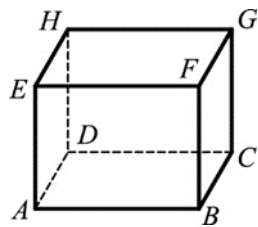


一、多選題

1. () 如圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{AD}=2$ ， $\overline{AE}=3$ ，則下列選項哪些正確？



- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$ (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = 8$ (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 16$ (D) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CH} = -7$ (E) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = 3$

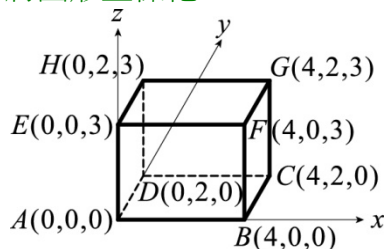
【POWER 講義】

解答

ACD

解析

將圖形坐標化。



- (A)○： $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (4,0,0) \cdot (4,2,0) = 16$
 (B)×： $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = (4,0,0) \cdot (4,0,3) = 16$
 (C)○： $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = (4,0,0) \cdot (4,2,3) = 16$
 (D)○： $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CH} = (4,2,3) \cdot (-4,0,3) = -16+9 = -7$
 (E)×： $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = (4,2,3) \cdot (-4,2,3) = -16+4+9 = -3$

2. () 下列哪些選項正確？ (A)已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 為空間中的三個向量，若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{b} = \vec{c}$ (B)已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 為空間中的二個向量，若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則 $\vec{a}$ 垂直 $\vec{b}$ (C)已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 為空間中的三個向量，且 r 為任一實數，若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，則 $\vec{a} \cdot (r\vec{b}) = r(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$ (D)若 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 為空間中任意的二個向量，則 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 亦為一向量 (E)若 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 為空間中任意的二個向量，則 $|\vec{a} \parallel \vec{b}| \geq \vec{a} \cdot \vec{b}$

【龍騰自命題】

解答

CE

解析

(A)× (B)×：有可能為零向量 (C)○ (D)×： $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 非向量，為一純量 (E)○：設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 夾角為 θ ，因為

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1 \Rightarrow |\vec{a} \parallel \vec{b}| \geq \vec{a} \cdot \vec{b}$$

二、填充題

1. 空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ ，其邊長皆為 4。已知內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = 11$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____。

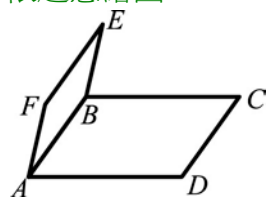
【101 指考(甲)，SUPER 講義】

解答

27

解析

依題意繪圖。



由向量的拆解，得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{FE} \\ &= 11 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 11 + 0 + 0 + 4 \times 4 = 27 \end{aligned}$$

2. 設 $\vec{a} = (2, 1, -3)$ ， $\vec{b} = (1, 0, 2)$ ， $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ ，則

(1) 當 $t =$ ①_____時， $|\vec{c}|$ 有最小值為②_____。

(2) 若 $\vec{c} \perp \vec{a}$ 時， t 的值為_____。

(3)若 $\vec{c}$ 平分 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夾角，則 t 的值為_____。

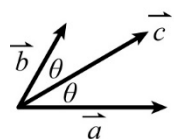
【龍騰自命題】

解答

- (1)① $\frac{4}{5}$
 ② $\frac{3\sqrt{30}}{5}$
 (2) $\frac{7}{2}$
 (3) $\frac{\sqrt{70}}{5}$

解析

如圖，



$$(1) \vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} = (2, 1, -3) + t(1, 0, 2) = (2+t, 1, -3+2t),$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(2+t)^2 + 1 + (-3+2t)^2} = \sqrt{5(t-\frac{4}{5})^2 + \frac{54}{5}},$$

故當 $t = \frac{4}{5}$ 時， $|\vec{c}|$ 的最小值為 $\sqrt{\frac{54}{5}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$ 。

$$(2) \vec{c} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 4 + 2t + 1 + 9 - 6t = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2}.$$

$$(3) \cos \theta = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| |\vec{a}|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{c}| |\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \frac{2(2+t) + 1 - 3(-3+2t)}{\sqrt{14}} = \frac{1(2+t) + 0 + 2(-3+2t)}{\sqrt{5}}, \text{ 解得 } t = \frac{\sqrt{70}}{5}.$$

[另解]

$\vec{c}$ 為 $\vec{a}$ ， $t\vec{b}$ 所成平行四邊形的對角線且平分其夾角，表示此四邊形為菱形，

$$\text{故 } |\vec{a}| = t|\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{5}t \Rightarrow t = \frac{\sqrt{70}}{5}.$$

3. 求 $\frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{\cos^2 \theta}$ 的最小值為_____。($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

【龍騰自命題】

解答

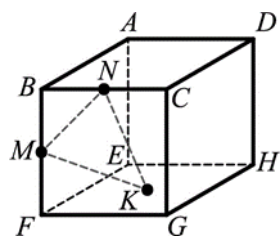
25

解析

$$[(\frac{2}{\sin \theta})^2 + (\frac{3}{\cos \theta})^2][\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \geq (2+3)^2,$$

可得 $\frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{\cos^2 \theta} \geq 25$ ，故最小值為 25。

4. 如圖是一個邊長為 2 的正立方體。已知 K 為正方形 $EFGH$ 的中心， M 、 N 分別為 $\overline{BF}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，求 $\triangle KMN$ 的面積為_____。



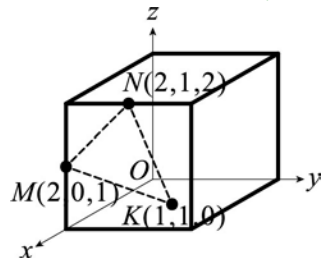
【SUPER 習作簿】

解答

$$\frac{\sqrt{6}}{2}$$

解析

將正立方體放在坐標空間中，並標示 K 、 M 、 N 的坐標，如圖所示。



因為 $\vec{MK} = (-1, 1, -1)$ ， $\vec{MN} = (0, 1, 1)$ ，所以 $\vec{MK} \times \vec{MN} = (2, 1, -1)$ 。

故 $\triangle KMN$ 的面積為 $\frac{1}{2} |\vec{MK} \times \vec{MN}| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

5. x, y, z 為實數，求 $\frac{2x-y+z}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}}$ 的最大值為_____。

【龍騰自命題】

解答 $\frac{\sqrt{21}}{2}$

解析 由柯西不等式

$$[x^2 + (2y)^2 + z^2][2^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 1^2] \geq (2x - y + z)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + 4y^2 + z^2) \times \frac{21}{4} \geq (2x - y + z)^2$$

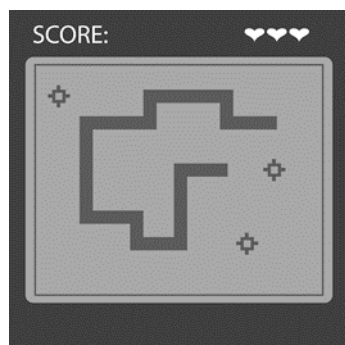
$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{21}}{2}\sqrt{x^2+4y^2+z^2} \leq 2x-y+z \leq \frac{\sqrt{21}}{2}\sqrt{x^2+4y^2+z^2},$$

$$\text{可得 } -\frac{\sqrt{21}}{2} \leq \frac{2x-y+z}{\sqrt{x^2+4y^2+z^2}} \leq \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\text{故最大值為 } \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

三、混合題

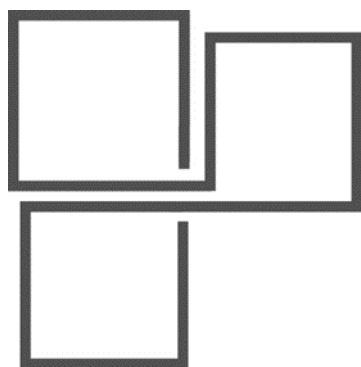
1. 如圖，貪食蛇（Snake）是一個起源於 1976 年的街機遊戲，此類遊戲在 1990 年代由於一些具有小型螢幕的行動電話的引入而再度流行起來，在現在的手機上基本都可安裝此小遊戲，版本亦有所不同。在遊戲中，玩家操控一條細長的直線，它會不停前進，玩家只能操控蛇的頭部朝向，一路拾起觸碰到之物，並要避免觸碰到自身或者其他障礙物。每次貪食蛇吃掉一件食物，它的身體便增長一些，吃掉一些食物後會使蛇的移動速度逐漸加快，讓遊戲的難度漸漸變大。



- (1) 若貪食蛇的寬度為一個單位，長度 8 單位的貪食蛇可以圍出 1 平方單位的正方形空間，長度 12 單位的貪食蛇可以圍出 4 平方單位的正方形空間，長度 16 單位的貪食蛇可以圍出 9 平方單位的正方形空間……依此類推，試求要圍出 49 平方單位的正方形空間，需要長度為幾個單位長的貪食蛇？（單選題）

(A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 49 (E) 64。

- (2) 如圖，為某次遊戲結束時的蛇身，恰好圍出三個正方形，若從得分判斷此時貪食蛇總長為 84 單位，試求其圍出來的總面積最小是多少？（非選擇題）



【素養題組】

解答 (1)B (2)108 平方單位

解析 (1) 由說明可知長度為 $4k$ 的貪食蛇，

可以圍出面積為 $(k-1)^2$ 平方單位的正方形，

故試求要圍出 49 平方單位的正方形空間，需要長度為 32 單位長。

(2) 假設三個正方形的面積分別為 a^2 、 b^2 、 c^2 ，

$$\text{則 } 4(a+1) + 4(b+1) + 4(c+1) = 84 \Rightarrow a+b+c=18,$$

由柯西不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (18)^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 108,$$

所以總面積最小為 108 平方單位。