8 平面向量

9 平面向量的運算

10 二元一次聯立方程式

數學名言　我深信向量分析會在科學上發揮巨大的影響力。—克里福

8 平面向量

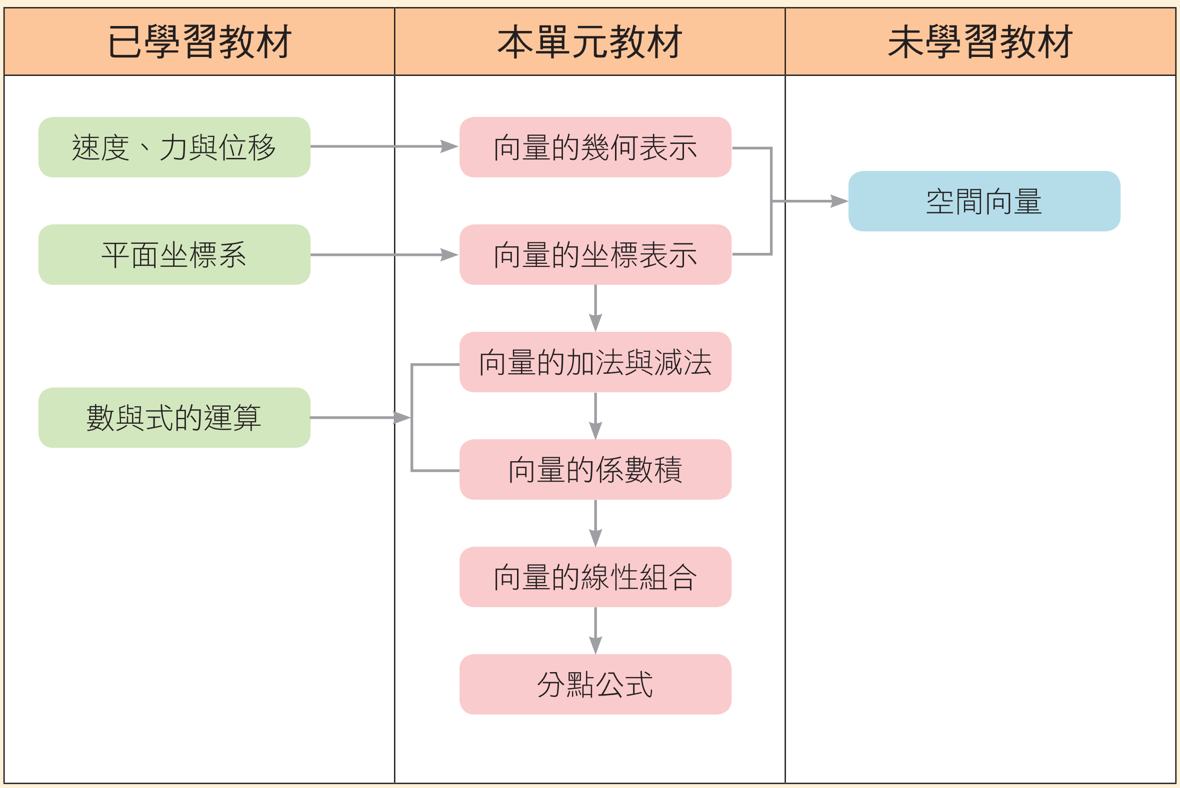
一 教材摘要

首先透過物理量，如位移、力、速度等，介紹向量及其表示法。接著說明向量加法、減法與係數積的意義及基本性質，其中在平面幾何上的應用證明了「三角形兩邊中點連線定理」。最後由向量的係數積引出向量的線性組合及分點公式。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 了解有向線段與向量的意義，並能說出構成向量的要素。 2. 能了解平面向量坐標表示法的意義。 3. 能用三角形法則或平行四邊形法則作向量的加法運算，並知道向量加法運算的基本性質。 4. 能利用反向量的概念，作向量的減法運算。 5. 能了解向量係數積的意義，並知道係數積的基本性質。 6. 能用向量坐標表示法求向量的和、差與係數積。 7. 能判定兩向量是否平行。 8. 能利用向量的運算證明「三角形兩邊中點連線定理」。 9. 能了解向量的線性組合及其意義。 10. 能使用向量的分點公式，求向量的線性組合。	6

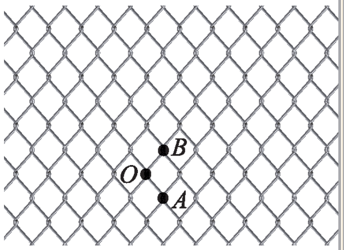
三 教材地位分析


已學習教材
本單元教材
未學習教材
速度、力與位移
平面坐標系
數與式的運算
向量的幾何表示
向量的坐標表示
向量的加法與減法
向量的係數積
向量的線性組合
分點公式
空間向量

8 平面向量

圖 1 是工地圍籬經常使用的菱形網，它是由鐵絲交織而成。我們將菱形網的格線視為直線，則此菱形網可由兩組等距離的平行線所構成；再將格線的三個交點分別標記為 O, A, B。現在有一隻螞蟻從 A 點走直線到 O 點，休息後，再從 O 點走直線到 B 點。螞蟻這兩次的位移雖然長度相等，但方向不同。我們該如何兼顧大小與方向來描述這兩次位移呢？

介紹向量的表示法、加減法、係數積與線性組合是本單元主要的內容。



▲圖 1

教學要點

1 介紹向量的兩種表示法：幾何表示法與坐標表示法。

教學小提醒

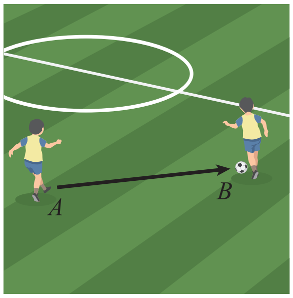
1 除了課文中的位移外，速度、力、力矩等物理量皆為向量。

甲 向量的表示法

數學上，我們將同時具有大小與方向的量稱為**向量**。現在就來介紹它的兩種表示法。 1

(一) 幾何表示法

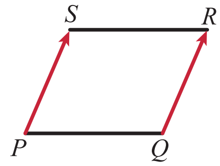
如圖 2，在足球場上，球員 A 將足球傳給球員 B。我們可以用線段將 A, B 兩點連接起來，並在 B 點處畫一箭號表示方向，來描述足球的位移大小和方向。像這種帶有方向的線段，稱為從 A 點到 B 點的**有向線段**，記作 $\overrightarrow{AB}$，並稱 A 點為始點，B 點為終點。 1



▲圖 2

我們常用有向線段來代表向量。由有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 所代表的向量仍然以 $\overrightarrow{AB}$ 表示，而且箭號指出向量的方向，線段 AB 的長度代表向量的大小，記作 $|\overrightarrow{AB}|$，也稱為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的長度。

當向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的長度相等且方向相同時，稱向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ **相等**，記作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。例如在圖 3 的平行四邊形 $PQRS$ 中，$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$。



▲圖 3

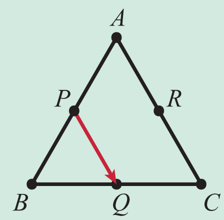
向量是由其長度與方向決定，與始點或終點的位置無關。因此，也可用單一字母，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，來表示向量。

特別地，當始點與終點重合時，這向量稱為**零向量**，記作 $\vec{0}$。零向量的長度為 0，我們不規定它的方向。

例題 1

如圖，已知△ABC 為正三角形，P, Q, R 是三邊的中點。選出所有與 $\overrightarrow{PQ}$ 相等的向量。

(1) $\overrightarrow{PR}$　(2) $\overrightarrow{AR}$　(3) $\overrightarrow{RA}$　(4) $\overrightarrow{RC}$　(5) $\overrightarrow{QR}$。



解

由「三角形兩邊中點連線定理」得知：

$$\overline{PQ} \,/\!/\, \overline{AC} \text{ 且 } \overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{AR}=\overline{RC}。$$

又當兩向量「長度相等且方向相同」時，兩向量相等。因此，

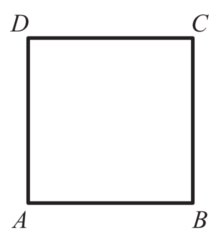
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RC}。$$

故選 (2)(4)。

隨堂練習

正方形 $ABCD$ 的四個邊可決定幾個不相等的向量？

4 個



補充例題

1 正六邊形的 6 個邊可以決定多少個不相等的向量？

解：由向量的定義，可知共 6 個。

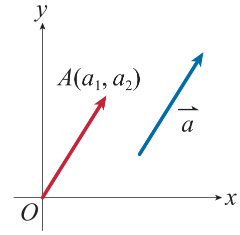
1 **隨堂練習解答**

1 1 正方形的兩組對邊等長且平行，又當兩向量「長度相等，且方向相同」時，兩向量相等，因此，可決定 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ 共 4 個不相等的向量。

(二) 坐標表示法

我們知道：在坐標平面上，任一點都有唯一的坐標來表示。相同地，平面上的向量也可以用坐標唯一表示，說明如下。

在坐標平面上，每一點 A 都可和原點 O 連結形成向量 $\overrightarrow{OA}$，稱為 A 點的**位置向量**。對於任意一個向量 $\overrightarrow{a}$，都可以將其平移，使其始點落在原點 O 上。若平移後其終點為 A，則 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，如圖 4 所示。這樣一來，平面上的每一個 $\overrightarrow{a}$ 都可由平面上的一點 A 決定，且 $\overrightarrow{a}$ 和 A 點的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 相等。因此，向量 $\overrightarrow{a}$ 可以用 A 點的坐標 (a_1, a_2) 唯一表示，記作 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，其中 a_1 和 a_2 分別稱為向量 $\overrightarrow{a}$ 的 **x 分量**與 **y 分量**，並且由兩點距離公式，得向量 $\overrightarrow{a}$ 的長度為



▲圖 4

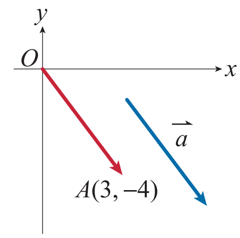
$$|\overrightarrow{a}|=\overline{OA}=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}。$$

例如，若 A 點的坐標為 $(3, -4)$，且 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，則

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(3, -4)$。

(2) 向量 $\overrightarrow{a}$ 的 x 分量為 3，y 分量為 -4。

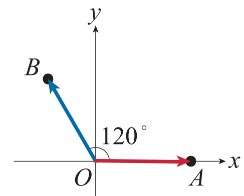
(3) $|\overrightarrow{a}|=\overline{OA}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$。



▲圖 5

隨堂練習

1 如圖，已知 A 點在 x 軸上，$\overline{OA}=\overline{OB}=4$，$\angle AOB=120°$，求向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的坐標表示。



$\overrightarrow{OA}=(4, 0)$；$\overrightarrow{OB}=\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

坐標平面上，給定兩點 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$，該如何將向量 $\overrightarrow{AB}$ 用 A 與 B 的坐標來表示呢？根據前面定義，先將 $\overrightarrow{AB}$ 平移到它的位置向量 $\overrightarrow{OP}$（A 與 O 重合），如圖 6 所示；此時 $\overrightarrow{AB}$ 就可用 P 點的坐標來表示。接著，找出 P 點的坐標 (x, y)，說明如下。

隨堂練習解答

1 因為 A 點的坐標為 $(4, 0)$，
所以 $\overrightarrow{OA}=(4, 0)$。
又因為 B 點的坐標為
$(4\cos 120°, 4\sin 120°)$
$=\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$，
所以 $\overrightarrow{OB}=\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$。

146

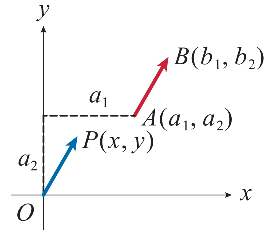
因為將 $\overrightarrow{AB}$ 平移到 $\overrightarrow{OP}$，相當於將整個 $\overrightarrow{AB}$ 往左平移 a_1 單位，再向下平移 a_2 單位，所以

$$x=b_1-a_1,\ y=b_2-a_2,$$

即 P 點的坐標為 $(x,y)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$。故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)。$$

因此，我們有以下的結論。



▲圖 6

向量的坐標表示

若 A, B 兩點的坐標分別為 $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$，則

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)。$$

也就是說，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐標表示法，就是「終點 B 的坐標減去始點 A 的坐標」。

例題 2

已知坐標平面上的三點 $A(1,1), B(3,2)$ 與 $C(4,5)$，且 $ABCD$ 為平行四邊形。

(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$。　　(2) 求 D 點的坐標。

解

(1) 利用上述公式，得

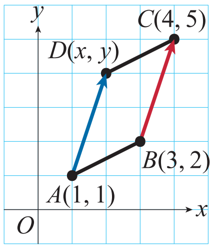
$$\overrightarrow{AB}=(3-1,\ 2-1)=(2,1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(4-3,\ 5-2)=(1,3)。$$

(2) 設 D 點的坐標為 (x,y)。因為 $ABCD$ 為平行四邊形，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，即

$$(x-1,\ y-1)=(1,3)。$$

由 $x-1=1,\ y-1=3$，解得 $x=2,\ y=4$。

故 D 點的坐標為 $(2,4)$。



147

1 **隨堂練習**

1 已知坐標平面上的三點 $A(3,4)$, $B(-1,7)$ 與 $C(-2,3)$，且 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$。

(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $|\overrightarrow{AB}|$。

(2) 求 D 點的坐標。

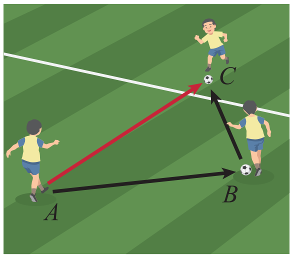
(1) $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$, $|\overrightarrow{AB}|=5$
(2) $(-6,6)$

乙 向量的加法與減法

1 有了向量的表示法後，我們進一步定義向量的加法與減法運算。

(一) 向量的加法

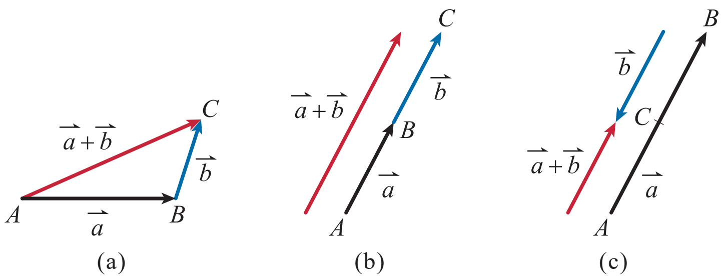
1 足球場上，球員 A 將球傳給球員 B, B 再將球傳給球員 C，如圖 7 所示。這兩次足球位移的和，相當於從 A 移動到 C 的位移。很自然地，規定向量 $\overrightarrow{AC}$ 為 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的和。



▲圖 7

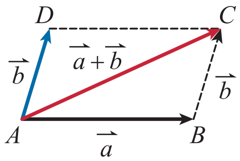
一般而言，任意兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的和也是這樣被定義的：如圖 8 所示，作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，規定 $\overrightarrow{AC}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的和，記作 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，即

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}。$$



▲圖 8

此外，也可利用作平行四邊形的方法求 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$。如圖 9 所示，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$，則平行四邊形 $ABCD$ 的對角線指出之向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$。



▲圖 9

補充例題

1 已知 $ABCD$ 為平行四邊形，且 $A(x,1)$, $B(3,y)$, $C(4,5)$, $D(2,4)$，求實數 x, y 的值。

解：因為 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以
$(2-x,3)=(1,5-y)$，
解得 $x=1$, $y=2$。

隨堂練習解答

1 (1) 利用公式，得
$\overrightarrow{AB}=(-1-3,7-4)$
$=(-4,3)$,
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$。

(2) 設 D 點的坐標為 (x,y)。
因為 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，所以
$(x+2,y-3)=(-4,3)$。
由 $x+2=-4$, $y-3=3$，
解得 $x=-6$, $y=6$。
故 D 點的坐標為
$(-6,6)$。

教學要點

1 介紹向量的加法與減法兩種運算。

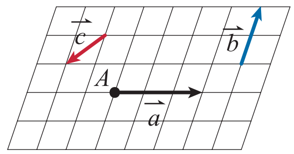
教學小提醒

1 將向量視為位移，兩個向量相加，就是兩次位移的總位移，這樣來描述向量的加法較為具體。

148

隨堂練習

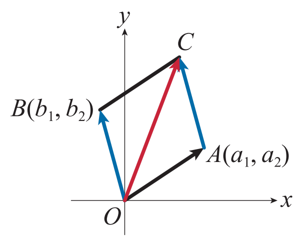
下圖中，每個小平行四邊形均全等。請以 A 點為始點畫出 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$。



圖略

如果 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，那麼 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 的坐標表示是什麼呢？如圖 10 所示，設 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$。以 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 為鄰邊作一平行四邊形 $OACB$，此時

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}。$$



▲圖 10

設 C 的坐標為 (x, y)。因為 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，所以

$$(x-a_1, y-a_2)=(b_1, b_2)，$$

得 $x=a_1+b_1$, $y=a_2+b_2$。於是

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OC}=(a_1+b_1, a_2+b_2)。$$

至於如果出現 O, A, B 三點共線的情形此結果仍然成立。

向量加法的坐標表示

若 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，則 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$。

與實數的加法相同，向量的加法也具有下列性質：

向量加法的性質

對於向量 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$，下列性質成立。

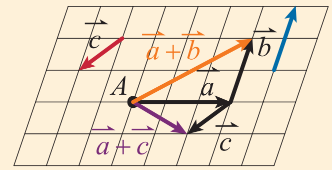
(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$。

(2) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$。

(3) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$。

隨堂練習解答

1 利用三角形法，作圖如下：



149

機車駕照——直線平衡駕駛（請見享備課/教學光碟）

素養題組

證明性質 (1)：設 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$。因為

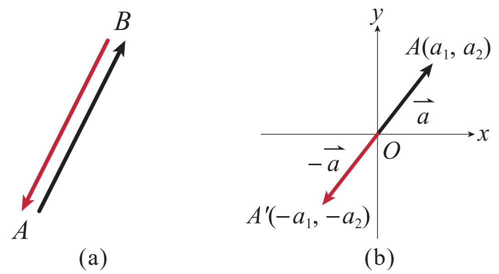
$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2),\ \overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}=(b_1+a_1, b_2+a_2),$$

所以 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$。

至於性質 (2) 及 (3)，可以仿照性質 (1) 的方法證得。

(二) 向量的減法

向量可以相加也可以相減。在介紹減法之前，先規定反向量：當兩向量長度相等，但方向相反時，稱此兩向量互為**反向量**，如圖 11 (a) 中，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BA}$ 互為反向量。我們將向量 $\overrightarrow{a}$ 的反向量記作 $-\overrightarrow{a}$，而且若 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，則 $-\overrightarrow{a}=(-a_1, -a_2)$，如圖 11 (b) 所示。



▲圖 11

仿照實數的減法，對於任意向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$，規定：「減去一個向量就等於加上這個向量的反向量」，即

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})。$$

因此，若 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，則

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})=(a_1, a_2)+(-b_1, -b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2)。$$

向量減法的坐標表示

若 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$，則 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$。

150

練習向量加法與減法的坐標表示。

例題 3

已知向量 $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(1,5)$。

(1) 求向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 及其長度。　　(2) 求向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 及其長度。

解

(1) 由向量加法的坐標表示，得

$\vec{a}+\vec{b}=(2,-1)+(1,5)=(3,4)$,

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$。

(2) 由向量減法的坐標表示，得

$\vec{a}-\vec{b}=(2,-1)-(1,5)=(1,-6)$,

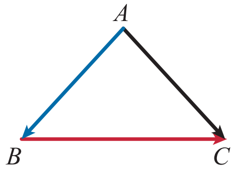
$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-6)^2}=\sqrt{37}$。

隨堂練習

已知 $\vec{a}=(5,-4)$, $\vec{b}=(-3,2)$，求 $\vec{a}-\vec{b}$ 及 $|\vec{a}-\vec{b}|$。 $\vec{a}-\vec{b}=(8,-6)$；$|\vec{a}-\vec{b}|=10$

如圖 12，根據向量的加法，得

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\text{。}$$



▲圖 12

再根據反向量的定義，得

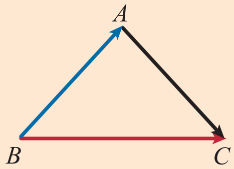
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\text{。}$$

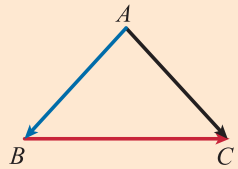
因此，我們有以下的結論。

向量的分解

設 A, B, C 為任意三點。向量 $\overrightarrow{BC}$ 可分解為兩向量相加或相減：

(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$。　　(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$。





隨堂練習解答

1 ① $\vec{a}-\vec{b}=(5,-4)-(-3,2)$
$=(8,-6)$,
$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{8^2+(-6)^2}$
$=10$。

教學小提醒

1 ① 在作向量的運算或是利用向量作幾何證明時，常需要將向量作拆解或合成，因此這兩個結果應熟練。

練習向量的分解。

例題 4

在△ABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}=(3,4)$, $\overrightarrow{AC}=(7,1)$，求 $\overrightarrow{BC}$ 及△ABC 的周長。

解

利用向量的分解，得

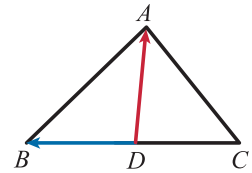
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(7,1)-(3,4)=(4,-3)。$$

△ABC 的周長為

$$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AC}|=5+5+5\sqrt{2}=10+5\sqrt{2}。$$

隨堂練習

1 在△ABC 中，已知 D 是 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overrightarrow{DA}=(2,3)$, $\overrightarrow{DB}=(-1,2)$，求下列各向量。



(1) $\overrightarrow{AB}$。

(2) $\overrightarrow{DC}$。

(3) $\overrightarrow{AC}$。

(1) $\overrightarrow{AB}=(-3,-1)$　(2) $\overrightarrow{DC}=(1,-2)$　(3) $\overrightarrow{AC}=(-1,-5)$

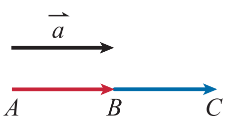
1

丙 向量的係數積

有了向量的加法與減法運算後，再定義向量的係數積運算。

(一) 向量的係數積

在圖 13 中，A, B, C 是共線的三點。若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}$，則利用向量的加法，得



▲圖 13

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}。$$

很自然地，我們把 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}$ 記作 $2\overrightarrow{a}$，這裡的 $2\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 方向相同，且 $2\overrightarrow{a}$ 的長度是 $\overrightarrow{a}$ 長度的 2 倍，即 $|2\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{a}|$。

隨堂練習解答

1 利用向量的拆解，得

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$
$=(-1,2)-(2,3)$
$=(-3,-1)$。

(2) $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}=-(-1,2)$
$=(1,-2)$。

(3) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$
$=(1,-2)-(2,3)$
$=(-1,-5)$。

教學要點

1 介紹向量的係數積運算，及兩向量平行的判定法。

152

一般而言，給定實數 r 及向量 $\vec{a}$，實數 r 與向量 $\vec{a}$ 的**係數積**是一個向量，記作 $r\vec{a}$；其方向與長度規定如下。

向量的係數積

(1) 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，則 $r\vec{a}$ 的方向與長度規定如下：

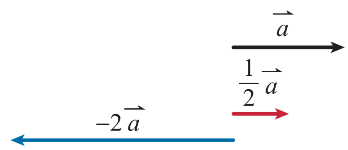
① 當 $r>0$ 時，$r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相同，且長度為 $r|\vec{a}|$。

② 當 $r<0$ 時，$r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相反，且長度為 $|r||\vec{a}|$。

③ 當 $r=0$ 時，$r\vec{a}$ 為零向量，即 $r\vec{a}=\vec{0}$。

(2) 若 $\vec{a}=\vec{0}$，則 $r\vec{a}=\vec{0}$。

例如：給定向量 $\vec{a}$，有了係數積的規定後，我們可以將 $\frac{1}{2}\vec{a}$ 及 $-2\vec{a}$ 的方向與大小關係表示如圖 14。



▲圖 14

隨堂練習

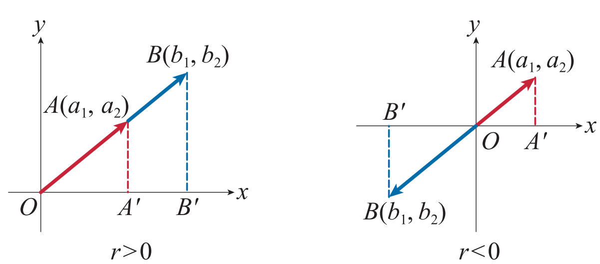
如圖，P, Q, R 為 $\overline{AB}$ 的四等分點。

已知 $\overrightarrow{AR}=x\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{BP}$，求實數 x, y 的值。

$x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{3}$

介紹過係數積的幾何圖示法，接下來探討其坐標表示法：如圖 15，自 A 和 B 向 x 軸作垂線，其垂足分別為 A' 與 B'。設

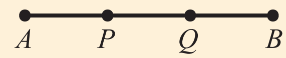
$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2), r\vec{a}=\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)。$$



▲圖 15

補充例題

1 如圖，P, Q 為 $\overline{AB}$ 的三等分點。



設 $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{BP}$，求實數 x, y。

解：依係數積的定義，得

$$x=\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{2}。$$

1

隨堂練習解答

1 1 由向量係數積的定義，得

$\overrightarrow{AR}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$，

故 $x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{3}$。

教學小提醒

1 1 利用三角形相似對應邊成比例的概念，可得向量係數積其坐標表示為實數乘上其分量。

如何找尋「北極星」
素養題組
（請見享備課／教學光碟）

因為△OAA' 與△OBB' 相似，所以當 $r>0$ 時，得

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=r，$$

即

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=r。$$

得 $b_1=ra_1$，$b_2=ra_2$。因此，

$$r\overrightarrow{a}=(ra_1, ra_2)。$$

至於 $r<0$ 及 $r=0$ 的情形此結果仍然成立。

向量係數積的坐標表示

若 r 為實數，且 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$，則 $r\overrightarrow{a}=r(a_1, a_2)=(ra_1, ra_2)$。

練習係數積的坐標表示法。

例題 5

已知向量 $\overrightarrow{a}=(2, -3)$，$\overrightarrow{b}=(2, 3)$，$\overrightarrow{c}=(-1, -3)$。

(1) 求向量 $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ 及其長度。 (2) 求向量 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}$ 及其長度。

解

(1) $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(2, -3)+3(2, 3)=(2, -3)+(6, 9)=(8, 6)$。

$|\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=\sqrt{8^2+6^2}=10$。

(2) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}=2(2, -3)-(2, 3)-2(-1, -3)$

$=(4, -6)-(2, 3)-(-2, -6)$

$=(4, -3)$。

$|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$。

隨堂練習

1 已知 $\overrightarrow{a}=(-1, 1)$，$\overrightarrow{b}=(2, -1)$，求 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 及 $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$。

$2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(-4, 3)$；
$|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=5$

補充例題

1 已知 $\overrightarrow{a}=(7, 4)$，$\overrightarrow{b}=(-2, 1)$，求 $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 的最小值。

解：因為

$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(7-2t, 4+t)$，

所以

$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$

$=\sqrt{(7-2t)^2+(4+t)^2}$

$=\sqrt{5t^2-20t+65}$

$=\sqrt{5(t-2)^2+45}$，

當 $t=2$ 時，有最小值 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$。

隨堂練習解答

1 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=2(-1, 1)-(2, -1)$

$=(-2, 2)-(2, -1)$

$=(-4, 3)$。

$|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$

$=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$。

154

向量係數積具有下列性質：

向量係數積的基本性質

對於實數 r, s 及向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$，下列性質成立。

(1) $(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$。 (2) $r(s\overrightarrow{a})=(rs)\overrightarrow{a}$。 (3) $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$。

證明性質 (3)：設 $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$。因為

$$r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r(a_1+b_1, a_2+b_2)=(r(a_1+b_1), r(a_2+b_2))=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2),$$

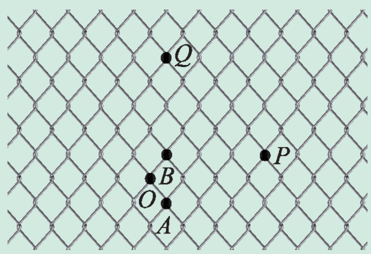
$$r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}=r(a_1, a_2)+r(b_1, b_2)=(ra_1, ra_2)+(rb_1, rb_2)=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2),$$

所以 $r(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$。

至於性質 (1) 及 (2)，可以仿照性質 (3) 的方法證得。

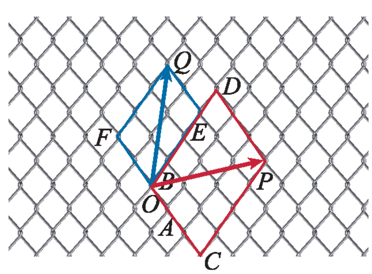
例題 6

右圖是工地圍籬經常使用的菱形網，它是由鐵絲交織而成。今將菱形網的格線視為直線，則此菱形網可由兩組等距離的平行線所構成；再將格線的五個交點分別標記為 O, A, B, P 及 Q，且令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$。試用 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 表示下列各向量。



(1) $\overrightarrow{OP}$。 (2) $\overrightarrow{OQ}$。 (3) $\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}$。

解



(1) 如圖，因為四邊形 $OCPD$ 為平行四邊形，所以由向量加法的定義，得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}。$$

(2) 如圖，因為四邊形 $OEQF$ 為平行四邊形，所以由向量加法的定義，得

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=-2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}。$$

155

(3) 由 (1)(2) 的結果及向量係數積的基本性質，得

$$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OQ}=\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)-2\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$$
$$=3\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{a}-6\vec{b}$$
$$=7\vec{a}-2\vec{b}\text{。}$$

1

隨堂練習

承例題 6，試用 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{PQ}$。

$-5\vec{a}-\vec{b}$

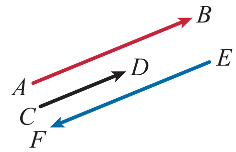
(二) 向量的平行

直觀上，兩向量平行就是它們的方向相同或方向相反。又由向量係數積的定義，很自然地將「兩向量的平行」定義如下。

向量平行的定義

當兩個非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 滿足 $\vec{a}=r\vec{b}$ (r 為實數) 時，稱 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行，記作 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$。

例如，圖 16 中的 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{EF}$ 彼此都互相平行。



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}=-2\overrightarrow{CD}$

▲圖 16

隨堂練習解答

1 由向量的分解，得

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$
$$=\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)-\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)$$
$$=-2\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{a}-4\vec{b}$$
$$=-5\vec{a}-\vec{b}\text{。}$$

底下我們利用向量的代數運算，證明「三角形兩邊中點連線定理」。

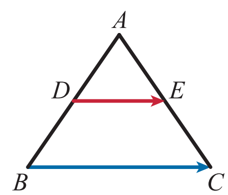
例題 7

在△ABC 中，D, E 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點，證明：

$\overline{DE} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{BC}$ 且 $\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$。

證

因為



$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $\overrightarrow{DE}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同且 $\overrightarrow{DE}$ 長度為 $\overrightarrow{BC}$ 長度的一半，即

$$\overline{DE} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{BC} \text{ 且 } \overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}。$$

隨堂練習

在△ABC 中，D, E 分別在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}=1:2$。

已知 $\overrightarrow{DE}=r\overrightarrow{BC}$，求實數 r 的值。

$r=\dfrac{1}{3}$

當兩向量以坐標表示時，如何判定兩向量是否平行？設 $\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$ 為兩非零向量。若 $\vec{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \vec{b}$，則 $\vec{a}=r\vec{b}$（r 為實數），即

$$(a_1, a_2)=r(b_1, b_2)=(rb_1, rb_2)。$$

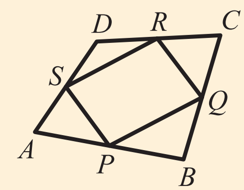
反之，若有實數 r 滿足 $(a_1, a_2)=(rb_1, rb_2)$，則可推得 $\vec{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \vec{b}$。因此，我們有以下的結論。

教學小提醒

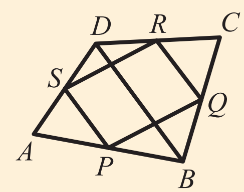
1 向量具有大小及方向，因此，一個向量的等式具有長度與方向的關係。

補充例題

1 如圖，已知 P, Q, R, S 分別為四邊形 $ABCD$ 四邊的中點，試證：四邊形 $PQRS$ 為平行四邊形。



解：連接 $\overline{BD}$。



由例題 7 知，

$\overrightarrow{RQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$,

$\overrightarrow{SP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，

即 $\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{SP}$。因此，

$\overline{RQ} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overline{SP}$ 且 $\overline{RQ}=\overline{SP}$。

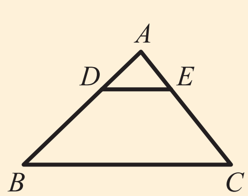
故四邊形 $PQRS$ 為平行四邊形。

隨堂練習解答

1 利用向量的拆解，得

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$。

故 $r=\dfrac{1}{3}$。



兩向量平行的判定

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 為兩非零向量。

若 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，則有實數 r 滿足 $(a_1,a_2)=(rb_1,rb_2)$；反之亦成立。

另外，當 $b_1b_2\neq 0$ 時，常將上述條件 $(a_1,a_2)=(rb_1,rb_2)$ 改寫為比例式

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}。$$

練習向量的平行判定。

例題 8

已知 $\overrightarrow{a}=(1,2)$, $\overrightarrow{b}=(2,3)$, $\overrightarrow{c}=(3,4)$，且實數 t 滿足 $\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)//\,\overrightarrow{c}$，求 t 的值。

解

因為 $\left(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)//\,\overrightarrow{c}$，且 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(1,2)+t(2,3)=(1+2t,2+3t)$，所以

$$\frac{1+2t}{3}=\frac{2+3t}{4}，$$

即 $4+8t=6+9t$，解得 $t=-2$。

隨堂練習

設坐標平面上 $A(1,1)$, $B(2,-4)$, $C(x,-9)$ 三點共線。

(1) 問：向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 是否平行？

(2) 求實數 x 的值。

(1) 是

(2) $x=3$

隨堂練習解答

1 (1) 因為 A,B,C 三點共線，所以 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 平行。

(2) 因為 $\overrightarrow{AB}=(1,-5)$, $\overrightarrow{AC}=(x-1,-10)$，且 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，所以

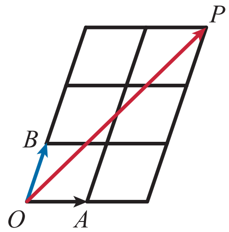
$$\frac{x-1}{1}=\frac{-10}{-5}，$$

解得 $x=3$。

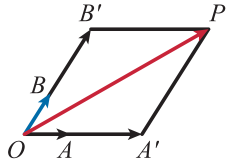
158

丁 向量的線性組合

圖 17 中（每個小平行四邊形均全等），向量 $\overrightarrow{OP}$ 可用向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 表示為 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$。事實上，若 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以表成 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的形式，說明如下。



▲圖 17



▲圖 18

如圖 18 所示，過 P 作直線 OB 的平行線交直線 OA 於 A'，再過 P 作直線 OA 的平行線交直線 OB 於 B'，得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}。$$

此時可令 $\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$，並得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}。$$

因此 $\overrightarrow{OP}$ 可以表成 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的形式。另一方面，設 $\overrightarrow{OP}$ 有兩種表示法，

$$\overrightarrow{OP}=x_1\overrightarrow{OA}+y_1\overrightarrow{OB}=x_2\overrightarrow{OA}+y_2\overrightarrow{OB}。$$

移項得 $(x_1-x_2)\overrightarrow{OA}=(y_2-y_1)\overrightarrow{OB}$。若 $x_1\neq x_2$，則

$$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}\right)\overrightarrow{OB}，$$

即 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 平行，此與 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 不平行不合。因此 $x_1=x_2$，於是又得 $y_1=y_2$。故 $\overrightarrow{OP}$ 表成 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的表示法是唯一的（即當 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 選定之後，x 和 y 是唯一的一組實數）。我們將 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 這種形式的向量稱為 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的線性組合。

向量的線性組合

若 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以唯一表示成

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

的形式，其中 x,y 為實數。

1

教學要點

1 介紹向量的線性組合，並利用它表示區域。

1

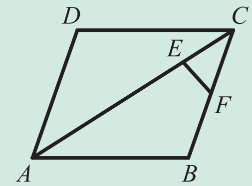
教學小提醒

1 教師可視需要介紹傾斜的坐標系統。

練習將一向量表示成兩給定向量的線性組合。

例題 9

如圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$，$F$ 為 $\overline{BC}$ 的中點。



(1) 已知 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，求 x, y 的值。

(2) 已知 $\overrightarrow{EF}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，求 r, s 的值。

解

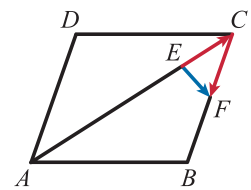
(1) 因為 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$，且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以

$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}。$$

故 $x=\frac{3}{4}, y=\frac{3}{4}$。

(2) 利用向量的分解，得



$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)+\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}。$$

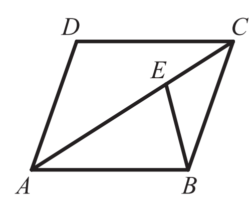
故 $r=\frac{1}{4}, s=-\frac{1}{4}$。

1

1

隨堂練習

如圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$。



(1) 已知 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，求 x, y 的值。

(2) 已知 $\overrightarrow{EB}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，求 r, s 的值。

(1) $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3}$　(2) $r=\frac{1}{3}, s=-\frac{2}{3}$

補充例題

1 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是兩個不平行的非零向量，且實數 s, t 滿足 $s(2\vec{a}+\vec{b})+t(3\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}$，求 s, t 的值。

解：將原式改寫成

$(2s+3t-7)\vec{a}+(s-2t)\vec{b}=\vec{0}$。

因為 $\vec{a}, \vec{b}$ 不平行，所以只在 $0\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}$ 才成立，所以

$$\begin{cases} 2s+3t-7=0 \\ s-2t=0 \end{cases},$$

解得 $s=2, t=1$。

隨堂練習解答

1 (1) 因為

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},$$

所以 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3}$。

(2) 因為

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$$

$$=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$$

$$=-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},$$

所以 $r=\frac{1}{3}, s=-\frac{2}{3}$。

當向量以坐標表示時，利用代數的運算就可表出線性組合。

例題 10

將向量 $\overrightarrow{c}=(4,5)$ 表成向量 $\overrightarrow{a}=(1,2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(2,1)$ 的線性組合。

解

設 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$, x, y 為實數。因此

$$(4,5)=x(1,2)+y(2,1)=(x+2y,2x+y)，$$

即

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}。$$

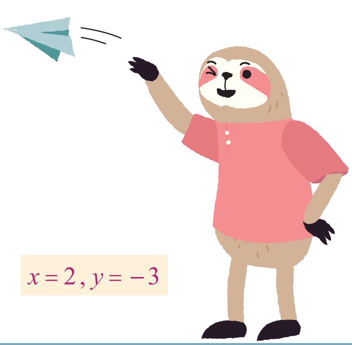
解得 $x=2, y=1$。故

$$\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}。$$

隨堂練習

已知向量 $\overrightarrow{a}=(2,1)$, $\overrightarrow{b}=(-1,2)$, $\overrightarrow{c}=(7,-4)$，求滿足 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 的 x, y 之值。

$x=2, y=-3$



1 教學小提醒

1 利用二元一次聯立方程式，求向量的線性組合。

隨堂練習解答

1 因為 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，所以

$$(7,-4)=x(2,1)+y(-1,2)=(2x-y,x+2y)。$$

由 $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+2y=-4 \end{cases}$，

解得 $x=2, y=-3$。

利用向量的線性組合可以標出坐標平面上的區域。

例題 11

設 $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(1,2)$ 為坐標平面上三點，且令 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。試依下列各指定範圍標出所有 P 點所形成的區域：

(1) $x=1$, $y=1$。　(2) $x=1$, $0\le y\le 1$。　(3) $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$。

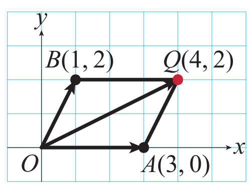
解

設 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 決定的平行四邊形為 $OAQB$。

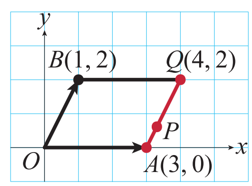
(1) 當 $x=1$, $y=1$，即 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 時，P 點恰為平行四邊形 $OAQB$ 的頂點 $Q(4,2)$，如下圖 (1) 所示。

(2) 先以 $x=1$, $y=\frac{1}{3}$ 為例來說明：當 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ 時，P 點恰為 $\overline{AQ}$ 上滿足 $\overline{AP}:\overline{PQ}=1:2$ 的點。同理，當 $x=1$, $0\le y\le 1$ 時，可推得，P 點構成平行四邊形 $OAQB$ 的一邊 $\overline{AQ}$，如下圖 (2) 所示。

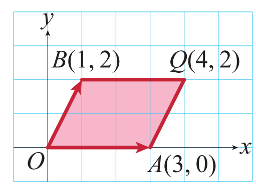
(3) 當 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ 時，P 點所形成的區域為平行四邊形 $OAQB$ 所圍成的區域（含邊界），如下圖 (3) 所示。



(1)



(2)

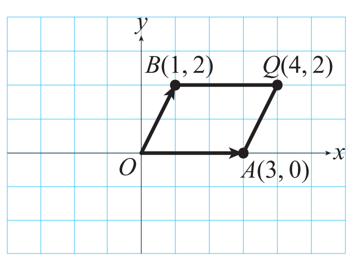


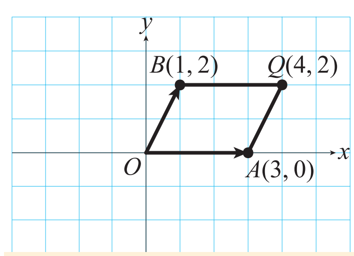
(3)

隨堂練習

1 承上例，依下列各指定範圍標出所有 P 點所形成的區域，並求其面積：

(1) $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 1$。　(2) $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$。

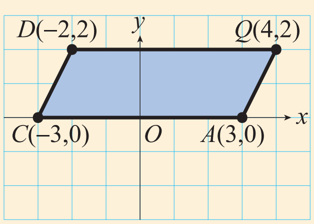




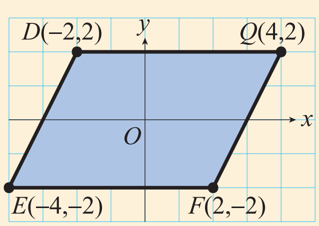
(1) 圖略，面積為 12　(2) 圖略，面積為 24

隨堂練習解答

1 (1) 所有 P 點所形成的區域為平行四邊形 $CAQD$ 所圍成的區域（含邊界），如下圖所示，其面積為 $6\times 2=12$。



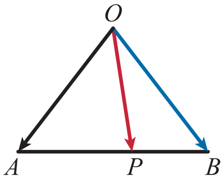
(2) 所有 P 點所形成的區域為平行四邊形 $EFQD$ 所圍成的區域（含邊界），如下圖所示，其面積為 $6\times 4=24$。



戊 向量的分點公式

如圖 19，在△OAB 中，P 為 $\overline{AB}$ 邊上一點，且 $\overline{AP}$：$\overline{PB}$=3：2。由向量的線性組合得知：$\overrightarrow{OP}$ 可以唯一表示成 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的形式；底下我們利用向量的運算來達成：由向量的分解，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=\left(1-\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\text{。}\end{aligned}$$



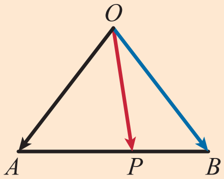
▲圖 19

仿照上述的方法可得向量的分點公式：

向量的分點公式

在△OAB 中，若 P 為 $\overline{AB}$ 邊上一點，且 $\overline{AP}$：$\overline{PB}=m$：n，則

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\text{。}$$



值得一提的是：在分點公式中，兩數 $\frac{n}{m+n}$ 與 $\frac{m}{m+n}$ 的和為 1。

1

教學要點

1 介紹向量的分點公式，及坐標的分點公式。

教學小提醒

1

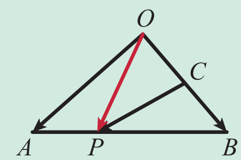
1 若 P 在 $\overline{AB}$ 外，則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+\left(-\frac{m}{n-m}\right)\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\left(-\frac{m}{n-m}\right)(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{n}{n-m}\overrightarrow{OA}+\frac{-m}{n-m}\overrightarrow{OB}\text{。}\end{aligned}$$

先看 P 點在線段 AB 上的情形。

例題 12

如圖，在△OAB 中，P 為 $\overline{AB}$ 邊上一點，且 $\overline{BP}=2\overline{AP}$，$C$ 為 $\overline{OB}$ 的中點。



(1) 已知 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x,y 的值。

(2) 已知 $\overrightarrow{CP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$，求 r,s 的值。

解

(1) 因為 $\overline{BP}=2\overline{AP}$，所以 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$。利用向量的分點公式，得

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}。$$

故 $x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$。

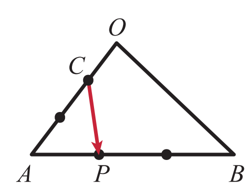
(2) 由向量的分解，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}。\end{aligned}$$

故 $r=\dfrac{2}{3}$，$s=-\dfrac{1}{6}$。

隨堂練習

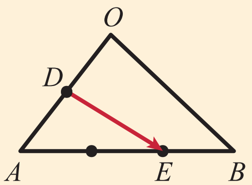
如圖，在△OAB 中，C,P 分別為 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 邊上的三等分點。已知 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x,y 的值。



$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$

補充例題

1 如圖，在△OAB 中，D,E 分別為邊上的中點與三等分點。已知 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x,y 的值。



解：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}，\end{aligned}$$

故 $x=-\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{2}{3}$。

隨堂練習解答

1 利用向量的拆解及分點公式，得

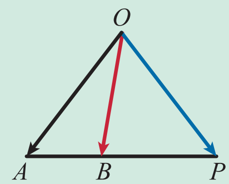
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}，\end{aligned}$$

故 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$。

再看 P 點在直線 AB 上，但不在線段 AB 上的情形。

例題 13

如圖，O, A, B 三點不共線，P 點在直線 AB 上，但 P 點不在線段 AB 上，且 $\overline{AP}=5, \overline{BP}=3$。已知 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x, y 的值。



解

因為 $\overline{AP}=5, \overline{BP}=3$，且 B 點在線段 AP 上，所以

$$\overline{AB}=\overline{AP}-\overline{BP}=5-3=2。$$

利用分點公式，得

$$\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OP}，$$

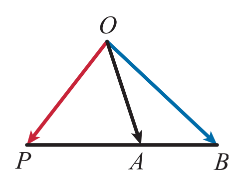
移項得 $\frac{2}{5}\overrightarrow{OP}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$。整理得

$$\overrightarrow{OP}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{OB}。$$

故 $x=-\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2}$。

隨堂練習

如圖，O, A, B 三點不共線，P 點在直線 AB 上，但 P 點不在線段 AB 上，且 $\overline{BP} : \overline{AP}=5 : 3$。已知 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x, y 的值。

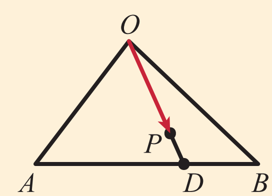


$x=\frac{5}{2}, y=-\frac{3}{2}$

補充例題

1 如圖，已知在△ OAB 中，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，且直線 OP 與 $\overline{AB}$ 交於 D 點，求 (1) $\overline{OP} : \overline{PD}$

(2) $\overline{AD} : \overline{DB}$。



解：設 $\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OP}$，

則 $\overrightarrow{OD}$

$=\frac{t}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{OB}$。

因為 D 在 $\overline{AB}$ 上，

所以 $\frac{t}{4}+\frac{t}{2}=1$，

解得 $t=\frac{4}{3}$。

(1) 因為

$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}$，

所以

$\overline{OP} : \overline{PD}=3 : 1$。

(2) 因為 $\overrightarrow{OD}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，

所以

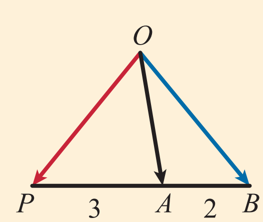
$\overline{AD} : \overline{DB}=2 : 1$。

隨堂練習解答

1 因為 $\overline{BP} : \overline{AP}=5 : 3$，所以 $\overline{BA} : \overline{AP}=2 : 3$。利用分點公式，得 $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OP}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$。

移項得 $\frac{2}{5}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$。整理得 $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$。

故 $x=\frac{5}{2}, y=-\frac{3}{2}$。



我們利用向量的分點公式，推導坐標的分點公式：設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 為坐標平面上的兩點，點 $P(x, y)$ 在線段 AB 上，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=m：n$。令 O 為原點，則利用向量的分點公式，得

▲圖 20

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{n}{m+n}(x_1, y_1)+\frac{m}{m+n}(x_2, y_2)\\&=\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)。\end{aligned}$$

故 P 點的坐標為 $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。

因此，我們有坐標的分點公式，敘述如下。

坐標的分點公式

設 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 為坐標平面上的兩點。若點 $P(x, y)$ 在線段 AB 上，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=m：n$，則 P 點的坐標為

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)。$$

特別地，當 P 為線段 AB 的中點，即 $\overline{AP}：\overline{PB}=1：1$ 時，P 點的坐標為

$$\left(\frac{x_1+x_2}{1+1}, \frac{y_1+y_2}{1+1}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)。$$

166

例題 14

設 $A(2,5)$, $B(-3,0)$ 為坐標平面上的兩點，P 為直線 AB 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$。

(1) 當 P 在線段 AB 上時，求 P 點坐標。

(2) 當 P 不在線段 AB 上時，求 P 點坐標。

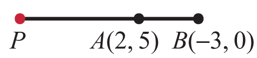
解

(1) 當 P 點在線段 AB 上時，利用分點公式，得 P 點的坐標為

$$\left(\frac{3\times2+2\times(-3)}{2+3},\ \frac{3\times5+2\times0}{2+3}\right)=(0,3)。$$

(2) 當 P 點不在線段 AB 上時，因為 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，所以 P 點在 A 點的左邊，且

$$\overline{PA}:\overline{AB}=2:1。$$



設 P 點的坐標為 (x,y)。利用分點公式，得 A 點的坐標為

$$(2,5)=\left(\frac{1\cdot x+2\times(-3)}{2+1},\ \frac{1\cdot y+2\times0}{2+1}\right)=\left(\frac{x-6}{3},\ \frac{y}{3}\right),$$

即 $\dfrac{x-6}{3}=2$ 且 $\dfrac{y}{3}=5$，解得 $x=12$, $y=15$。

故 P 點的坐標為 $(12,15)$。

隨堂練習

❶ 已知 $A(2,-1)$, $B(-1,5)$ 為坐標平面上的兩點，P 點在線段 AB 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，求 P 點的坐標。

$(1,1)$

隨堂練習解答

❶ 利用分點坐標公式，得

$$P\left(\frac{2\times2+1\times(-1)}{1+2},\ \frac{2\times(-1)+1\times5}{1+2}\right)=(1,1)。$$

利用向量的分點公式，可推導出三角形重心的相關等式。

例題 15

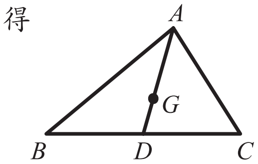
設 G 是△ABC 的重心，O 為平面上任一點。

(1) 已知 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x, y 的值。

(2) 利用 (1) 的結果導出 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$。

解

(1) 如右圖，設 D 為 $\overline{BC}$ 的中點。利用向量分點公式，得



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}。$$

因為重心 G 在中線 $\overline{AD}$ 上，且

$$\overline{AG}：\overline{GD}=2：1，$$

所以

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}。$$

故 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$。

(2) 利用向量的拆解及 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}。\end{aligned}$$

隨堂練習

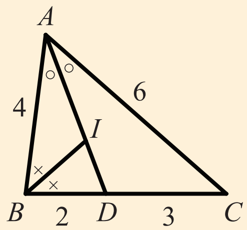
1 已知 G 是△ABC 的重心，證明：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$。

見解析

補充例題

1 設 I 是△ABC 的內心，且 $\overline{AB}=4, \overline{BC}=5, \overline{CA}=6$。已知 $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x, y 的值。

解：作 ∠A 的平分線 $\overline{AD}$，及 ∠B 的平分線 $\overline{BI}$。



因為

$\overline{BD}：\overline{DC}=\overline{AB}：\overline{AC}$

$=2：3$，

所以

$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$。

又因為

$\overline{AI}：\overline{ID}=\overline{BA}：\overline{BD}$

$=2：1$，所以

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

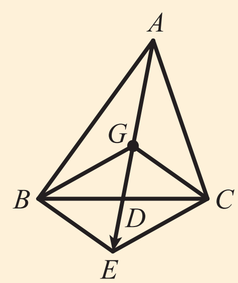
$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$。

故 $x=\frac{2}{5}, y=\frac{4}{15}$。

隨堂練習解答

1 如右圖，延長 $\overline{AD}$ 到 E，使得 $\overline{GD}=\overline{DE}$。



在四邊形 $GBEC$ 中，因為兩對角線互相平分，所以 $GBEC$ 為平行四邊形。

因此 $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GE}$。

因為 $\overrightarrow{GE}=-\overrightarrow{GA}$，所以 $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$。

移項得 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$。

例題 15 的結果可以用來導出三角形重心的坐標公式，說明如下。

設△ABC 三頂點的坐標分別為 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, G 是△ABC 的重心。若 O 為原點，則向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的坐標表示就是 A, B, C 三點的坐標。因為 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}(x_1, y_1)+\frac{1}{3}(x_2, y_2)+\frac{1}{3}(x_3, y_3)\\&=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\text{。}\end{aligned}$$

故重心 G 的坐標為 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

隨堂練習

❶ 已知 $A(3, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(5, 6)$ 為坐標平面上的三點，求△ABC 的重心坐標。

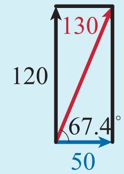
$(2, 3)$

數學超展開

向量是既有大小又有方向的量，常是描述問題的有力工具。例如，一架輕型飛機在空中飛行，若向量 $\overrightarrow{v_1}$ 表示飛機相對於周圍空氣的速度、向量 $\overrightarrow{v_2}$ 表示風的速度、向量 $\overrightarrow{v_3}$ 表示飛機相對於地面的速度，則向量 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 的關係為

$$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_3}\text{。}$$

例如，設 $\overrightarrow{v_1}$ 的大小為 120（公里／小時）、方向朝北方；$\overrightarrow{v_2}$ 的大小為 50（公里／小時）、方向朝東方，則此時飛機側面受風吹襲，且其相對於地面的速度 $\overrightarrow{v_3}$ 的大小為 $\sqrt{120^2+50^2}=130$（公里／小時），方向朝東偏北約 67.4°。



隨堂練習解答

❶ 重心坐標為 $\left(\frac{3+(-2)+5}{3}, \frac{2+1+6}{3}\right)=(2, 3)$。

8 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

□ (1) 若 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，則 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$。

□ (2) 若 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1)$, $\overrightarrow{CD}=(-2,3)$，則 $\overrightarrow{AD}=(0,6)$。

□ (3) 與 $\overrightarrow{a}=(3,4)$ 方向相同且長度為 1 的向量為 $\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$。

□ (4) 在△ABC 中，若 P 為 $\overline{BC}$ 的中點，則 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$。

□ (5) 若兩不平行的非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 滿足 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，則 $x=y=0$。

(1)× (2)○ (3)○ (4)○ (5)○

一、基礎題

1 已知 A 點的坐標為 $(1,2)$，且 $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，求 B 點的坐標及 $|\overrightarrow{AB}|$。

B 點坐標為 $(-2,6)$，$|\overrightarrow{AB}|=5$

2 已知平行四邊形 $ABCD$ 的四個頂點為 $A(a,1)$, $B(3,b)$, $C(7,3)$ 與 $D(5,-1)$，求實數 a, b 的值。

$a=1$, $b=5$

3 已知 $\overrightarrow{a}=(-2,1)$, $\overrightarrow{b}=(1,2)$，求 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 及 $|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|$。

$\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(-4,-3)$；$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=5$

習題解答

觀念澄清

(1) ×：因為兩向量的方向不相同，所以不相等。

(2) ○：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(1,2)+(1,1)+(-2,3)=(0,6)$。

(3) ○：因為 $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以此向量為 $\frac{1}{5}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$。

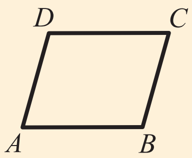
(4) ○：由向量分點公式得知，此小題正確。

(5) ○：若 $x\neq 0$，則 $\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}$，此與 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行矛盾，因此 $x=0$，代入得 $y=0$。

一、基礎題

1. 設 B 點的坐標為 (x,y)。因為 $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，所以 $(x-1,y-2)=(-3,4)$。
   由 $x-1=-3$, $y-2=4$，解得 $x=-2$, $y=6$。
   故 B 點的坐標為 $(-2,6)$，又 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$。

2. 因為 $ABCD$ 為平行四邊形，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即 $(3-a,b-1)=(2,4)$。
   由 $3-a=2$, $b-1=4$，解得 $a=1$, $b=5$。

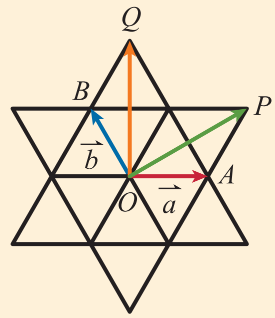


3. $\vec{a}-2\vec{b}=(-2,1)-2(1,2)=(-2,1)-(2,4)=(-4,-3)$。
   $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$。

4. (1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\vec{b}+2\vec{a}$。

(2) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\vec{a}+2\vec{b}$。

(3) $2\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OQ}=2(2\vec{a}+\vec{b})-3(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}-4\vec{b}$。



5. 因為$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，所以$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{t}$，解得 $t=\dfrac{4}{3}$。

6. 因為 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以 $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$ 。

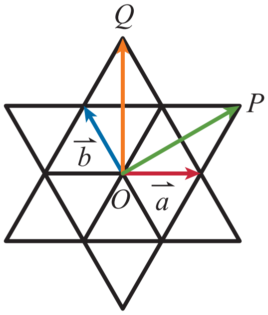
7. 因為$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，所以 $(-1,7)=x(1,1)+y(-1,3)=(x-y,x+3y)$。

由 $x-y=-1$, $x+3y=7$，解得 $x=1$, $y=2$。

8. 由線性組合的意義得知：$-1\leq x\leq 3$, $-1\leq y\leq 2$。

4. 右圖的六角星是由 12 個小正三角形所拼接而成，試用 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 表示下列各向量：

(1) $\overrightarrow{OP}$。　(2) $\overrightarrow{OQ}$。　(3) $2\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OQ}$。



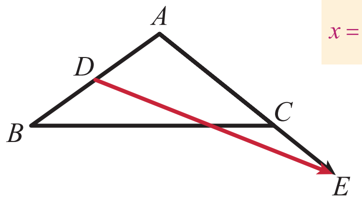
(1) $\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{a}$
(2) $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$
(3) $\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}$

5. 設 $\overrightarrow{a}=(3,2)$, $\overrightarrow{b}=(2,t)$，且 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$，求實數 t 的值。

$t=\frac{4}{3}$

6. 如右圖，D 為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{AC}:\overline{CE}=2:1$。已知 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x, y 的值。

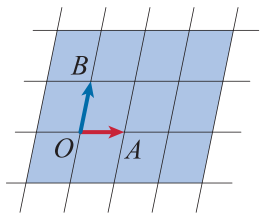
$x=-\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$



7. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,1)$, $\overrightarrow{b}=(-1,3)$, $\overrightarrow{c}=(-1,7)$，求滿足 $\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 的 x, y 之值。

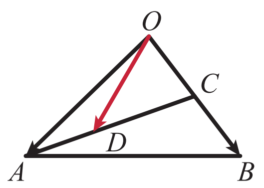
$x=1, y=2$

8. 如右圖，每個小平行四邊形均全等，且令 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。已知鋪色區域表示 P 點所形成的區域，求 x, y 的範圍。



$-1\leq x\leq 3$, $-1\leq y\leq 2$

9 如右圖，在△OAB 中，C 為 $\overline{OB}$ 中點，$\overline{AD}$：$\overline{DC}$=2：3。設 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 x, y 的值。



$x=\frac{3}{5}, y=\frac{1}{5}$

10 已知 $A(-6, 3), B(4, -7)$ 為坐標平面上兩點，P 點在直線 AB 上，且 $\overline{AP}$：$\overline{PB}$=3：2，求 P 點的坐標（兩解）。

$(0, -3)$ 或 $(24, -27)$

11 已知△ABC 的二個頂點坐標為 $A(-2, 2), B(5, 3)$，重心 G 的坐標為 $(2, 1)$，求頂點 C 的坐標。

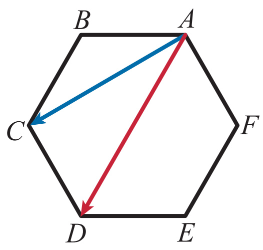
$(3, -2)$

二、進階題

12 右圖為正六邊形 $ABCDEF$。

(1) 已知 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$，求 x, y 的值。

(2) 已知 $\overrightarrow{AC}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AF}$，求 r, s 的值。



(1) $x=2, y=2$
(2) $r=2, s=1$

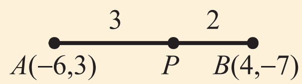
9. 利用分點公式，得 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$。

因為 C 為 $\overline{OB}$ 中點，所以 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$。

故 $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{1}{5}$。

10. ① 當 P 點在 $\overline{AB}$ 上時，利用分點坐標公式，得

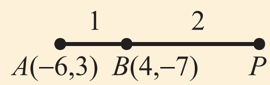
$P\left(\frac{2\times(-6)+3\times4}{3+2},\ \frac{2\times3+3\times(-7)}{3+2}\right)=(0,\ -3)$。



② 當 P 點不在 $\overline{AB}$ 上時，因為 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$，所以 P 點在 A 點的右邊，且 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:2$。

設 P 點的坐標為 (x, y)。利用分點坐標公式，得

$B(4,-7)=\left(\frac{2\times(-6)+1\times x}{1+2},\ \frac{2\times3+1\times y}{1+2}\right)=\left(\frac{x-12}{3},\ \frac{y+6}{3}\right)$。



由 $\frac{x-12}{3}=4$, $\frac{y+6}{3}=-7$，解得 $x=24$, $y=-27$，

即 P 點坐標為 $(24,\ -27)$。

故由 ①② 得 P 點坐標為 $(0,\ -3)$ 或 $(24,\ -27)$。

11. 設 C 點的坐標為 (x, y)。利用重心坐標公式，得

$(2,\ 1)=\left(\frac{-2+5+x}{3},\ \frac{2+3+y}{3}\right)$。

由 $\frac{3+x}{3}=2$, $\frac{5+y}{3}=1$，解得 $x=3$, $y=-2$，即 C 點的坐標為 $(3,\ -2)$。

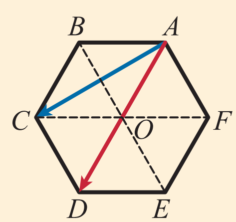
二、進階題

12. (1) 因為 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\right)=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$，

所以 $x=2$, $y=2$。

(2) 因為 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\left(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}\right)+\left(-\overrightarrow{AF}\right)=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$，

所以 $r=2$, $s=1$。



13. (1) 因為 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{CD}=2$, $\overline{AB}//\overline{CD}$，

所以 $\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{2}\overrightarrow{CD}$，即 $r=-\dfrac{5}{2}$。

(2) 設 D 點坐標為 (x, y)。因為 $\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{2}\overrightarrow{CD}$，所以 $(-3, -4)=-\dfrac{5}{2}(x+1, y-4)$。

由 $-\dfrac{5}{2}(x+1)=-3$, $-\dfrac{5}{2}(y-4)=-4$，解得 $x=\dfrac{1}{5}$, $y=\dfrac{28}{5}$。

故 D 點坐標為 $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{28}{5}\right)$。

14. (1) 因為 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(2, 6)+t(1, 1)=(2+t, 6+t)$，所以

$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|=\sqrt{(2+t)^2+(6+t)^2}=\sqrt{2t^2+16t+40}$。

(2) 利用配方法，得

$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|=\sqrt{2(t^2+8t+16)+8}=\sqrt{2(t+4)^2+8}$。

故當 $t=-4$ 時，$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 有最小值 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$。

15. (1) 因為 $\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AP}=r\left(\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{r}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2r}{5}\overrightarrow{AC}$，

且 D 點在 $\overline{BC}$ 上，所以 $\dfrac{r}{5}+\dfrac{2r}{5}=1$，解得 $r=\dfrac{5}{3}$。

(2) 由 (1) 得，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$。

再由分點公式，得 $\overline{BD}：\overline{CD}=2：1$。

(3) 因為 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AP}$，所以 $\overline{AP}：\overline{PD}=3：2$。

因此△ ABP 面積 $=\dfrac{3}{5}\times$ △ ABD 面積 $=\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{2}{3}\text{△ } ABC\text{ 面積}\right)=\dfrac{2}{5}$△ ABC 面積，

即△ ABP 面積：△ ABC 面積 $=2：5$。

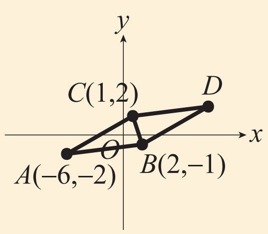
16. 因為 $\overline{AB}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$, $\overline{BC}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$, $\overline{CA}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$，

所以 $\overline{AB}=\overline{CA}\neq\overline{BC}$。

設第四點為 $D(x, y)$。因為 A, B, C, D 四點形成一菱形，所以 D 點的位置如右圖所示。

因為 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，即 $(x-1, y-2)=(8, 1)$。

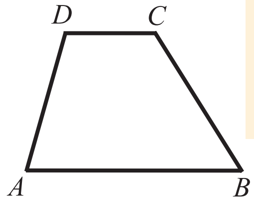
解得 $x=9$, $y=3$。故第四點 D 的坐標為 $(9, 3)$。



13 如右圖，在梯形 $ABCD$ 中，$A(4,5)$, $B(1,1)$, $C(-1,4)$, $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{CD}=2$。

(1) 已知 $\overrightarrow{AB}=r\overrightarrow{CD}$，求 r 的值。

(2) 求 D 點的坐標。



(1) $r=-\dfrac{5}{2}$

(2) $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{28}{5}\right)$

14 已知 $\overrightarrow{a}=(2,6)$, $\overrightarrow{b}=(1,1)$, t 為實數。

(1) 以 t 表示 $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$。

(2) 求 $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 的最小值，及此時 t 的值。

(1) $\sqrt{2t^2+16t+40}$

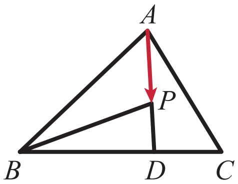
(2) $t=-4$ 時，$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 有最小值 $2\sqrt{2}$

15 如右圖，設 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，且直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

(1) 已知 $\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AP}$，求 r 的值。

(2) 求 $\overline{BD}:\overline{CD}$。

(3) 求$\triangle ABP$ 面積：$\triangle ABC$ 面積。



(1) $r=\dfrac{5}{3}$

(2) $2:1$

(3) $2:5$

16 已知 $A(-6,-2)$, $B(2,-1)$, $C(1,2)$ 為坐標平面上三點。若有第四點和此三點形成一菱形，則第四點的坐標為何？

$(9,3)$

補充教材

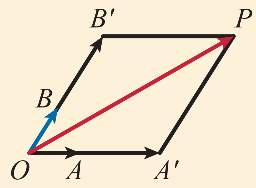
● 線性組合的唯一性

若 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以唯一表示成

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

的形式，其中 x,y 為實數。

證：（存在）



如圖所示，過 P 作直線 OB 的平行線交直線 OA 於 A'，再過 P 作直線 OA 的平行線交直線 OB 於 B'，得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$。

因為 $\overrightarrow{OA'}\,//\,\overrightarrow{OA}$ 且 $\overrightarrow{OB'}\,//\,\overrightarrow{OB}$，所以存在一組實數 x,y 分別使得 $\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$，

因此，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。

故每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以表示成 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的形式。

（唯一）

設 $\overrightarrow{OP}=x_1\overrightarrow{OA}+y_1\overrightarrow{OB}=x_2\overrightarrow{OA}+y_2\overrightarrow{OB}$，則 $(x_1-x_2)\overrightarrow{OA}=(y_2-y_1)\overrightarrow{OB}$。

假設 $x_1\neq x_2$，則 $\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_1-x_2}\right)\overrightarrow{OB}$，即 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 平行。

此與「$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 不平行」不合，假設錯誤。

因此 $x_1=x_2$，於是又得 $y_1=y_2$。

故 $\overrightarrow{OP}$ 表示成 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 的形式是唯一的。

● 共線定理

設 O,A,B 三點不共線。若點 P 在直線 AB 上，則存在實數 x,y，使

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}，$$

且 $x+y=1$；反之亦成立。

證：若點 P 在直線 AB 上，則 $\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t$ 為實數）。推得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$，

即 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$。

此時 $(1-t)+t=1$。

反之，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，且 $x+y=1$，則 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OB}=x\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OB}$。

整理得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=x\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$，

由向量的減法，得 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}$。

故點 P 在直線 AB 上。

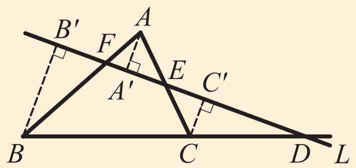
孟氏定理

古希臘的數學家及天文學家孟氏（Menelaus，約西元一世紀），在他的球面三角論文中記載著一個三點共線定理——孟氏定理：

> **孟氏定理**
> 若一直線 L 截△ ABC 的三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$（或其延長線）依次於 D, E, F 三點，則
> $$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \text{。}$$

證：過 A, B, C 三點分別作直線 L 的垂線，其垂足依次為 A', B', C'。

如右圖，利用相似三角形對應邊成比例的性質，得



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} \text{；} \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} \text{；} \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}} \text{。}$$

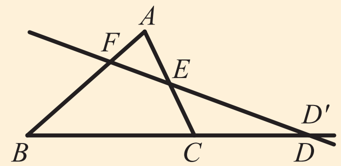
故 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}} = 1$。

以上證明了截線 L 通過△ ABC 內部的情形，L 不通過△ ABC 內部的情形也可仿上述的方法證得，留給讀者自己證明。

> **孟氏定理的逆定理**
> 設 D, E, F 分別是△ ABC 三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上或其延長線上的三點。
> 若 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$，則 D, E, F 三點共線。

證：設 E, F 分別在 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上，連接 E, F 的直線與直線 BC 交於 D'。

如右圖所示。



利用孟氏定理，得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \text{，}$$

與已知條件

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1 \text{，}$$

比較得

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \text{。}$$

因為 D 和 D' 同在 $\overline{BC}$ 邊的延長線上，所以 $D' = D$。

故 D, E, F 三點在同一直線上。

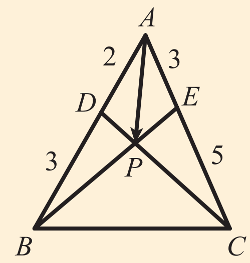
以上證明了 E, F 分別在 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上的情形，其餘情形也可仿上述的方法證得，留給讀者自己證明。

例題

在△ABC 中，$\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$, $\overline{AE}:\overline{EC}=3:5$，

如右圖，設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 P 點，

且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 x, y 的值。



解： 因為△ABE 被 $\overline{CD}$ 所截，所以利用孟氏定理，得 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DA}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}\cdot\dfrac{\overline{EP}}{\overline{PB}}=1$，

即 $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{\overline{EP}}{\overline{PB}}=1\Rightarrow\dfrac{\overline{EP}}{\overline{PB}}=\dfrac{5}{12}$。

利用內分點公式，得

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{17}\overrightarrow{AB}+\dfrac{12}{17}\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{17}\overrightarrow{AB}+\dfrac{12}{17}\left(\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{5}{17}\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{34}\overrightarrow{AC}$。

故 $x=\dfrac{5}{17}$, $y=\dfrac{9}{34}$。

● 西瓦定理

孟氏定理發表約 1600 年後，義大利數學家西瓦（Giovanni Ceva, 1647 ～ 1734）提出了孟氏定理的對偶定理——西瓦定理。

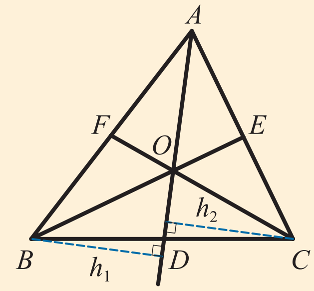
西瓦定理

在△ABC 中，D, E, F 分別在直線 BC，直線 CA，直線 AB 上且均非頂點。

若 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 共點，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

證： 設 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 交於一點 O，如右圖，△OAB 與△OAC 的高依次為 h_1, h_2。

因為△OAB 與△OAC 有共同的底邊 OA，



所以 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{\Delta OAB}{\Delta OAC}$。

同理可得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{\Delta OCA}{\Delta OCB}$；$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta OBC}{\Delta OBA}$。

故 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{\Delta OCA}{\Delta OCB}\cdot\dfrac{\Delta OAB}{\Delta OAC}\cdot\dfrac{\Delta OBC}{\Delta OBA}=1$。

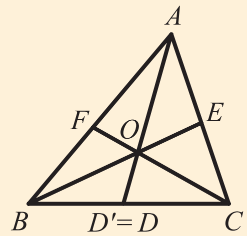
以上證明了 D, E, F 分別在 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上的情形，其他情形也可仿上述的方法證得，留給讀者自己證明。

西瓦定理的逆定理

在△ABC 中，D, E, F 分別在三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$（或其延長線上）。若 D, E, F 都在三邊上，或只有其中之一在邊上，

而 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$，且三直線 AD, BE, CF 兩兩相交，則此三直線交於一點。

證： 設 $\overleftrightarrow{BE}$ 與 $\overleftrightarrow{CF}$ 相交於點 O，連接 A 與 O 的直線交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D'。



利用西瓦定理，得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1，$$

與已知條件

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

比較得

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}。$$

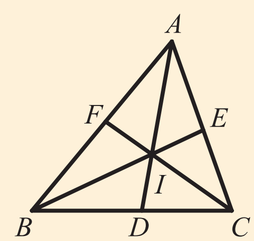
因為 D, D' 都在直線 BC 上，所以 $D = D'$，即三直線 AD, BE, CF 共點。

以上證明了 D, E, F 都在三邊上的情形，其餘情形請讀者自己證明。

例題

在△ABC 中，三內角平分線必共點（此點稱為△ABC 的內心）。

證： 設 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 均為內角平分線。



利用內角平分線性質，得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}，\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}，\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}。$$

三式相乘，得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = 1。$$

由西瓦定理的逆定理知 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 共點。

故△ABC 的三內角平分線共點。