

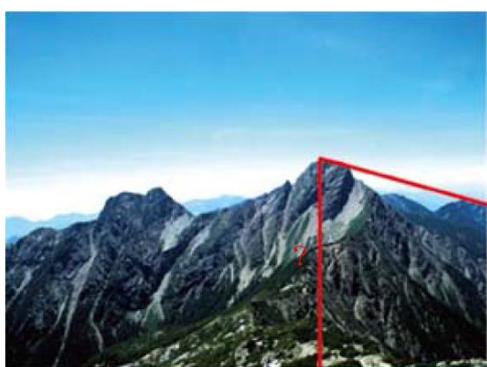
談天說地數星奇

古人云:登泰山而小天下,學習就是讓我們眼界更寬廣;讓我們來一場數學壯遊,一起談笑窺天、深謀探地,乘數學的旋風創興奇吧!

探索一 “更付一履,方知其高”

我們從小就聽過很多建築物或山的高度,比如說,台北101大樓高509公尺、玉山高3,952公尺。但是,你是否想過這些高度是如何測量出來的?

古人對大地測量也有興趣,但是,像山的高度、谷的深度,是無法用一把夠長的尺直接看刻度量得的。事實上,就算真的有那麼一把超級長的尺,人們還是無法直接測量山高。

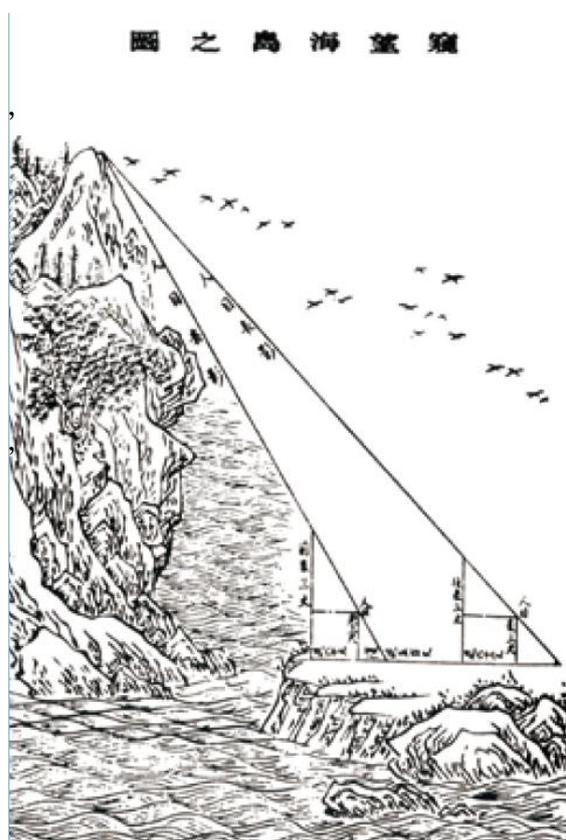


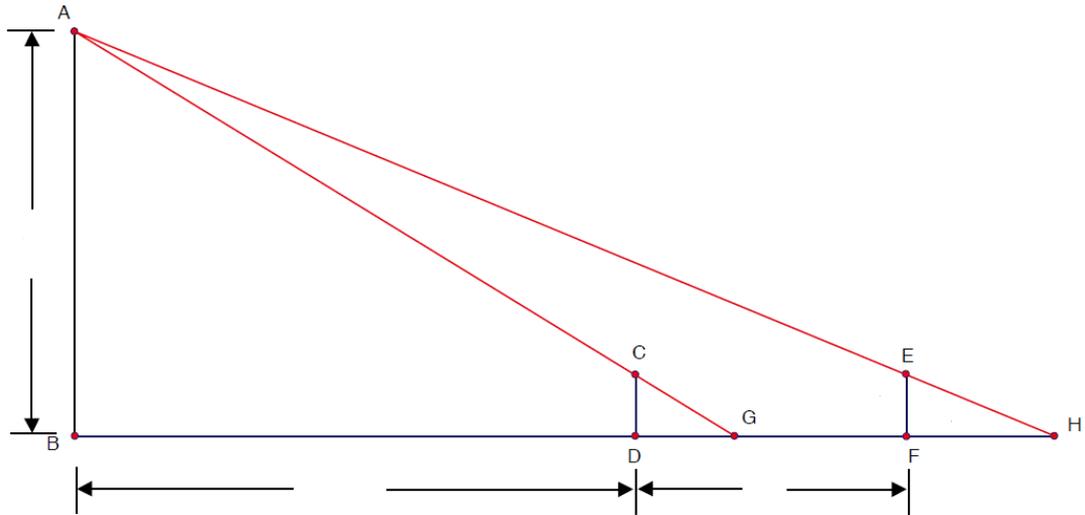
因為如果把山的高度看成直角三角形的一股,仍然有另一個未知數,因為我們不能從平地水平地向峰頂下方挖一條地道。因此,在這個直角三角形中,至少有兩個未知數。

?

古今皆然---重差術

西元3世紀,三國時代魏國的劉徽,寫了一本《海島算經》,測量海島的困難與測量山高一樣,因為你只能在遠處測量,不能拿一把尺越過海拉到海島上。劉徽所使用的「重差術」,就畫在古書裡。我們可以運用相似三角形的概念來理解這個方法。我們用以下引文來看看望海島的題目與示意圖。文中所謂的「兩表」是指兩根(測量用)標竿,「前後相去」表示前後表距離,「參相直」是指三點共線,「卻行」表示向後退,「表末」則指表的頂端。今有望海島,立兩表,齊高5公尺,前後相去50公尺,令後表與前表參相直。從前表卻行10公尺,人目著地取望島峰,與表末參合。從後表卻行15公尺,人目著地取望島峰,亦與表末參合。問島高及去表各幾何?





上述引文和示意圖經簡化後繪圖如上，請和你的小組成員一同完成下列問題：
 本題是說，想要測量海島 \overline{AB} 的高度，在岸邊立了兩個「表」（ \overline{CD} 與 \overline{EF} ），
 都是 _____ 公尺，兩表之間 \overline{DF} 的距離是 _____ 公尺。

從前表 \overline{CD} 向後走 _____ 公尺，把眼睛貼到地面 G 點，則島峰 A 與表末 C 重合，
 也就是 A 、 C 、 G 成一直線。

從後表 \overline{EF} 向後走 _____ 公尺，把眼睛貼到地面 H 點，則島峰 A 與表末 E 也重合，
 也就是 A 、 E 、 H 成一直線。

假設島高 \overline{AB} 是 x ，前表到海島峰頂正下方的 \overline{BD} 是 y 。很明顯地，

$\triangle ABG$ 與 $\triangle CDG$ 相似， $\triangle ABH$ 與 $\triangle EFH$ 相似。

因此， $\overline{CD} : \overline{DG} = \overline{AB} : \overline{BG}$ 且 $\overline{EF} : \overline{FH} = \overline{AB} : \overline{BH}$ 。

根據這些性質，可以列出兩個比例式：

解得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。因此，海島高度是 _____ 公尺

生活數學 HW

試在生活周遭找一適合藉由重測術測量其高度的物體，並確實記錄你測量用的標竿的長度，兩次測量地點的距離，以及兩次測量的影長(或仿古人趴地觀測，請注意安全!)。然後用這些數據推算該物體的高度吧!

(下堂系列課讓各組分享報告)

探索二 “以小窺大，深亦可測”

厄拉托斯尼（Eratosthenes，古希臘人，西元前 274~194 年）是第一個受畢達哥拉斯（Pythagoras）學派的影響，認為地球是球體並且著手實際測量地球圓周的人。

他雖住在尼羅河出口的亞歷山大城，但經常須沿著尼羅河前往斯尼（Syene）。斯尼有一口非常深的井，細心的他注意到，當夏至正午時，陽光會照到井底，也就是說在夏至正午時，當太陽正直射斯尼時，卻對亞歷山大城斜射。

他首先推斷地球不是平面的物體，而是表面彎曲的球體，否則太陽照射到斯尼或亞歷山大城的角度都應該一樣。他更進一步利用這個日光照射角度的不同來測量地球的圓周。他先推斷亞歷山大城和斯尼皆位於地球上的同一“經度”上，並且測出它們之間的距離為 5000 史達地亞（Stadia）。〔史達地亞是指運動場，埃及的史達地亞一圈是 516.73 英呎〕，5000 史達地亞相當於 785.5 公里。

接著他在亞歷山大城豎立一根大柱子，在夏至的正午太陽剛好在斯尼頭頂上直射斯尼的水井時，在亞歷山大上方的太陽卻斜照這根柱子，且由於太陽光與柱子成 7.2° 的偏角（太陽光與鉛垂線之夾角），產生了柱影。從已測量的距離（787.5 公里）和角度（7.2°）：

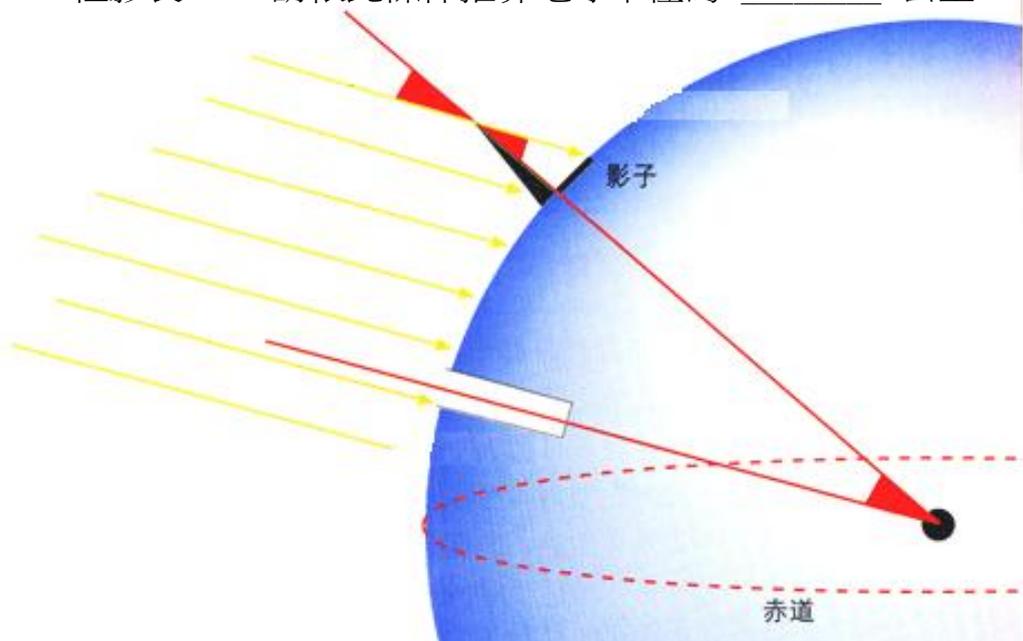


$$\frac{\text{地球圓周}}{360^\circ} = \frac{AS}{\alpha}$$

$$\frac{\text{地球圓周}}{360^\circ} = \frac{\text{距離}}{\text{角度}}$$

得：地球圓周= _____ 公里

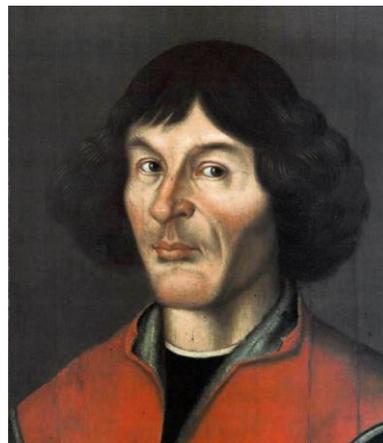
若柱高 8 m，柱影長 1m，請依此條件推算地球半徑約 _____ 公里



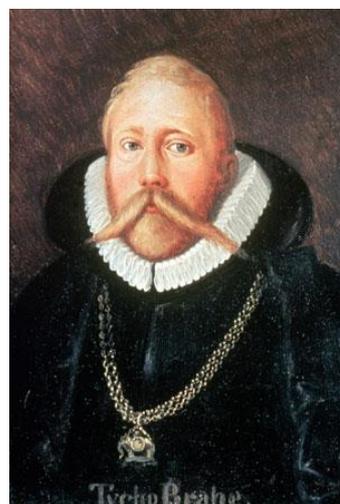
探索三 “行星運行，三棒定律”

科學是一場接力

談到天文學，大多數人想到的是哥白尼的地動說。但其實，找出星體運動規則的人是克卜勒。但誠如牛頓所說，人之所以有成就就是因站在偉人的肩膀上而成的。克卜勒的偉大成就，當然主要是他個人鏗而不捨的努力所致，但在他之前哥白尼、第谷的奠基工作亦厥功甚偉。



哥白尼敢於提出新觀念「太陽中心說」，抵觸了過去數千年來人們根深蒂固的想法。丹麥國王弗烈德利克二世（Frederick II）慷慨資助第谷建立天文台，第谷著手進行長時期星象的觀察、紀錄。他要讓數字說話，不因個人主觀成見而反對。第谷大量的觀測資料，結合克卜勒的數學天才再加二十年的苦功，整理出了行星運行規則。後來牛頓發明微積分，提出萬有引力定律，為克卜勒的行星定律提出理論基礎。這些人的接力，為人類構築了一個完美的知識體系。

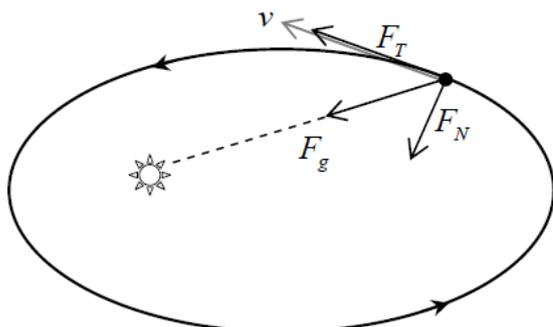


第谷的眼睛與克卜勒的腦袋

第谷的工作充分體現了近代科學精密定量的精神，他的大量仔細的觀察記錄是留給克卜勒的一筆彌足珍貴的財富。克卜勒無限感激地說：“上天給我們一位像第谷這樣精通的觀測者，應該感謝神靈的這個恩賜。”克卜勒的頭腦與第谷的眼睛的結合，是科學史上的一件大事。一個重視客觀實際、善於觀測，一個富於理論思維、精通數學，他們兩人的結合必然會在天文學中創造奇蹟。

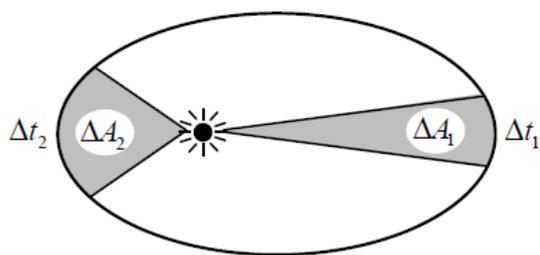
一、克卜勒行星運動第一定律(軌道定律)

太陽系的諸行星，均以橢圓軌道繞太陽公轉，而太陽則位於橢圓的 _____ 上



二、克卜勒行星運動第二定律(等面積定律)

行星與太陽的連線，在相同的時間間隔內掃過相同的面積(面積速率為定值)

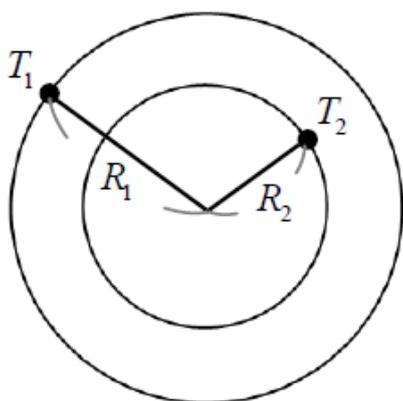


$$\text{面積速率} \equiv \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t_2} = \text{定值}$$

$$(\text{若 } \Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow \Delta A_1 = \Delta A_2)$$

三、克卜勒行星運動第三定律(週期定律)

各行星繞太陽之平均軌道半徑立方，與繞行週期平方之比值為一定值



$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$$

學以致用：

如果有一個神秘星球繞行太陽一周的時間是地球的 8 倍，則此神秘行星行太陽之平均軌道半徑為地球的 _____ 倍。

生活數學 HW

請各組蒐集古今各文明的曆法，並整理精簡內容準備在課堂上和同學分享！

系列課程下節預告：

今天我們用相似形的方法測量的「山高、地深」，相信同學們一定已經開始思索如何「窺天」，接下來我們將介紹月球距離、太陽距離又該如何觀測。

已經對行星運動有基本認識的我們，做好課前準備，接下來我們也要從數學觀點討論各文明的曆法為何同中有異，以及行星逆行等有趣的天文現象！