

單元 5 指數函數

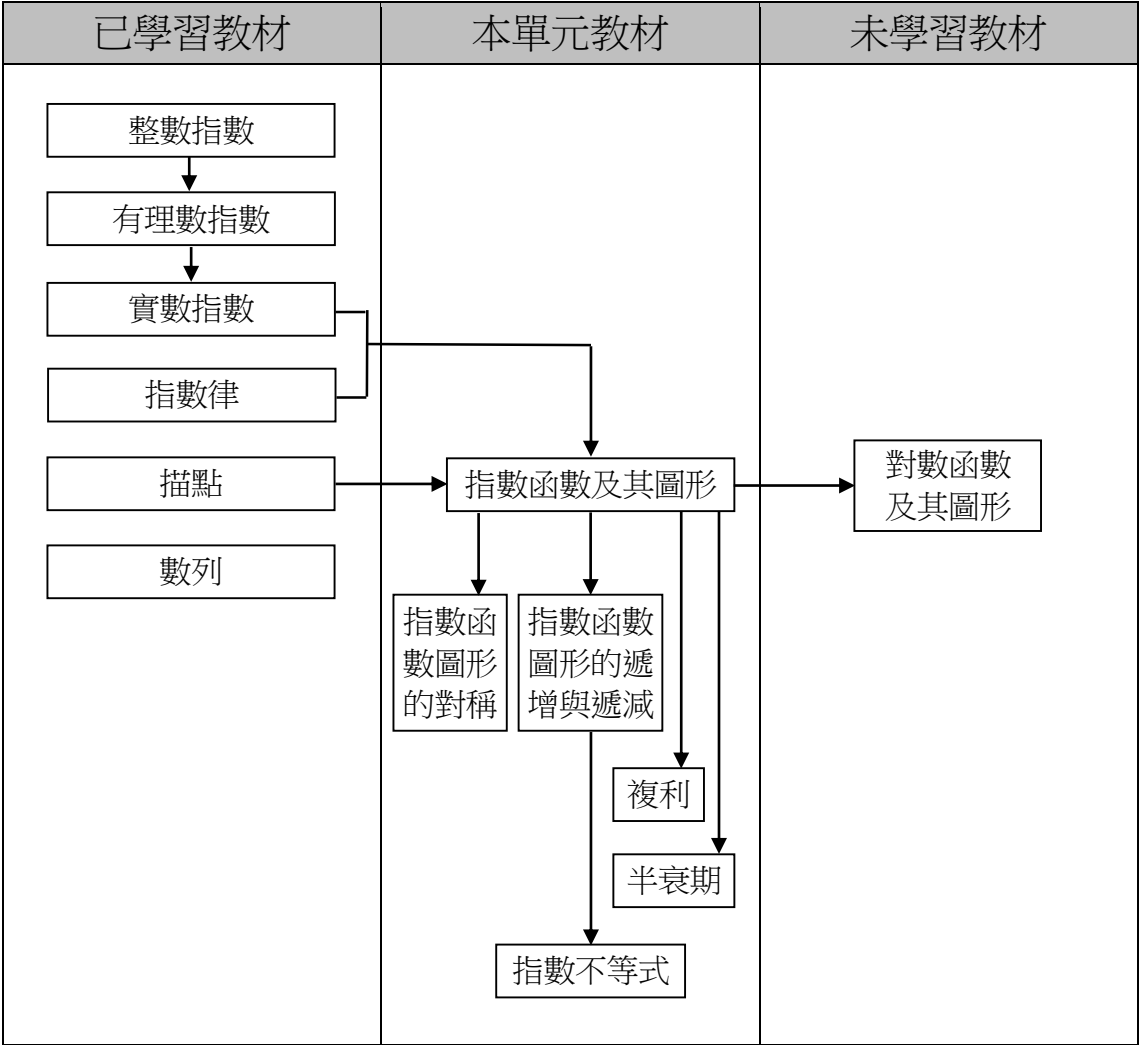
一、教材摘要

利用描點的方式畫出指數函數的圖形，由圖形分析此函數的特徵，同時也說明底數 $a > 1$ 與 $0 < a < 1$ 時之指數函數 $y = a^x$ 的遞增遞減性。透過指數函數圖形應用於解指數方程式、比大小、與不等式。

二、教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 能描繪 $y = a^x$ 的函數圖形。 2. 能了解底數 $a > 1$ 與 $0 < a < 1$ 時，函數 $y = a^x$ 之圖形的性質。 3. 能解指數方程式與指數不等式。	4

三、教材地位分析



P.82

教學要點

- ①描繪 $y = a^x$ 的函數圖形並介紹底數 $a > 1$ 與 $0 < a < 1$ 時，函數 $y = a^x$ 之圖形的性質。

數學知識家

- ①此處可進行教學活動，讓學生體驗指數函數的遞增速度，更多相關內容，請見補充教材一飛快的指數函數圖形。

P.83

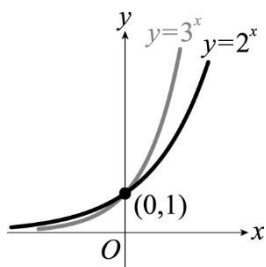
教學小提醒

- ①因為底數 $a = 1$ 時，函數圖形為水平線，不具有底數 $a \neq 1$ 之函數圖形的各項特性，所以不在我們討論的範圍中。

P.84

教學小提醒

- ①(1)關注同學在畫圖時是否讓曲線「平滑」。
(2)描繪 $y = 3^x$ 的圖形時，可與 $y = 2^x$ 的圖形稍作比較。



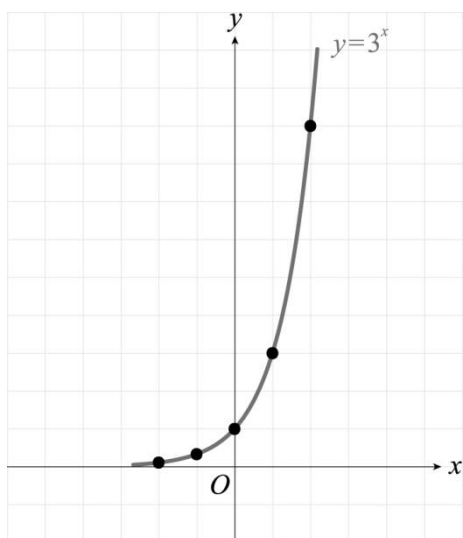
- ②讓同學自行描繪指數函數圖形，並體會這種遞增（或遞減）速度極快的函數與其特徵。

隨堂練習解答

① 首先列出一些滿足 $y = 3^x$ 的點 (x, y) ：

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

接著將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上，最後再用平滑曲線把這些點連接起來而得出下圖，即為 $y = 3^x$ 的圖形。

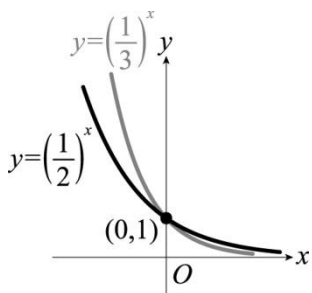


P.85

教學小提醒

①(1)關注同學在畫圖時是否讓曲線「平滑」。

(2)描繪 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 圖形時，可與 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形稍作比較。

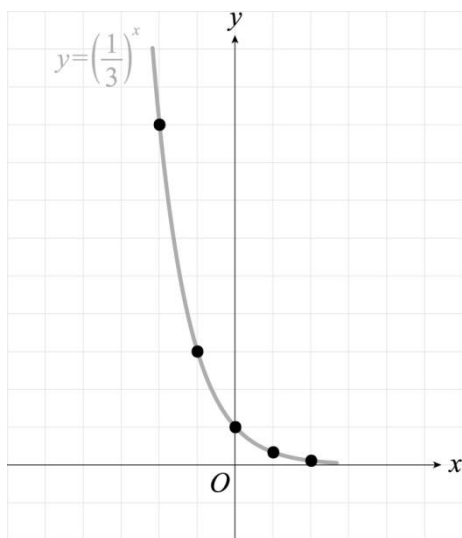


隨堂練習解答

- ① 首先列出一些滿足 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的點 (x, y) ：

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

接著將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上，最後再用平滑曲線把這些點連接起來而得出右圖，即為 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖形。



P.86

教學小提醒

- ①(1)讓同學觀察並比較函數 $y = a^x$ 在底數 $a > 1$ 和底數 $0 < a < 1$ 時圖形上的不同，並試著寫出其不同點。

- (2)引導同學觀察出 $y = 2^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的對稱性。

- ②遞增函數與遞減函數的定義留待高三說明。

設函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 有定義，且 x_1 、 x_2 為 $[a, b]$ 內的任意兩數。

- (1)若 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上為嚴格遞增函數。

若 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上為遞增函數。

- (2)若 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上為嚴格遞減函數。

若 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，則稱 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上為遞減函數。

P.87

教學小提醒

①函數凹口的性質：

(1)函數 $f(x)$ 凹口向上 $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 。

(2)函數 $f(x)$ 凹口向下 $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 。

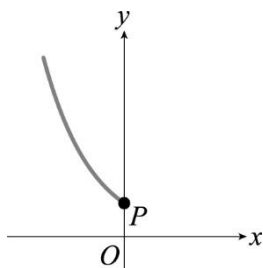
隨堂練習解答

①因為函數 $y = a^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的圖形對稱於 y 軸，所以 $f(x) = 5^x$ 。

P.88

補充例題

①下圖為函數 $y = a^x$ 的部分圖形，選出正確的選項：



(1) $\overline{OP} = 1$

(2) $0 < a < 1$

(3) $y = a^x$ 的圖形與每一條水平線均相交

(4) 若 $(100, k)$ 為 $y = a^x$ 函數上一點，則 $k > 0$ 。

解：(1)因為 $a^0 = 1$ ，所以函數 $y = a^x$ 的圖形通過點 $(0, 1)$ ，因此 $\overline{OP} = 1$ 。

(2)因為函數 $y = a^x$ 為遞減函數，所以 $0 < a < 1$ 。

(3) $y = a^x$ 的圖形僅與 x 軸上方的水平線相交。

(4)因為 a^x 的值恆為正數，所以 $k = a^{100} > 0$ 。

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(4)。

隨堂練習解答

①由圖形可知：

(1)因為 $y = a^x$ 為嚴格遞增函數，所以 $a > 1$ 。

(2)因為 P 點坐標為 $(0, 1)$ ，所以 $\overline{OP} = 1$ 。

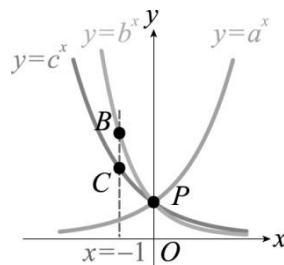
(3)因為 $y = a^x$ 與 $y = c^x$ 對稱於 y 軸，所以 $ac = 1$ 。

(4)作直線 $x = -1$ 分別與 $y = b^x$ 和 $y = c^x$ 交於

$B\left(-1, \frac{1}{b}\right), C\left(-1, \frac{1}{c}\right)$ 兩點，如右圖所示，

因為 B 點在 C 點的上方，所以 $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} \Rightarrow b < c$ 。

故選(1)(2)(3)(4)。



P.89

教學要點

①介紹指數方程式與指數不等式，並比較不同底數之指數函數圖形之間的差異。

P.90

教學小提醒

①提醒同學解指數方程式須注意：

(1)當 $a \neq 1, a > 0, a^{x_1} = a^{x_2}$ 時， $x_1 = x_2$ 。

(2)當 $a > 0$ 時， $a^x > 0$ 。

補充例題

①已知 $(4.5)^x = (0.45)^y = 100$ ，求 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 。

解： $(4.5)^x = 100 \Rightarrow 4.5 = (100)^{\frac{1}{x}}, (0.45)^y = 100 \Rightarrow 0.45 = (100)^{\frac{1}{y}}$ ，

$$\text{故 } \frac{4.5}{0.45} = \frac{100^{\frac{1}{x}}}{100^{\frac{1}{y}}} = 100^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$\Rightarrow 10 = 100^{\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}。$$

②解下列各方程式：

(1) $10^x - 5^x - 2^x + 1 = 0$

(2) $6^x - 4 \times 3^x - 3 \times 2^x + 12 = 0$

(3) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3^x - 3^y = 2 \end{cases}$

解：(1) $10^x - 5^x - 2^x + 1 = (2^x - 1)(5^x - 1) = 0$ ，

即 $2^x = 1$ 或 $5^x = 1$ ，因此 $x = 0$ 。

(2) $6^x - 4 \times 3^x - 3 \times 2^x + 12 = 0$ ，

即 $(2^x - 4)(3^x - 3) = 0$ ，

故 $2^x = 4$, $x = 2$ 或 $3^x = 3$, $x = 1$ 。

(3) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3^x - 3^y = 2 \end{cases}$ ， $3^{2y+1} - 3^y - 2 = 0 \Rightarrow (3 \times 3^y + 2)(3^y - 1) = 0$ ，

因為 $3^y > 0$ ，所以 $3^y = 1$ ，

故 $y = 0$ 且 $x = 1$ 。

P.91

隨堂練習解答

①(1) 因為由 $2^{\frac{x}{30}} = 1024$ 可得 $2^{\frac{x}{30}} = 2^{10}$ ，所以 $\frac{x}{30} = 10$ ，解得 $x = 300$ 。

(2) 因為由 $2^{3x^2} = 4 \times 2^{5x}$ 可得 $2^{3x^2} = 2^{5x+2}$ ，所以 $3x^2 = 5x + 2$ ，解得 $x = -\frac{1}{3}$ 或 2 。

(3) 設 $t = 2^x$ ，因為 $4^{x+1} = 4 \times 2^{2x} = 4t^2$ ，所以方程式可化為 $4t^2 - 9t + 2 = 0$ ，

即 $(4t - 1)(t - 2) = 0$ ，解得 $t = \frac{1}{4}$ 或 $t = 2$ 。

由 $2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ 解得 $x = -2$ ，

由 $2^x = 2$ 解得 $x = 1$ ，

故 $x = -2$ 或 1 。

P.92

教學小提醒

①提醒同學比較三指數的大小關係時，先將底數改成相同。

②提醒同學比較指數形態之數的大小關係時，須注意底數的範圍：

(1) 當 $a > 1$ 時，若 $a^{x_1} > a^{x_2}$ ，則 $x_1 > x_2$ 。

(2) 當 $0 < a < 1$ 時，若 $a^{x_1} > a^{x_2}$ ，則 $x_1 < x_2$ 。

補充例題

①下列五個數中，何者為最小？

$$(1) 2^{\frac{1}{3}} \quad (2) \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \quad (3) 2^{-\frac{1}{4}} \quad (4) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5) 8^{-\frac{1}{3}}。$$

$$\text{解：}(2) \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = (2^{-3})^{-2} = 2^6。$$

$$(4) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}。$$

$$(5) 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1}。$$

因為底數 $2 > 1$ ，所以 $2^{-1} < 2^{-\frac{1}{2}} < 2^{-\frac{1}{4}} < 2^{\frac{1}{3}} < 2^6$ 。

故最小值為選項(5)。

隨堂練習解答

①將以上三數都化成以 2 為底的指數：

$$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}，$$

$$b = \sqrt[3]{4} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}，$$

$$c = \sqrt[4]{8} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}。$$

因為 $y = 2^x$ 是嚴格遞增函數且 $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ ，所以 $c > b > a$ 。

P.93

隨堂練習解答

①(1)上式可化為 $3^{2x+1} > 3^{-1}$ ，因為底數 $3 > 1$ ，所以 $2x+1 > -1$ ，解得 $x > -1$ 。

$$(2) \text{設 } t = 2^x，\text{因為 } 2^{1-2x} = \frac{2}{2^{2x}} = \frac{2}{t^2} \text{ 且 } 9 \times 2^{-x} = \frac{9}{t}，$$

$$\text{所以不等式可化為 } \frac{2}{t^2} - \frac{9}{t} + 4 \leq 0，$$

$$\text{不等式同乘以 } t^2 \text{ 得 } 4t^2 - 9t + 2 \leq 0，$$

$$\text{即 } (4t-1)(t-2) \leq 0，\text{解得 } \frac{1}{4} \leq t \leq 2。$$

$$\text{由 } \frac{1}{4} \leq t \leq 2，\text{即 } \frac{1}{4} \leq 2^x \leq 2，\text{解得 } -2 \leq x \leq 1。$$

P.94

教學小提醒

- ①半衰期（英語：Half-life）是指某種特定物質的濃度經過某種反應降低到剩下初始時一半所消耗的時間，常見的例子有：放射性核素的衰變、一級化學反應、藥物在體內的吸收和代謝等。

參考資料：維基百科

- ②碳 14 定年法，又稱碳測年、放射性碳定年法，是利用自然存在的碳 14 同位素的放射性定年法，用以確定原先存活的動物和植物的年齡的一種方法，可測定早至五萬年前含碳有機物質的年代。對於考古學與晚第四紀地質研究來講，這是一個準確的定年法技術。

參考資料：維基百科

- ③與學生說明：因為半衰期為 5700 年，所以一年衰變為原來的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5700}}$ 。

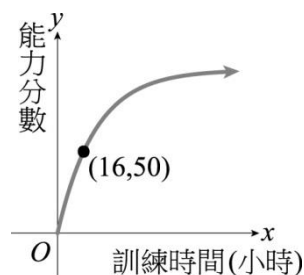
P.95

教學小提醒

- ①此處可介紹 m 與 a 的數學意涵。

補充例題

- ①游泳訓練機構統計發現，經過 x 小時的訓練，學員掌握自由式游泳技巧的「能力分數」為函數 $f(x) = 100(1 - a^x)$ ，其中 a 是常數。右圖是 $y = f(x)$ 的部分圖形，當能力分數為 75 時，表示此學員可以游完 100 公尺的距離，試問：一名學員應該接受幾小時的訓練，才能游完 100 公尺呢？



解：因為函數圖形通過點 $(16, 50)$ ，

所以將其代入函數得 $50 = 100(1 - a^{16})$ ，

解得 $a^{16} = 0.5$ ， $a = 0.5^{\frac{1}{16}}$ ，即函數 $f(x) = 100\left(1 - 0.5^{\frac{x}{16}}\right)$ 。

若 $f(x) = 75$ ，即 $75 = 100\left(1 - 0.5^{\frac{x}{16}}\right)$ ，得 $0.5^{\frac{x}{16}} = 0.25 = (0.5)^2$ ，

即 $\frac{x}{16} = 2$ ，解得 $x = 32$ 。

因此學員應該接受 32 小時的訓練，才能游完 100 公尺。

隨堂練習解答

①因為碘 131 的半衰期為 8 天，表示該元素經過 8 天後剩下原來的 $\frac{1}{2}$ ，所以，經過 x 天後，

碘 131 的含量為原來 3200 的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$ 倍。依據題意可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}} < \frac{100}{3200} = \frac{1}{32}$ ，

再將不等式化為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}} < \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ，又因為底數 $\frac{1}{2} < 1$ ，所以 $\frac{x}{8} > 5$ ，解得 $x > 40$ 。

故至少要超過 40 天，其含量才會在安全容許量以內。

P.96

教學小提醒

①複利的計算是以前一期的「本利和」當作下一期的本金，連續計息，提醒同學這是一個基本的概念。讓同學互相討論後整理出複利的計息方法，參考做法如下：

(1)先得到每期的利率 $r\%$ （依期限不同，如年利率、月利率）。

(2)確定期數 n 。

(3)若本金為 P ，則複利的連續計息得本利和為 $P(1+r\%)^n$ 。

P.97

隨堂練習解答

①六年後單利的本利和為 $100(1+2.5\%\times 6)=100(1+0.15)=115$ （萬元）。

六年後複利的本利和為 $100(1+2.5\%)^6=100(1.025)^6$ （萬元）。

利用計算機得 $100(1.025)^6$ （萬元） ≈ 1159693 （元）。

六年期滿領回本利和時，複利計息比單利計息多領 9693（元）。

P.98

數學知識家

①更多的介紹請見補充教材—複利與自然對數的底數 e 。