



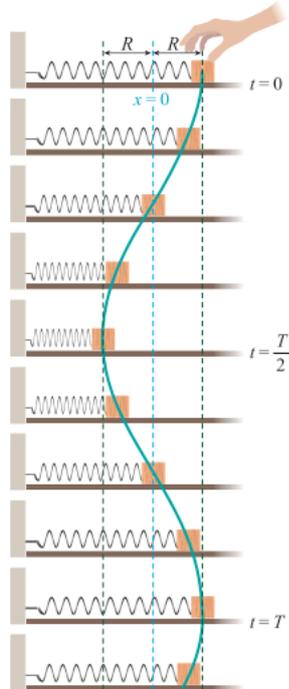
## 5-2 ▶ 簡諧運動

### 一、簡諧運動

#### 1. 簡諧運動簡介

(1) 如右圖所示，將一端固定在牆壁，一端連接物體的水平彈簧向右拉動  $R$  的距離後，由靜止釋放，則物體因受與位移大小成正比、但方向相反的**回復力**（即  $F = -kx$ ）作用，而在平衡位置附近，沿一**直線**作往復的**週期性**運動，稱為**簡諧運動**（Simple Harmonic Motion，簡稱 SHM）。

(2) 自然界有許多週期性的振動，如彈簧的伸縮、水面上小船的浮沉、吉他弦線的振動、物體內部原子的振動、聲波、電磁波……等，都和簡諧運動有關。因此，簡諧運動可以說是自然界最基本的振動。



#### 2. 名詞介紹

物理量	代號	意義
平衡點	$O$	回復力或合力為零之點。
振幅	$R$	最大的位移量值。
週期	$T$	完成一次往復運動所需的時間。
頻率	$f$	單位時間往復運動之次數。
角頻率 (角速度)	$\omega$	參考圓的角速度（亦常稱為角頻率）。

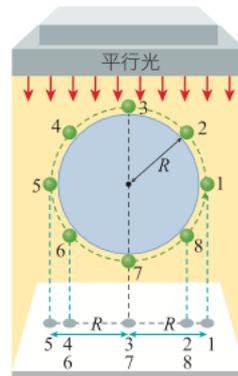
### 二、利用參考圓分析簡諧運動

#### 1. 參考圓

(1) 質點在鉛直面上作等速圓周運動時，將一束平行光從正上方投射，觀察此質點在  $x$  軸上投影的運動情形，其結果如圖所示。

(2) 圓上由 1 至 8 點，每點均經相同時距，則質點在  $x$  軸（水平方向）上的投影，即為簡諧運動。因此我們常利用等速圓周運動來了解簡諧運動，故此圓稱為**參考圓**。

(3) 但要特別注意，等速圓周運動只是我們用來學習簡諧運動的媒介，等速圓周運動本身並**不是簡諧運動**。



## 2. 簡諧運動分析

(1) 在下表中，物體作角速度為  $\omega$  逆時針方向的等速圓周運動，起始位置在右端點  $P_1$ ，經

$t$  秒後到達  $P_2 \Rightarrow$  由角速度  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta}{t} \Rightarrow$  轉動的角度  $\theta = \omega t$ 。

(2) 物體在水平方向的投影作簡諧運動，取向右為正、向左為負，起始位置在 右端點。

		距平衡點位置	速度	加速度
圖示				
數學式		$x = R \cos \theta$ $= R \cos(\omega t)$	$v_x = -v \sin \theta$ $= -R\omega \sin(\omega t)$	$a_x = -a \cos \theta$ $= -\omega^2 R \cos(\omega t)$ $= -\omega^2 x$
物理量	端點的值 ( $\theta = 0, \pi$ )	$\pm R$	0	$\mp R\omega^2$
	平衡點的值 ( $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ )	0	$\mp R\omega$	0
函數圖形				



### 課外補充資料

以微分法求簡諧運動的各物理量

$$x = R \cos \omega t \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 R \cos \omega t = -\omega^2 x$$

### 觀念即時通

\* 為多選題

\* CD 1. 下列有關質點作「簡諧運動」的敘述，哪些正確？

- (A) 質點作等速度運動 (B) 質點作等速率運動 (C) 質點在平衡點時的速度量值最大  
(D) 質點在平衡點時的加速度量值最小 (E) 質點加速度量值最大時，速率最大。

1. (A)(B)  $\times$ ：簡諧運動為變速度及變速率運動。

(E)  $\times$ ：質點在端點時的加速度量值最大，此時的速率為零。

### 範例 1 水平簡諧運動

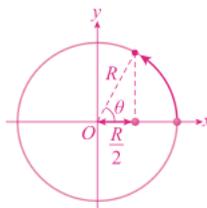
某物體作水平簡諧運動，其位移  $x$  (單位為 m) 與時間  $t$  (單位為 s) 的關係為  $x = 2 \cos(4t)$ 。則：

- (1) 週期為  $\frac{\pi}{2}$  s。
- (2) 最大速率為 8 m/s。
- (3) 最大加速度的量值為 32 m/s<sup>2</sup>。
- (4) 當物體自其初始位置向平衡點運動，行至位移為振幅一半之處至少需時  $\frac{\pi}{12}$  s。

**圖** 將  $x = 2 \cos(4t)$  與  $x = R \cos(\omega t)$  比較  $\Rightarrow \begin{cases} R = 2 \text{ (m)} \\ \omega = 4 \text{ (rad/s)} \end{cases}$

- (1)  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  (s)。
- (2)  $v_{\max} = R\omega = 2 \times 4 = 8$  (m/s)。
- (3)  $a_{\max} = R\omega^2 = 2 \times 4^2 = 32$  (m/s<sup>2</sup>)。
- (4) 利用參考圓，畫出物體移動的狀況如圖所示，相當於參考圓的角位移  $\theta = 60^\circ$ 。

$$\Rightarrow \text{所需時間 } t = \frac{60^\circ}{360^\circ} T = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} \text{ (s)}。$$



**馬解** 將  $x = 6 \cos(\frac{\pi}{3}t)$  與  $x = R \cos \omega t$  比較  $\Rightarrow \begin{cases} R = 6 \text{ (cm)} \\ \omega = \frac{\pi}{3} \text{ (rad/s)} \end{cases}$

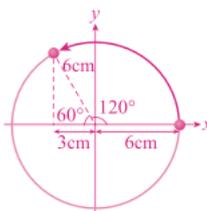
(A)  $\times$  :  $R = 6$  (cm)。(B)  $\circ$  :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$  (s)。

(C)  $\times$  :  $v_{\max} = R\omega = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$  (cm/s)。

(D)  $\times$  :  $a_{\max} = R\omega^2 = 6 \times (\frac{\pi}{3})^2 = \frac{2\pi^2}{3}$  (cm/s<sup>2</sup>)。

(E)  $\circ$  : 利用參考圓，畫出物體移動的狀況如圖所示，相當於參考圓的角位移  $\theta = 120^\circ$ 。

$$\Rightarrow \text{所需時間 } t = \frac{120^\circ}{360^\circ} T = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ (s)}。$$



### 馬上練習 1

某物體作水平方向的簡諧運動，其位置與時間的關係為  $x(t) = 6 \cos(\frac{\pi}{3}t)$  cm，式中  $t$  以 s 計，下列敘述哪些正確？

- (A) 振幅為  $\frac{\pi}{3}$  cm (B) 週期為 6 s (C) 速度的最大值为  $\pi$  cm/s (D) 加速度的最大值为  $\frac{1}{3}\pi^2$  cm/s<sup>2</sup> (E) 當物體自其初始位置向平衡點運動，通過平衡點後又行進 3 cm，共需時 2 s。

**答** BE

## 簡諧運動題目講解



適時停下來，留一點時間讓學生做筆記、思考及提問



## 自我省思與改進

1. 簡諧運動是比較困難的章節，學生多半無法在第一時間就深刻理解，因此在上課時需多留一些時間讓學生思考及提問
2. 多使用教具來輔助教學，使學生能以具體的方式理解抽象的數學形式
3. 使用單擺並搭配教室的投影機，可在黑板上做出近似等速率圓周運動的投影（也就是簡諧運動）
4. 題目講解速度需再放慢一些，並且多注意學生的學習狀況
5. 簡諧運動會用到許多三角函數的概念，但多數學生仍不熟悉，因此需適時複習過往所學的數學工具