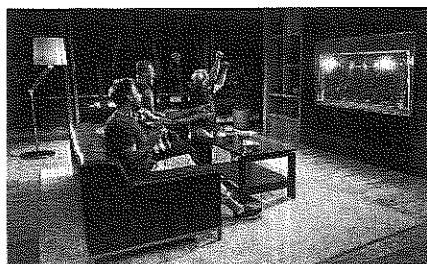


4 條件機率

網路影音平台常會將影片推薦給可能感興趣的用戶，例如，平台透過統計數據發現：在某用戶喜歡影片甲的條件下，該用戶也喜歡影片乙的機率是很高的，此時，影音平台便會主動推薦影片乙給喜歡影片甲的用戶。

上述的「在某用戶喜歡影片甲的條件下，也喜歡影片乙的機率」是本單元介紹的重點之一。



▲圖 1

甲 條件機率



第二冊學過：一項試驗中所有可能發生的結果所成的集合，稱為這個試驗的樣本空間（通常以集合 S 表示）；樣本空間 S 的任一子集都稱為一個事件。若 S 中每個樣本點出現的機會均等，則事件 A 發生的機率為

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},$$

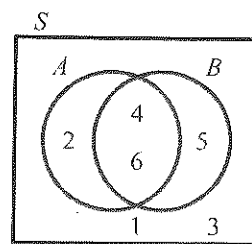
其中 $n(S)$ 與 $n(A)$ 分別為 S 及 A 的樣本點個數。例如：擲一粒公正骰子一次，其樣本空間為 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，因為擲出點數大於 3 的事件為 $\{4, 5, 6\}$ ，所以擲出點數大於 3 的機率為 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。但「在擲出點數為偶數的條件下」，擲出點數大於 3 的機率還會是 $\frac{1}{2}$ 嗎？我們說明如下。

設 A 表示擲出點數為偶數的事件， B 表示擲出點數大於 3 的事件，即

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{4, 5, 6\},$$

如圖 2 所示。因為已知擲出點數為偶數（即事件 A 發生），所以點數大於 3（即事件 B 也要發生）的機率就是「 $A \cap B$ 在 A 中所占的比例」，即

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3}。$$



▲圖 2

上式中的 $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 可以解讀成「在樣本空間 A 中，事件 $A \cap B$ 發生的機率」。也

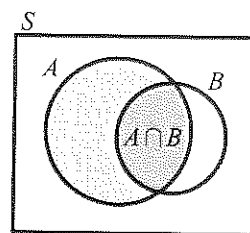
就是說，在已知事件 A 發生的條件下，可以解讀成樣本空間由原先的 S 限縮到 A 。

一般而言，我們把「在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率」，稱為條件機率，記作 $P(B|A)$ 。利用「 $A \cap B$ 在 A 中所占的比例」的算法可知：在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}，$$

再將分子與分母同時除以 $n(S)$ ，得

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}。$$



▲圖 3

將以上內容整理如下。

條件機率

當 A, B 為兩事件且 $P(A) > 0$ 時，將「在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率」稱為條件機率，以符號 $P(B|A)$ 表示，也就是

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}。$$

符號 $P(B|A)$ 讀作「在 A 發生的條件下， B 發生的機率」。

練習求條件機率。

例題 1

擲一粒公正骰子一次。在出現點數為質數的條件下，求擲出點數小於 5 的機率。

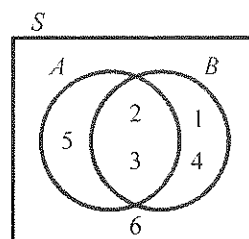
解

設 A 表示擲出點數為質數的事件， B 表示擲出點數小於 5 的事件。根據題意，得

$A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ，且 $A \cap B = \{2, 3\}$ 。

故在 A 發生的條件下， B 發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3}。$$



隨堂練習

一副撲克牌共有 52 張，從中隨機抽取一張。在抽到花色為紅心的條件下，求抽到點數為 6 的機率。



符號 $P(B|A)$ 與 $P(A|B)$ 的意義不同，不可混淆，舉例說明如下。

例題 2

某公司員工的健康檢查中，有 40 人血壓正常，有 32 人血脂正常，有 24 人兩種都正常。今從該公司任選一員工，試回答下列問題。

- (1) 已知此員工血壓正常，求他血脂也正常的機率。
- (2) 已知此員工血脂正常，求他血壓也正常的機率。

解

設 A 表示選出者血壓正常的事件， B 表示選出者血脂正常的事件。根據題意，得

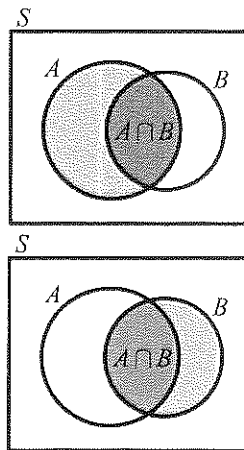
$$n(A) = 40, n(B) = 32, n(A \cap B) = 24。$$

- (1) 在 A 發生的條件下， B 發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}。$$

- (2) 在 B 發生的條件下， A 發生的機率為

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}。$$



隨堂練習

班上學生某次期中考試中，有 33 人英文及格，有 28 人數學及格，有 18 人兩科都及格。今從班上任選一學生，試回答下列問題。

- (1) 已知此學生的英文及格，求他數學也及格的機率。
- (2) 已知此學生的數學及格，求他英文也及格的機率。

再練習條件機率。

例題 3

已知 $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, 且 $P(B|A) = \frac{5}{12}$, 求下列各機率。

- (1) $P(A \cap B)$ 。 (2) $P(A|B)$ 。

解

(1) 因為 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, 即 $\frac{5}{12} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{2}{5}}$, 所以

$$P(A \cap B) = \frac{5}{12} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{6}。$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}。$$

隨堂練習

已知 $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{7}$, 且 $P(A \cup B) = \frac{6}{7}$, 求下列各機率。

- (1) $P(A \cap B)$ 。 (2) $P(B|A)$ 。

4 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

- ☐ (1) 若事件 A 與 B 滿足 $P(A) > 0$ ，且 $P(B) > 0$ ，
則 $P(A|B) = P(B|A)$ 。
- ☐ (2) 兩事件 A 與 B 同時發生的機率
 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ 。
- ☐ (3) 若 A 與 B 為獨立事件，則 $A \cap B = \emptyset$ 。

一、基礎題

- ① 同時擲兩粒公正骰子一次。已知這兩粒骰子的點數和為 6，求其中一粒骰子出現 2 點的機率。
- ② 某社區的住戶中，有 $\frac{1}{15}$ 的住戶養狗，有 $\frac{1}{30}$ 的住戶養貓，有 $\frac{1}{40}$ 的住戶兩種都養。今任選該社區一住戶，試回答下列問題。
- (1) 已知此住戶養狗，求該住戶也養貓的機率。
- (2) 已知此住戶養貓，求該住戶也養狗的機率。