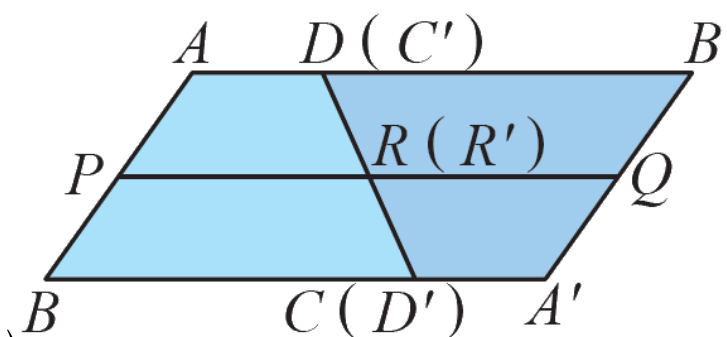
∵ 四邊形 $ABA'B'$ 與四邊形 $APQB'$ 均為平行四邊形，

∴ $\overline{PR} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。……(1)

$$\begin{aligned} \text{且 } \overline{PR} &= \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AB'} \\ &= \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{C'B'}) = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC}) \dots\dots (2) \end{aligned}$$

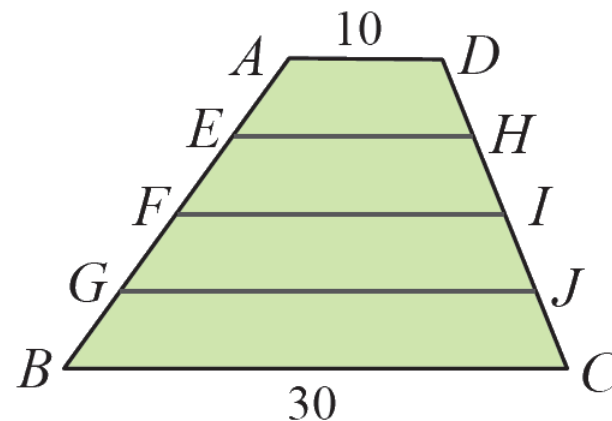
由(1)、(2)可知，

梯形兩腰中點的連線段會與上下底平行，且長度等於兩底和的一半。





如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， E 、 F 、 G 將 $\overline{AB}$ 四等分， H 、 I 、 J 將 $\overline{DC}$ 四等分。若 $\overline{AD} = 10\text{cm}$ ， $\overline{BC} = 30\text{cm}$ ，則 $\overline{EH}$ 、 $\overline{FI}$ 、 $\overline{GJ}$ 的長度分別為多少？



解

$$\overline{FI} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \times (10 + 30) = 20(\text{cm})$$

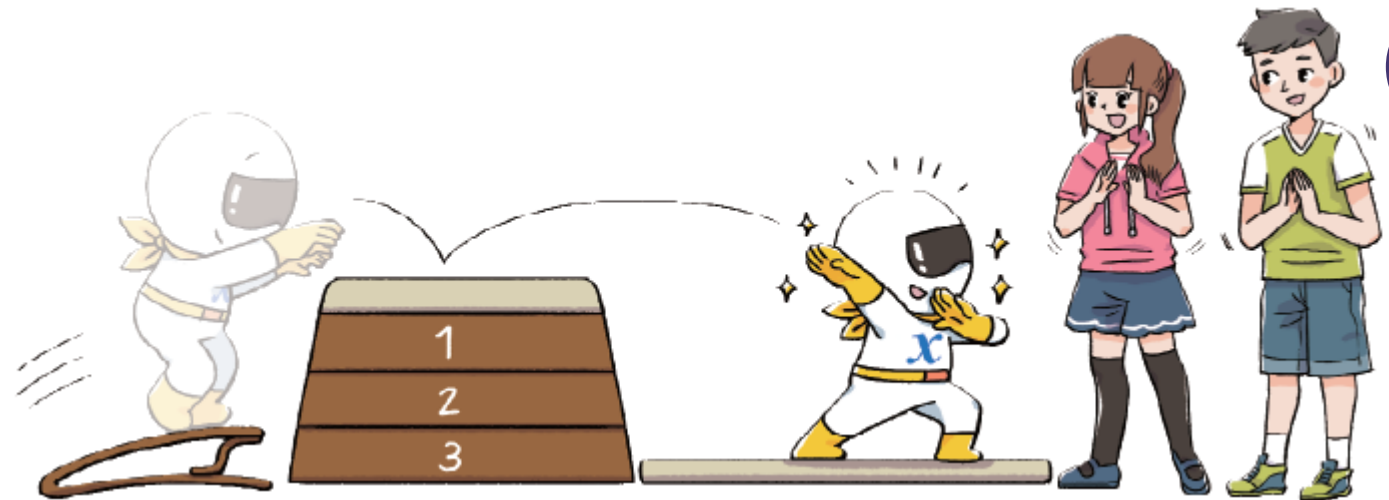
$$\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{FI}) = \frac{1}{2} \times (10 + 20) = 15(\text{cm})$$

$$\overline{GJ} = \frac{1}{2}(\overline{FI} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \times (20 + 30) = 25(\text{cm})$$

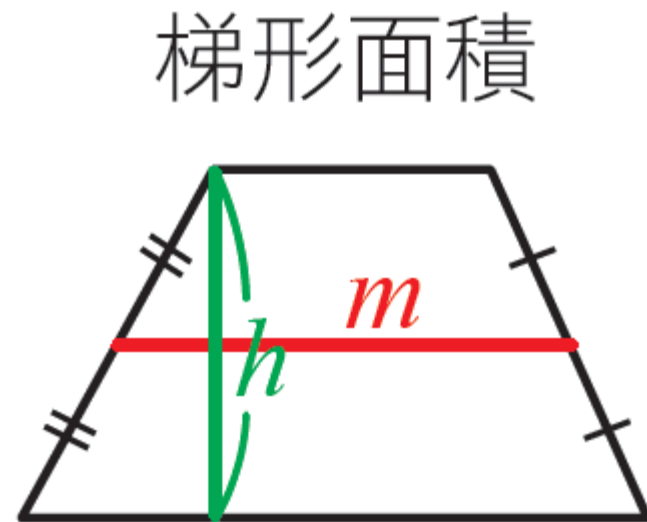
我們知道梯形面積 = $\frac{(\text{上底} + \text{下底})}{2} \times \text{高}$ ，

又梯形兩腰中點的連線段長 = $\frac{(\text{上底} + \text{下底})}{2}$ ，

所以梯形的面積 = 梯形兩腰中點的連線段長 $\times$ 高。



圖解筆記



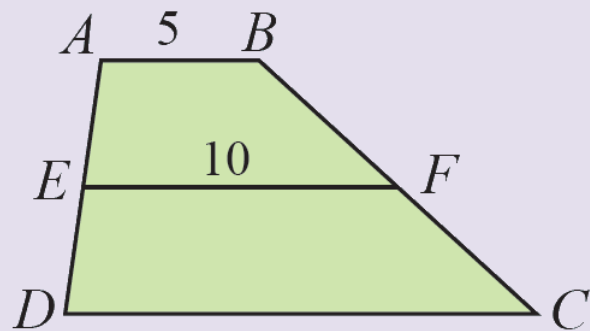
$$\text{面積} = m \times h$$



例 6 梯形兩腰中點連線段的性質之應用

搭配課本p214

如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{EF}$ 為梯形兩腰中點的連線段。若 $\overline{AB} = 5\text{cm}$ 、 $\overline{EF} = 10\text{cm}$ ，梯形的高為 8cm ，則 $\overline{CD}$ 及梯形 $ABCD$ 的面積分別為多少？



解

$$\because \overline{EF} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}, \therefore 10 = \frac{5 + \overline{CD}}{2},$$

得 $\overline{CD} = 15(\text{cm})$ 。

$$\begin{aligned} \text{梯形 } ABCD \text{ 的面積} &= \text{梯形兩腰中點的連線段長} \times \text{高} \\ &= 10 \times 8 = 80(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

有一梯形兩腰中點的連線段長為 10 公分，高為 5 公分，
求此梯形面積。

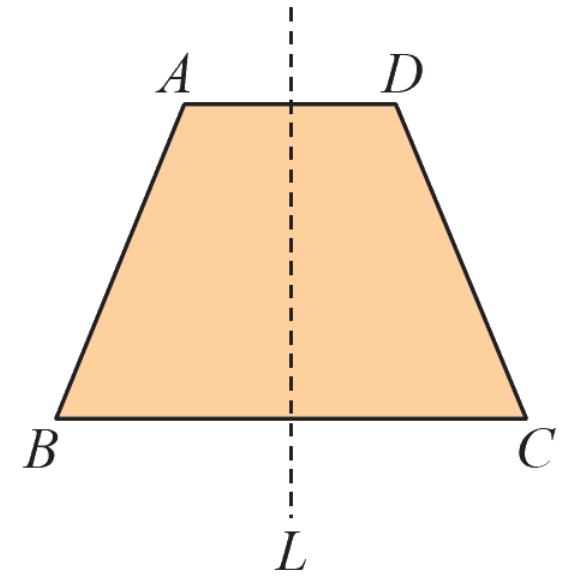
解 梯形面積＝梯形兩腰中點的連線段長×高
＝10×5
＝50(平方公分)



等腰梯形的性質

若梯形的兩腰相等，就稱為**等腰梯形**。

在七年級時，我們利用摺紙學過**等腰梯形是線對稱圖形**。如右圖， L 是等腰梯形的對稱軸，而 A 點的對稱點為 D 、 B 點的對稱點為 C ，故 L 同時為上底 $\overline{AD}$ 、下底 $\overline{BC}$ 的中垂線。



學習時光機

線對稱圖形的對稱軸是任意兩對稱點連接線段的垂直平分線。

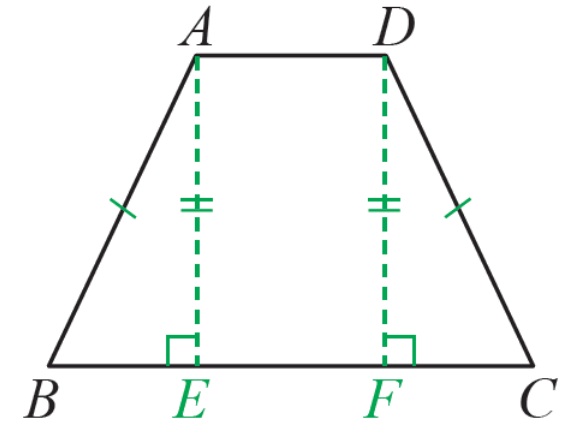
下面我們來看等腰梯形的其他性質。



1. 等腰梯形的兩底角相等。

說明 如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。

先從 A 、 D 兩點分別作底邊的高，
 假設垂足為 E 、 F 。



由於平行線的距離處處相等， $\therefore \overline{AE} = \overline{DF}$ 。

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

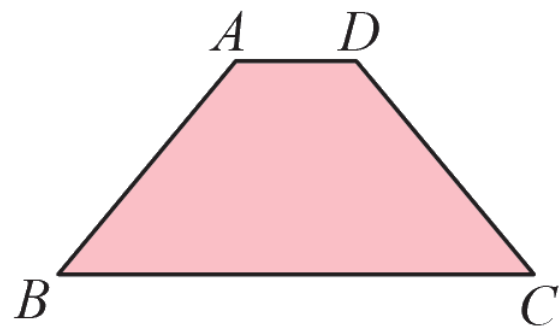
$\because \overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\overline{AE} = \overline{DF}$ 、 $\angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$ (RHS 全等性質)，

得 $\angle B = \angle C$ ，且 $\overline{BE} = \overline{CF}$ 。



如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle A + \angle D = 260^\circ$ ，求 $\angle B$ 的度數。



解 等腰梯形兩底角相等，即 $\angle B = \angle C$

$$\because \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\therefore 260^\circ + 2\angle B = 360^\circ$$

$$\text{得 } \angle B = 50^\circ$$

2. 等腰梯形的兩對角線相等。

說明 如右圖，

$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 為等腰梯形 $ABCD$ 的對角線，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

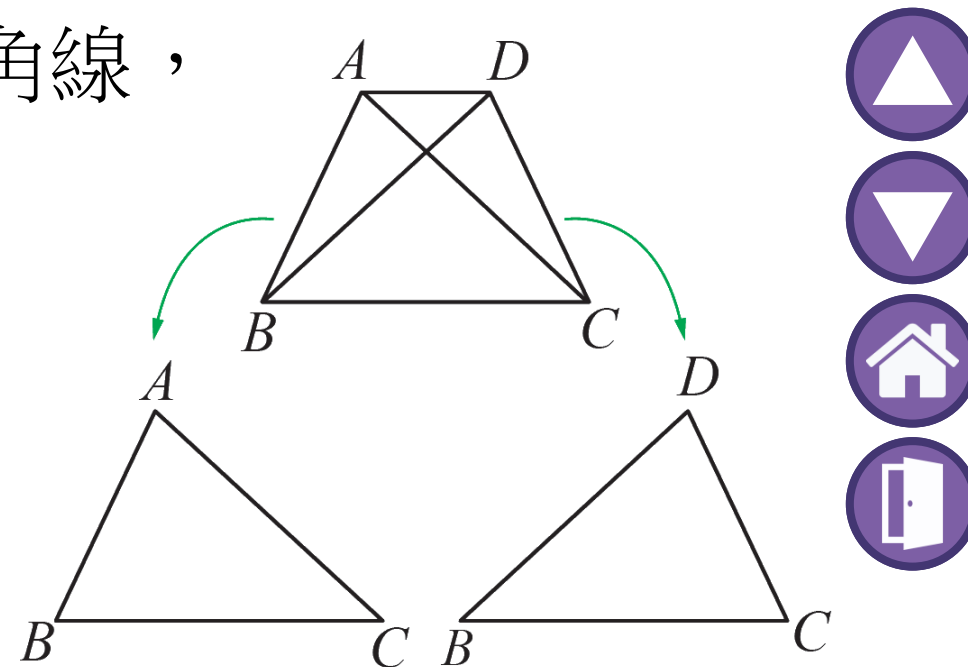
$$\because \overline{AB} = \overline{CD},$$

$$\angle ABC = \angle DCB,$$

$$\overline{BC} = \overline{BC},$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (\text{SAS 全等性質}),$$

得 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。



Key point

等腰梯形的性質

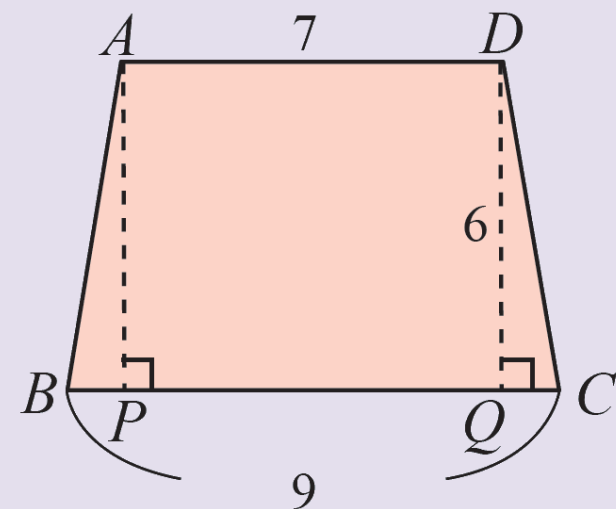
1. 等腰梯形的兩底角相等。
2. 等腰梯形的兩對角線相等。



例 7 等腰梯形的對角線長

搭配課本p216

如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，過 A 、 D 分別作 $\overline{BC}$ 的垂直線段，垂足為 P 、 Q ，若 $\overline{AD}=7$ 、 $\overline{BC}=9$ 、 $\overline{AP}=\overline{DQ}=6$ ，則這個等腰梯形的對角線長度為多少？



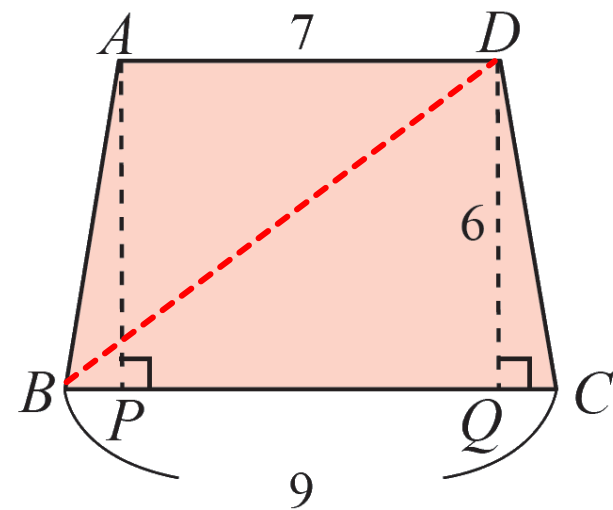
解

如右圖，連接 $\overline{BD}$ ，

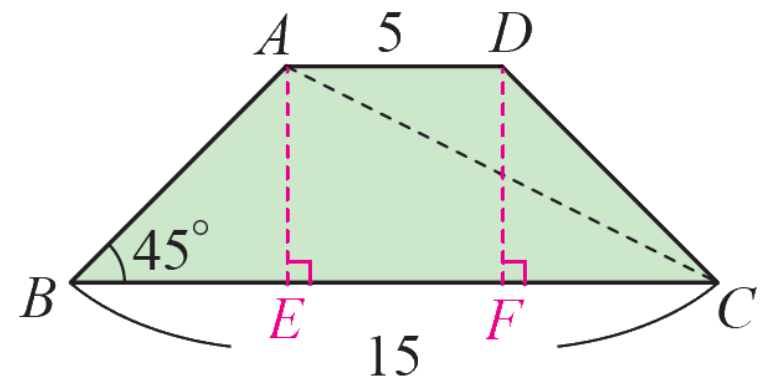
$$\overline{BP} = \overline{CQ} = \frac{9-7}{2} = 1, \quad \overline{BQ} = 1 + 7 = 8,$$

由畢氏定理得 $\overline{BD} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

故等腰梯形的兩條對角線長度都是 10。



如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD} = 5\text{cm}$ ， $\overline{BC} = 15\text{cm}$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，則對角線 $\overline{AC}$ 的長度為多少？



解

如右圖，過 A 、 D 兩點分別作垂直 $\overline{BC}$ 的線段
設垂足為 E 、 F

$$\text{則 } \overline{BE} = (15 - 5) \div 2 = 5, \quad \overline{CE} = 15 - \overline{BE} = 15 - 5 = 10$$

又 $\triangle ABE$ 中，

$$\angle BAE = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ, \quad \therefore \overline{AE} = \overline{BE} = 5$$

$$\text{故 } \overline{AC} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

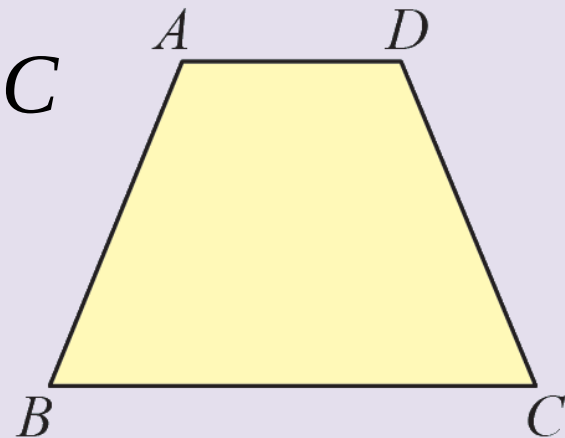
我們知道「等腰梯形的兩底角相等」，反過來說，兩底角相等的梯形會是等腰梯形嗎？



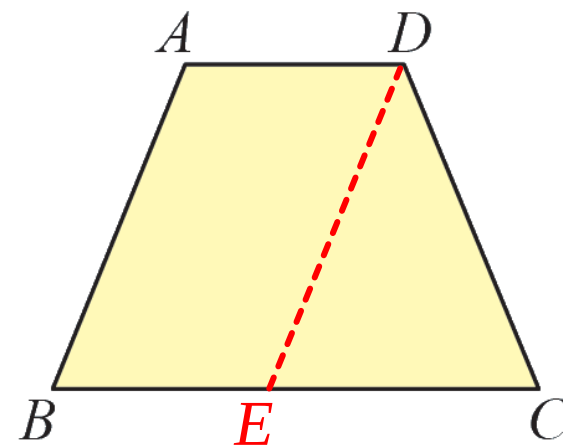
例 8 等腰梯形判別性質：兩底角相等的梯形是等腰梯形

搭配課本p217

如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\angle ABC = \angle DCB$ ，則梯形 $ABCD$ 是等腰梯形嗎？



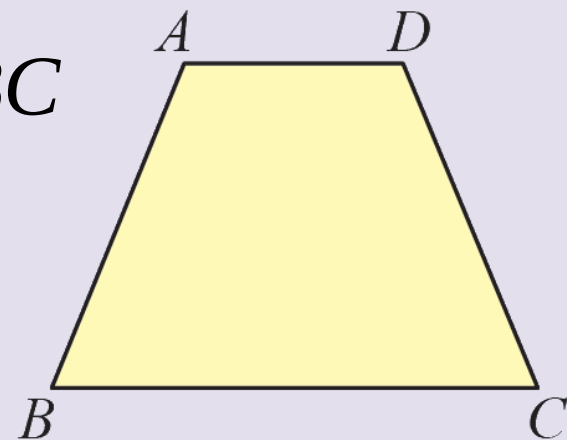
解 (1) 過 D 點作 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，與 $\overline{BC}$ 交於 E 點，
得 $\angle ABC = \angle DEC$ 。
 $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，
 $\therefore$ 四邊形 $ABED$ 是平行四邊形，
得 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 。



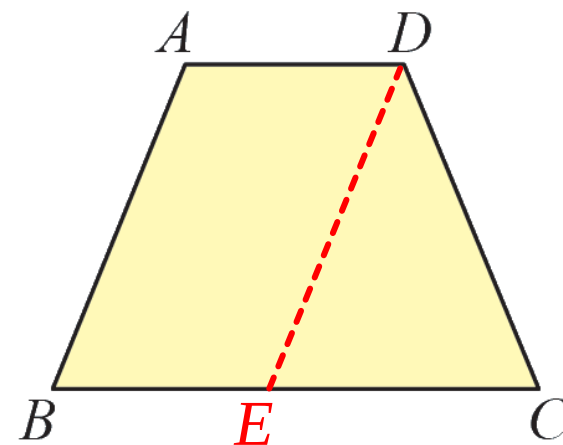
例 8 等腰梯形判別性質：兩底角相等的梯形是等腰梯形

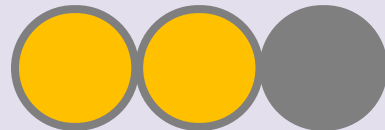
搭配課本p217

如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\angle ABC = \angle DCB$ ，則梯形 $ABCD$ 是等腰梯形嗎？



解 (2)由已知及(1)，得 $\angle DEC = \angle DCE$ ，
即 $\triangle DEC$ 為等腰三角形，
得 $\overline{DE} = \overline{DC}$ ，故 $\overline{AB} = \overline{DC}$ ，
即梯形 $ABCD$ 為等腰梯形。





已知有四個四邊形，將它們的四個內角依 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的順序寫在下面，則哪些會是等腰梯形 $ABCD$ ？

甲： 60° ， 120° ， 120° ， 60° 乙： 70° ， 110° ， 70° ， 110°

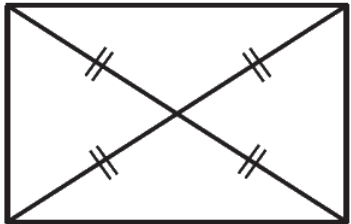
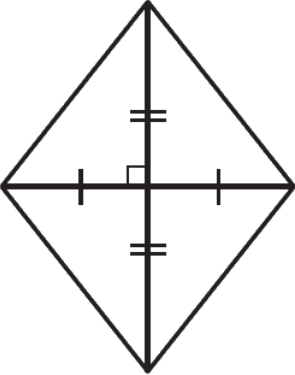
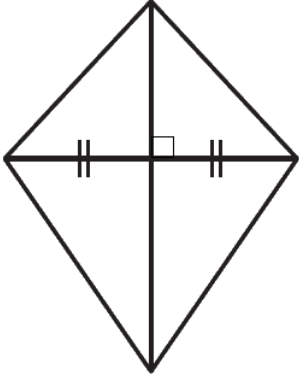
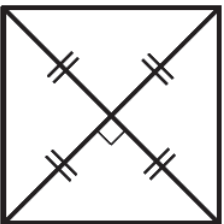
丙： 100° ， 80° ， 80° ， 100° 丁： 130° ， 50° ， 130° ， 50°

解

答： 甲、丙 。



1 特殊四邊形的對角線性質

	長方形	菱形	箏形	正方形
圖形				
性質	兩條對角線相等且互相平分。	兩條對角線互相垂直平分，且平分四個內角。	其中一條對角線垂直平分另一條對角線，且平分兩個內角。	兩條對角線相等且互相垂直平分。



2 菱形與箏形面積公式

菱形與箏形面積都是「兩對角線長的乘積 $\div 2$ 」。



3 梯形兩腰中點連線段

(1)性質：①梯形兩腰中點的連線段平行兩底。

②梯形兩腰中點的連線段長 $=\frac{(\text{上底}+\text{下底})}{2}$ 。

(2)梯形面積公式：梯形面積

$$=\frac{(\text{上底}+\text{下底})}{2}\times\text{高}$$

$$=\text{梯形兩腰中點的連線段長}\times\text{高}。$$



4 等腰梯形的性質

- (1) 等腰梯形的底角相等。
- (2) 等腰梯形的對角線相等。

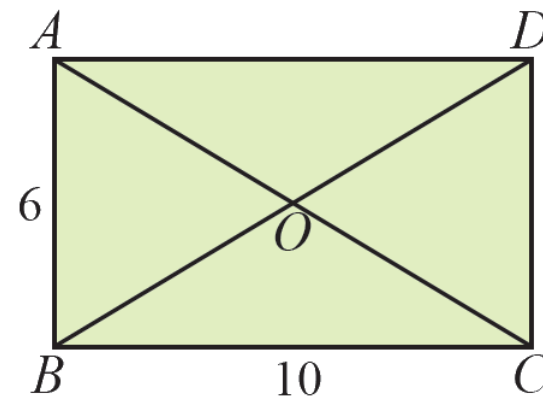


5 特殊四邊形的包含關係

- (1) 正方形是菱形，也是長方形。
- (2) 長方形、菱形、正方形都是平行四邊形。



1 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=6cm$ ， $\overline{BC}=10cm$ ，求兩對角線的和為多少？



解

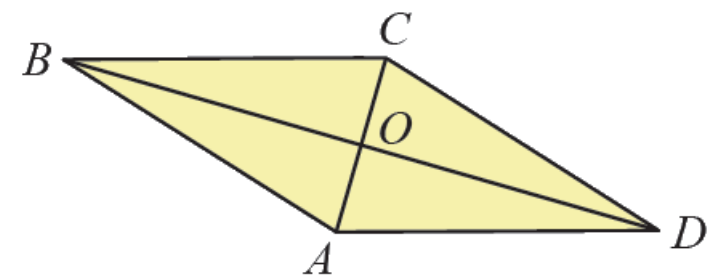
∵長方形的對角線等長

$$\overline{BD} = \overline{AC} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}$$

$$\therefore \text{兩對角線的和} = \overline{BD} + \overline{AC} = 2\sqrt{34} + 2\sqrt{34} = 4\sqrt{34} (cm)$$



2 如右圖，菱形 $ABCD$ 中，對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點。若 $\overline{BC}=25$ ， $\overline{AC}=14$ ，則 $\overline{BD}$ 長為多少？



解

∵ 菱形的兩條對角線互相垂直且平分

$$\therefore \overline{OC} = 7$$

$$\overline{OB} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$

$$\text{因此 } \overline{BD} = 24 \times 2 = 48$$

3 有一個梯形兩腰中點的連線段長與高等長，且面積等於 49cm^2 ，則此梯形兩底之和為多少？

解 設梯形兩腰中點的連線段長為 $x(\text{cm})$

由題意可知 $x^2 = 49$ ， $x = \pm 7$ (負不合)

兩底之和為梯形兩腰中點的連線段長的兩倍
得 $7 \times 2 = 14(\text{cm})$



4 關於下列各種四邊形的對角線性質，正確的在空格中打✓。

四邊形 \ 性質	對角線 互相平分	對角線 互相垂直	對角線等長
平行四邊形	✓		
長方形	✓		✓
菱形	✓	✓	
箏形		✓	
正方形	✓	✓	✓
等腰梯形			✓



- 5 四邊形 $ABCD$ 中，兩條對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點。
從下面三個條件 (A)、(B)、(C) 中，挑出最少的條件，使四邊形 $ABCD$ 分別成為菱形、長方形、正方形與平行四邊形。

$$(A) \overline{AC} \perp \overline{BD} \quad (B) \overline{AC} = \overline{BD} \quad (C) \overline{AO} = \overline{CO}, \overline{BO} = \overline{DO}$$

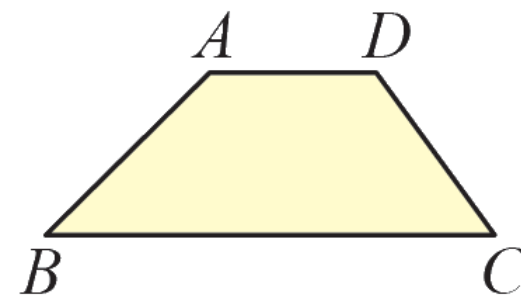
解

- (1) 菱形： (A)、(C) 。
- (2) 長方形： (B)、(C) 。
- (3) 正方形： (A)、(B)、(C) 。
- (4) 平行四邊形： (C) 。



挑錯題

課堂上，老師請同學在右圖的梯形 $ABCD$ (其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \neq \overline{CD}$) 上畫一條線段，使其分割的兩個圖形面積相等。小妍與小翊的說法如下。判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。



小妍

分別取 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點 E 、 F ，則 $\overline{EF}$ 即為所求。

作 $\overline{BC}$ 的中垂線，與 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 分別交於 P 、 Q 兩點，則 $\overline{PQ}$ 即為所求。



小翊

挑錯題

小妍：☒正確；☐錯誤，

理由：分割的兩個梯形的高相等，且上下底的和也相等，故兩圖形的面積相等

小翊：☐正確；☒錯誤，

理由：分割的兩個梯形雖然高相等，但上下底之和不相等

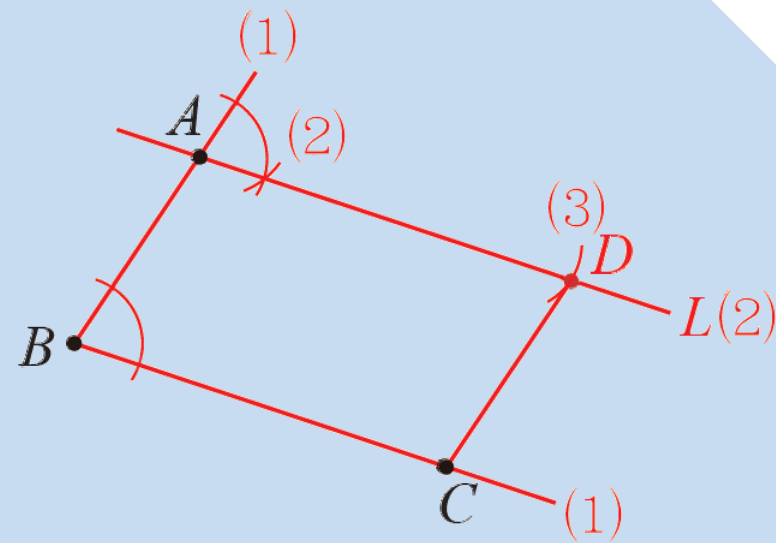


學完本章的數學概念後，你可以翻到書末的數桌遊（P.[8] ），熟練特殊四邊形性質的判別。





如右圖， A 、 B 、 C 為同一平面上不共線的三點。求作一點 D ，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



利用平行四邊形「一雙對邊平行且相等」判別性質

(1)作 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 。

(2)過 A 點作 $L \parallel \overline{BC}$ 。

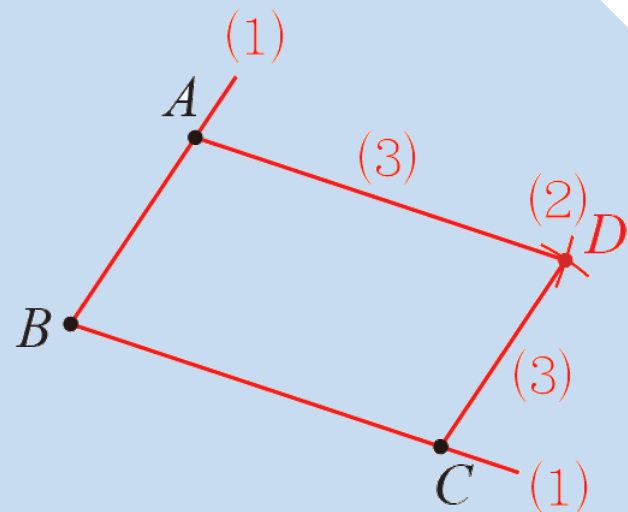
(3)在 L 上取一點 D ，使得 $\overline{BC} = \overline{AD}$ 。

連接 $\overline{CD}$ ，則四邊形 $ABCD$ 即為所求。





如右圖， A 、 B 、 C 為同一平面上不共線的三點。求作一點 D ，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



利用平行四邊形「兩雙對邊分別相等」判別性質

(1)作 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 。

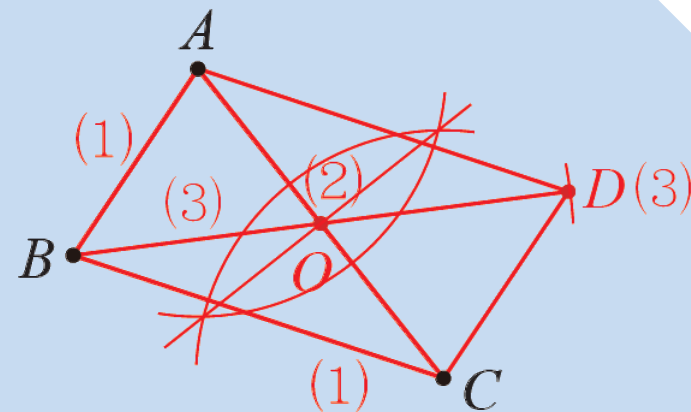
(2)分別以 A 、 C 為圓心， $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 為半徑畫弧，
設兩弧交於 D 點。

(3)連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ ，則四邊形 $ABCD$ 即為所求。





如右圖， A 、 B 、 C 為同一平面上不共線的三點。求作一點 D ，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



利用平行四邊形「兩條對角線互相平分」判別性質

(1) 連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 。

(2) 連接 $\overline{AC}$ ，取 $\overline{AC}$ 中點為 O 點。

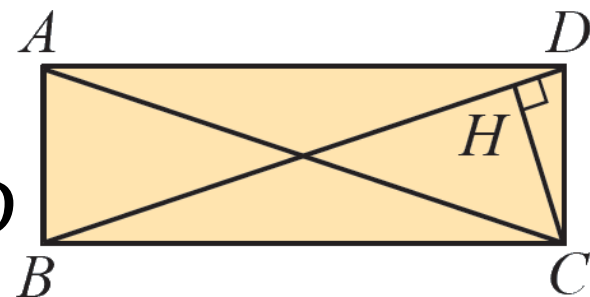
(3) 連接 $\overline{BO}$ ，並延長 $\overline{BO}$ 到 D 點，使得 $\overline{BO} = \overline{OD}$ 。
連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ ，則四邊形 $ABCD$ 即為所求。



An aerial photograph of a busy beach parking lot. The lot is filled with various cars, including a white van with 'ACTIME' branding. Palm trees are scattered throughout the scene, some in the foreground and others lining the beach. In the background, the sandy beach meets the ocean with waves breaking. A small building is visible on the right side of the image. The text '學完囉!' is overlaid in the center of the image.

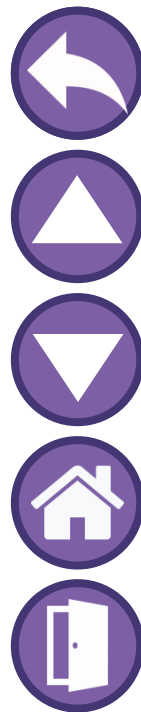
學完囉!

如右圖，長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AC}=13$ ，
 $\overline{CH}=4$ ，且 $\overline{CH} \perp \overline{BD}$ 於 H ，則長方形 $ABCD$
的面積為多少？

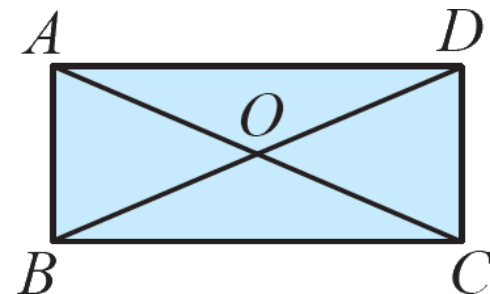


解

52

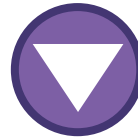


如右圖，長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{OB}=13$ ，
 $\overline{BC}=24$ ，則長方形 $ABCD$ 的周長為多少？

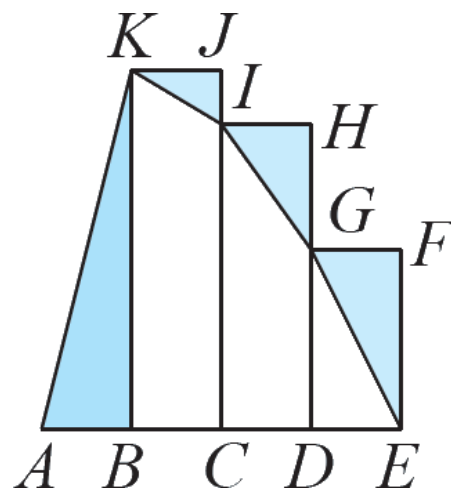


解

68



右圖中三個四邊形 $BCJK$ 、 $CDHI$ 、 $DEFG$ 均為矩形，且 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五點在同一直線上。已知 I 、 G 兩點分別在 $\overline{CJ}$ 與 $\overline{DH}$ 上，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ 。若 $\triangle ABK$ 的面積為 a ， $\triangle EFG$ 、 $\triangle GHI$ 、 $\triangle IJK$ 的面積和為 b ，則 $a : b = ?$



(A) 1 : 1 (B) 1 : 2

(C) 1 : 3 (D) 2 : 3 【94 年第一次基本學測】

解

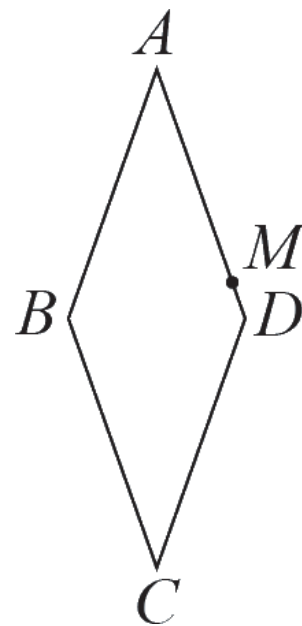
(A)

如右圖，有一菱形 $ABCD$ ， $\overline{AB}=4$ ，面積為 $2\sqrt{2}$ 。

若 $\overline{AD}$ 上有一點 M ，則 M 到直線 BC 的距離為何？

【98 年第二次基本學測】

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{2}$



解

(B)

設 $A(-6, 5)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(8, 5)$ 、 $D(1, 9)$ 為坐標平面上的四個點，則連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 後，所得的四邊形 $ABCD$ 為哪一種四邊形？四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？

解 (1) 將四點坐標繪出如右圖所示

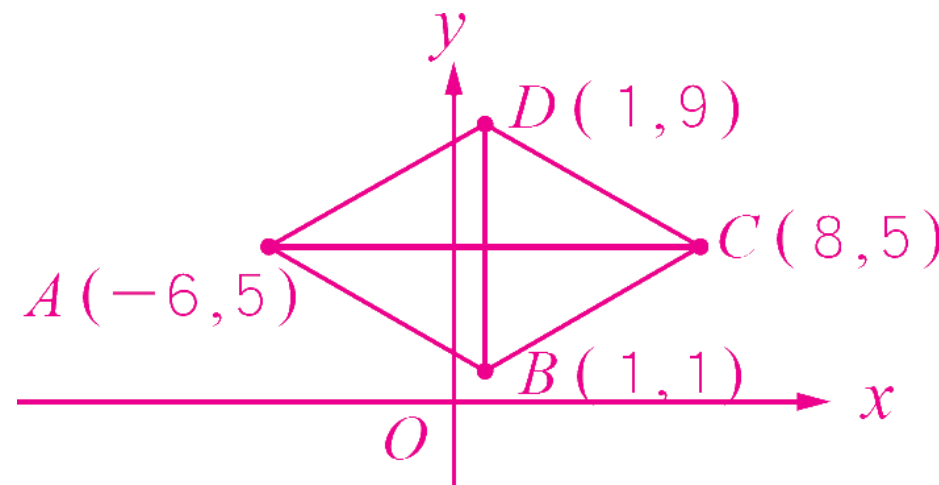
可知 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直平分，

故四邊形 $ABCD$ 為菱形

(2) 因為四邊形 $ABCD$ 為菱形

且 $\overline{AC} = 8 - (-6) = 14$ ， $\overline{BD} = 9 - 1 = 8$

所以菱形 $ABCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 14 \times 8 = 56$



一菱形的兩對角線長分別為 10 公分與 24 公分，求此菱形的面積與周長。



解

(1)菱形的面積 = $10 \times 24 \div 2 = 120$ (平方公分)

(2)菱形的兩對角線互相垂直平分， $10 \div 2 = 5$ ， $24 \div 2 = 12$

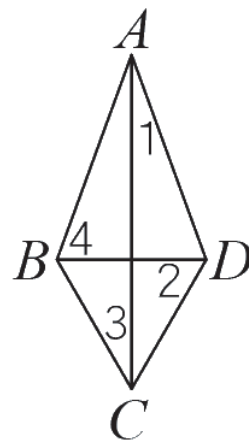
所以菱形的邊長即為兩股長為 5 公分、12 公分的
直角三角形的斜邊長

即菱形的邊長為 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

故菱形的周長為 $13 \times 4 = 52$ (公分)

如右圖， $ABCD$ 為箏形，其中 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{CB} = \overline{CD}$ 。

若 $\angle 1 = 20^\circ$ ， $\angle 2 = 60^\circ$ ，則 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的度數為多少？

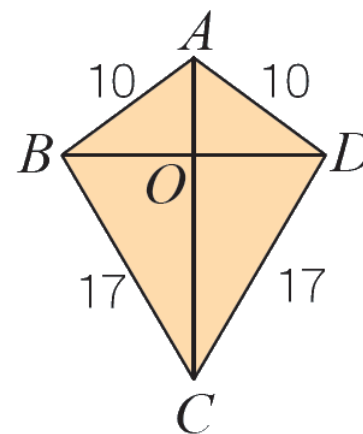
**解**

$$\angle 3 = 30^\circ, \angle 4 = 70^\circ$$



如右圖， $ABCD$ 為箏形，其中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 10$ ，
 $\overline{CB} = \overline{CD} = 17$ ，且 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 O 點。若 $\overline{BO} = 8$ ，則：

- (1) $\overline{AC} = ?$
- (2) 箏形 $ABCD$ 的面積為多少？



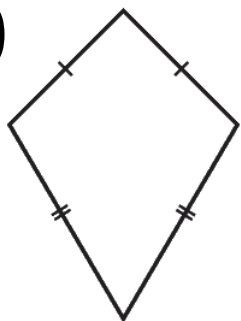
解

(1) 21

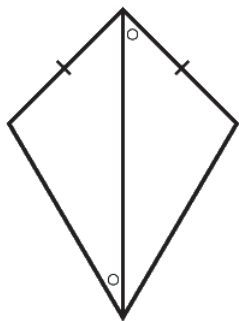
(2) 168

下列哪一個四邊形不一定是箏形？

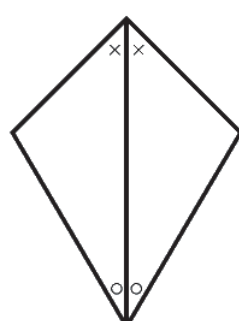
(A)



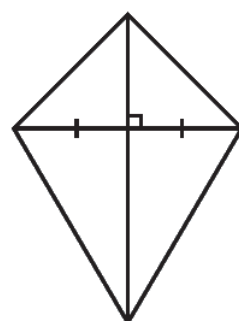
(B)



(C)



(D)



解

(B)



下列敘述何者錯誤？

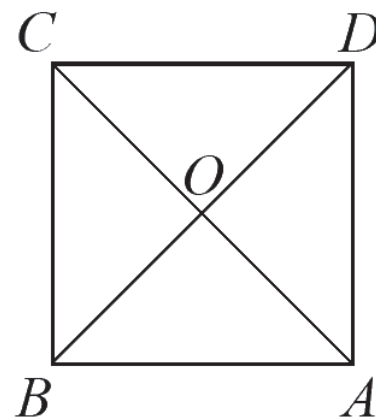
- (A) 正方形是長方形
- (B) 正方形是菱形
- (C) 正方形是平行四邊形
- (D) 一對角線垂直平分另一條對角線的四邊形必為菱形

解

(D)



如右圖， O 為正方形 $ABCD$ 對角線的交點，且 $\overline{AO}=5$ ，則正方形 $ABCD$ 的周長與面積分別為多少？

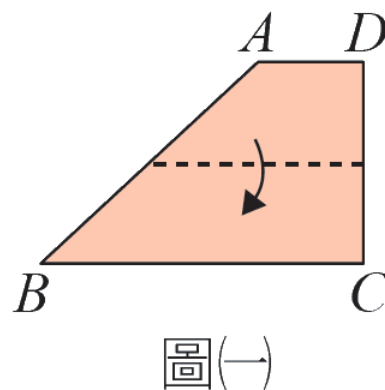


解 周長為 $20\sqrt{2}$ ，面積為 50

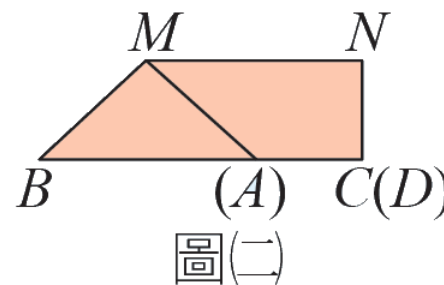
圖(一)為一梯形 $ABCD$ ，其中 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{CD} = 12$ 。若將 $\overline{AD}$ 疊合在 $\overline{BC}$ 上，出現摺線 $\overline{MN}$ ，如圖(二)所示，則 $\overline{MN}$ 的長度為何？

- (A) 9 (B) 12
(C) 15 (D) 21

【96 年第一次基本學測】



圖(一)



圖(二)

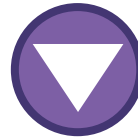
解

(B)

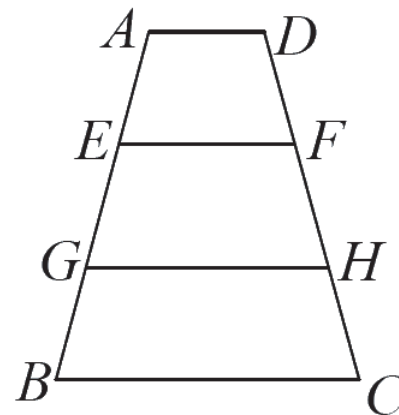
梯形上、下底的比是 $2:5$ ，且上、下底的差是 12 公分，
則梯形兩腰中點的連線段長為多少公分？

解

14 公分



如右圖，梯形 $ABCD$ 的高為 10， $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{GB}$ ， $\overline{DF} = \overline{FH} = \overline{HC}$ 。若 $\overline{EF} = 5$ ， $\overline{GH} = 7$ ，則梯形 $ABCD$ 的面積為多少？



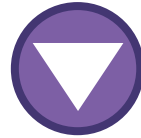
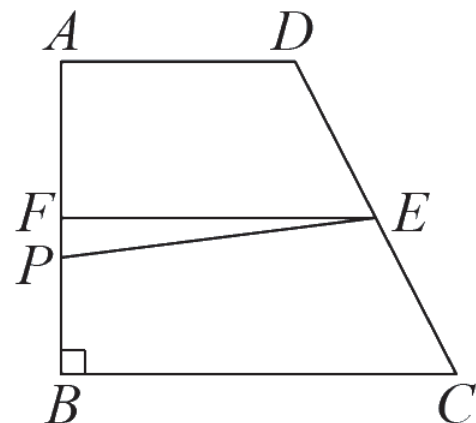
解

60

如右圖，梯形 $ABCD$ 的兩底長為 $\overline{AD}=6$ ， $\overline{BC}=10$ ，兩腰中點的連線段為 $\overline{EF}$ ，且 $\angle B=90^\circ$ 。若 P 為 $\overline{AB}$ 上的一點，且 $\overline{PE}$ 將梯形 $ABCD$ 分成面積相同的兩區域，則 $\triangle EFP$ 與梯形 $ABCD$ 的面積比為何？

【99 年第一次基本學測】

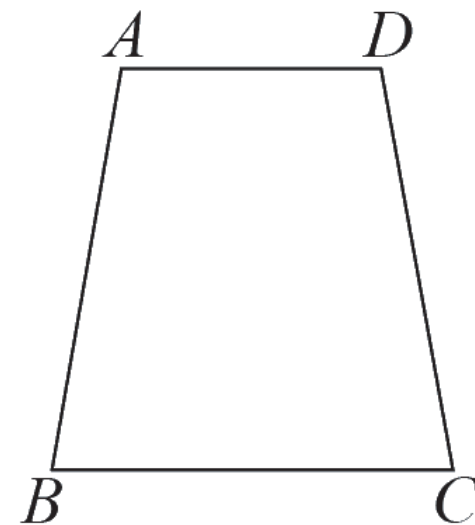
- (A) 1 : 6 (B) 1 : 10 (C) 1 : 12 (D) 1 : 16



解

(D)

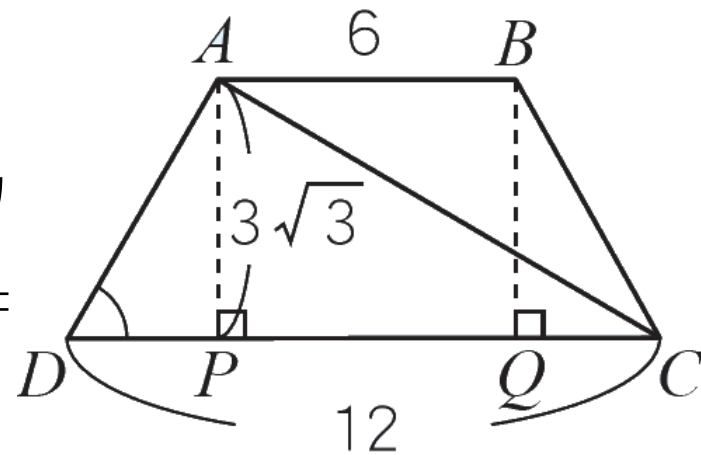
如右圖， $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\angle A = 2x^\circ$ ， $\angle B = (x + 30)^\circ$ ，則 $\angle C$ 、 $\angle D$
分別為多少度？



解

$$\angle C = 80^\circ, \angle D = 100^\circ$$

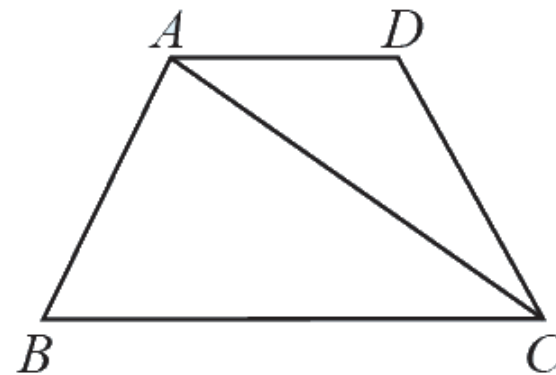
如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。
過 A 、 B 分別作 $\overline{CD}$ 的垂直線段，垂足為 P 、 Q ，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{CD} = 12$ ， $\overline{AP} = \overline{BQ} = 3\sqrt{3}$ ，則對角線 $\overline{AC} = ?$



解

 $6\sqrt{3}$

如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
且 $\overline{AD} = 5$ 公分， $\overline{BC} = 11$ 公分， $\overline{AC} = 10$ 公分，
則 $ABCD$ 的面積為多少平方公分？



解

48 平方公分



下列敘述何者正確？

- (A) 等腰梯形的對角線互相平分
- (B) 兩底角相等的梯形一定是等腰梯形
- (C) 對角線等長的四邊形一定是矩形
- (D) 兩組對邊分別相等的四邊形一定是矩形

解

(B)



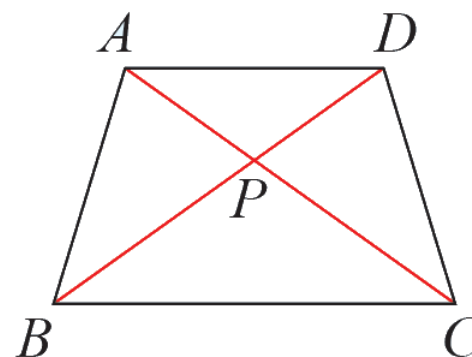
如右圖，已知四邊形 $ABCD$ 為梯形，則加上下列哪一個條件後，四邊形 $ABCD$ 不一定 成為等腰梯形？

(A) $\overline{AC} = \overline{BD}$

(B) $\overline{AP} = \overline{DP}$

(C) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

(D) $\angle ABC = \angle DCB$



解

(C)