

$\sqrt{\quad}$ 與平方根

重點一、根號與平方根

(1) 當 a 是正數時， $(\sqrt{a})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $(-\sqrt{a})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

所以 a 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的平方。

(2) 反之， a 的平方根為 $\pm\sqrt{a}$ 。

$$4^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad (-4)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

所以，16 的平方根就是 $\underline{\hspace{2cm}}$

其中，我們稱 4 是 16 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，-4 是 16 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 圖形定義：

正方形 A 的面積為 9，則邊長為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

正方形 B 的面積為 30，則邊長為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

正方形 C 的邊長為 $\sqrt{37}$ ，則面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【思考】(1) 若 a 、 b 為兩個正數，且 $a > b$ ，則 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

(2) $\sqrt{\sqrt{81}} = \underline{\hspace{2cm}}$

☆(3) $\sqrt{9}$ 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$

例一、根號與平方

1. $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

(1) $(\sqrt{7})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $(-\sqrt{7})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $-(\sqrt{7})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(\sqrt{0.003})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (5) $-(\sqrt{\frac{3}{4}})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $\sqrt{(\sqrt{5})^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. () 有一正方形的邊長為 $\sqrt{\frac{9}{5}}$ ，則此正方形的面積為多少？

(A) $\sqrt{\frac{9}{5}}$ (B) $\frac{9}{5}$ (C) $(\frac{9}{5})^2$ (D) 無法求得

3. () 若甲數 > 0 ，且 (甲數) $^2 = 27$ ，則甲數可以記為下列何者？

(A) 27 (B) $\sqrt{27}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $7\sqrt{2}$

例二、 $\sqrt{a}$ 的值

(1) $\sqrt{81} =$ _____

(2) $\sqrt{400} =$ _____

(3) $\sqrt{64} =$ _____

(4) $\sqrt{\frac{49}{16}} =$ _____

(5) $\sqrt{2\frac{7}{9}} =$ _____

(6) $\sqrt{0.0009} =$ _____

(7) $\sqrt{3^2 \times 5^2 \times 7^2} =$ _____

(8) $\sqrt{2^4} =$ _____

(9) $\sqrt{2^3 \times 3^2 \times 7^2} =$ _____

馬上練習

1. (1)面積為 55 的正方形，其邊長為_____。 (2)邊長為 $\sqrt{41}$ 的正方形，其面積為_____。

2. (1) $(\sqrt{23})^2 =$ _____

(2) $(-\sqrt{124})^2 =$ _____

3. (1) $\sqrt{25} =$ _____

(2) $\sqrt{144} =$ _____

(3) $\sqrt{(-4)^2} =$ _____

(4) $\sqrt{-4} =$ _____

(5) $\sqrt{0.49} =$ _____

(6) $\sqrt{36} =$ _____

(7) $\sqrt{1764} =$ _____ 【台北中山 108】

(8) $\sqrt{3^4} =$ _____

(9) $\sqrt{2^2 \times 11^2} =$ _____

(10) $\sqrt{A^3 \times B^2} =$ _____

4. ()下列各根式經化簡後哪些是整數？(多選) 【台北新興108】

(A) $\sqrt{169}$

(B) $\sqrt{1156}$

(C) $\sqrt{333}$

(D) $\sqrt{2^2 \times 5^6 \times 11}$

(E) $\sqrt{5 \times 6 \times 7 \times 14 \times 15 \times 16}$

例三、平方根

(1) 15 的平方根 = _____ (2) 36 的平方根 = _____ (3) $\frac{49}{121}$ 的平方根 = _____

(4) $6\frac{1}{4}$ 的平方根 = _____ (5) 2.25 的平方根 = _____ (6) 0.09 的平方根 = _____

思考、() 已知某正數的平方根分別為 $3x+2$ 與 $5x-6$ ，則下列敘述何者正確？【桃連特招 105】

(A) $x=4$ (B) $x=2$ (C) $x=\frac{1}{2}$ (D) $x=-1$

馬上練習

1. (1) 169 的平方根 = _____ (2) 49 的平方根 = _____

(3) $\sqrt{16}$ 的平方根為 _____ 【台北中山 108】

2. () 下列敘述何者錯誤？ 【彰化鹿港106】

(A) 9 的平方根是 ± 3 (B) 1.2 是 1.44 的平方根
(C) -8 是 64 的平方根 (D) $1\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm 1\frac{3}{4}$ 。

3. () 下列關於平方根的敘述何者正確？【彰化精誠103】

(A) 16 是一個完全平方數，它的平方根是 4。
(B) $\sqrt{16}$ 等於 ± 4 。
(C) $\sqrt{(-16)^2} = 16$ 。
(D) 5 不是完全平方數，所以沒有平方根。

4. () 下列敘述何者錯誤？【台北中山 108】

(A) $\sqrt{169} = 13$ (B) $\sqrt{82} < \sqrt{83}$ (C) $\sqrt{(-25)^2} = -25$ (D) 100 的平方根是 ± 10

5. () 下列敘述何者正確？

(A) -3 是 -9 的其中一個平方根 (B) $(-\sqrt{5})^2$ 的平方根為 ± 5
(C) $\sqrt{144} = \pm 12$ (D) 若 a 、 b 分別為 15 的正、負平方根，則 $ab = -15$

例四、正負平方根的逆向思考

1. (1) 已知 m 是正數，若 3 是 m 的其中一個平方根，則 $m =$ _____

(2) 若 5 是 $4x-7$ 的正平方根，則 $x =$ _____

(3) 若 -7 是 $2x+9$ 的負平方根，則 $x =$ _____

(4) 若 $2x+1$ 的平方根是 ± 7 ，則 $2x+1$ 為 _____，則 $x =$ _____

2. 已知 $k > 0$ ，若 -12 是 $3k$ 的負平方根，則 $k =$ _____，則 $12k$ 的平方根為 _____

馬上練習

1. (1) 若 3 是 $4x-3$ 的正平方根，則 $x =$ _____

(2) 若 9 和 -9 是 $7x+4$ 的平方根，則 $x =$ _____

2. 若 13 是 $(3x-2)^2$ 的平方根，則 $x =$ _____。【彰化鹿港106】

進階思考一、根號內的未知數四則運算

1. () 已知 x 是兩位正整數，欲使 $\sqrt{18x}$ 為整數，則這樣的 x 有多少個？

(A) 3 個 (B) 4 個 (C) 5 個 (D) 6 個

【根號裡面的數字要符合什麼條件，才能讓 $\sqrt{A}$ 必為整數】

2. 已知 a 、 b 、 c 、 d 是正整數，且 $\sqrt{320+a}$ 、 $\sqrt{320-b}$ 、 $\sqrt{320c}$ 、 $\sqrt{\frac{320}{d}}$ 也是正整數，則 a 、 b 、 c 、 d 之最小值是多少？

3. (1) $\sqrt{a-7}=5$ ， $a=$ _____ (2) $\sqrt{2b+5}=3$ ， $b=$ _____ (3) $\sqrt{4c}=8$ ， $c=$ _____

馬上練習

1. 已知 $-\sqrt{10}+B=0$ ，則 $B=$ _____

2. 已知 a 、 b 、 c 、 d 是正整數，且 $\sqrt{150+a}$ 、 $\sqrt{150-b}$ 、 $\sqrt{150\div c}$ 、 $\sqrt{150\times d}$ 也是正整數，則：

$a=$ _____、 $b=$ _____、 $c=$ _____、 $d=$ _____。【高雄大樹 108】

進階思考二、根號與絕對值與 0

回顧：

一上、 $|5-2|=|2-5|$ ，則 $|\text{小}-\text{大}|=$ _____

一下、 $|A|+|B|+|C|=0$ ，則 $A=$ _____、 $B=$ _____、 $C=$ _____

$|x+5|+|y-4|=0$ ，則 $x=$ _____、 $y=$ _____

1.(1)若 $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0$ ，則 $A=$ _____； $B=$ _____。

(2)若 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{a-b}=0$ 則 $a=$ _____； $b=$ _____。

(3) 若 $\sqrt{(3x+y-1)^2}+\sqrt{(5x+2y-6)^2}=0$ 則 $\sqrt{2x+y+11}=$ _____。【高雄民族 106】

2. (1) $\sqrt{(3.14-\pi)^2}=$ _____ (2) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}=$ _____ (3) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}=$ _____

(4)若 $2 < x < 5$ ，則 $\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(7-x)^2}=$ _____

馬上練習

1.若 $\sqrt{(a-2b-11)^2}+\sqrt{(2a+b-12)^2}=0$ ，則： $a=$ _____、 $b=$ _____、 $3a-2b$ 的平方根=_____

2. (1) 若 $10 < a < 14$ ，則 $\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a-9)^2}=$ _____

(2)若 $x > y > 0$ ，則 $\sqrt{(x+y)^2}+\sqrt{(y-x)^2}=$ _____

作業練習

一、 $\sqrt{a}$ 求值

(1) $\sqrt{49} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\sqrt{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $-\sqrt{25} = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{(-4)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ (6) $\sqrt{(13)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ (7) $\sqrt{1\frac{17}{64}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (8) $\sqrt{\sqrt{16}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(9) () 請計算 $\sqrt{56\frac{1}{4}} = ?$ 【新北八里 107】

(A) $\pm 8\frac{1}{2}$ (B) $\pm 7\frac{1}{2}$ (C) $8\frac{1}{2}$ (D) $7\frac{1}{2}$

二、平方根

(1) 5 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (2) 25 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\frac{196}{169}$ 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$

(4) $1\frac{7}{9}$ 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (5) -100 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (6) 0 的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$

(7) 若 -2 是 x 的其中一個平方根，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$

三、正負平方根的逆推

(1) 若 17 是 $-5x-6$ 的正平方根， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) 若 4 是 $3x-2$ 的平方根， $x = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 若甲數 < 0 ，且 (甲數) $^2 = 19$ ，則甲數 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 若 -5 是 $9+2x$ 的一個平方根，則：

$x = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $13x-23$ 的平方根為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ； $\sqrt{x+1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5) () 已知 $3x-5$ 的平方根為 $\pm\sqrt{10}$ ，則 x 的值為多少？【新北八里 107】

(A) 5 (B) 10 (C) 35 (D) 100。

四、綜合思考

(1) () 下列敘述何者錯誤？

- (A) 0 是 0 的平方根 (B) 6 是 36 的平方根
(C) -9 是 81 的平方根 (D) -14 是 -196 的平方根

(2) () 關於 $\sqrt{5}$ 的敘述，下列何者錯誤？

- (A) $\sqrt{5}$ 的平方等於 5 (B) $\sqrt{5}$ 無法表示成一個分數，所以不是有理數
(C) 若 $x^2=5$ ，則 $x=\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{5}$ 不剛好等於 2.2360

(3) () 下列各數中，介於 3 與 7 之間的數共有幾個？

$\sqrt{6}$ ， $\sqrt{10}$ ， $\sqrt{16}$ ， $\sqrt{24}$ ， $\sqrt{25}$ ， $\sqrt{31}$ ， $\sqrt{36}$ ， $\sqrt{40}$ ， $\sqrt{49}$ ， $\sqrt{50}$

- (A) 4 個 (B) 5 個 (C) 6 個 (D) 7 個

(4) 有三個正方形，甲的邊長為 $\sqrt{80}$ ，乙的面積為 81，丙的邊長為 8，則哪一個正方形的面積較大？

(5) 已知一個面積為 3 的正方形，邊長為 $\sqrt{3}$ ；一個面積為 7 的正方形，邊長為 $\sqrt{7}$ 。現在有一個正方形，它的面積剛好是前述兩個正方形面積的總和，則這個正方形的邊長為_____。【台北新興 108】

(6) 計算 $\sqrt{81}-\sqrt{36}+\sqrt{289}=?$

(7) 請將 4356 寫成標準分解式後，思考 $\sqrt{4356}$ 之值為_____

(8) 已知一個正方形的面積為 67600 平方公分，則其邊長為_____公分。

五、進階思考

1. 計算下列各式的值：【化成假分數後，思考乘法公式】

$$(1) \sqrt{227 \frac{1}{225}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \sqrt{254 \frac{1}{256}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 已知 -2 是 $3x+5y$ 的一個平方根，且 $2x-5y+5$ 的平方根為 ± 4 ，則：

(1) x 與 y 的值分別為何？

(2) $2x-3y$ 的平方根為何？

3. 若 $a=22 \times 24 \times 33$ ，則 a 的平方根 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。【翰林進階卷】

4. 已知 $\frac{3}{2} < x < \frac{9}{4}$ ，則 $\sqrt{(2x-7)^2} + \sqrt{(5-2x)^2}$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 【桃園文昌 108】

5. 若 $-2 < a < 5$ ，則化簡 $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a+2)^2} - \sqrt{(a+10)^2} - \sqrt{(a-8)^2}$ 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 【彰化精誠 109】

重點二、近似值

觀念一、最早的時候，數學家發現：

正方形的面積＝邊長 $\times$ 邊長 $\rightarrow A=b^2$

符合這樣特質的數稱為「完全平方數」。比如：

N	2	3	4	5	60	70	800	900	0.2	0.03
N^2										

觀念二、逼近法：藉由找附近的完全平方數，不斷「靠近」的過程。

例一、十分逼近法求 $\sqrt{2}$ 的近似值：

觀念：已知 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，所以只要找到某個 $(1.xxx)^2$ 是最接近 $\sqrt{2}$ 的就對了。

步驟：將 1 和 2 分為_____等分(故稱為十分逼近法)。

再由 $(1.3)^2$ 、 $(1.4)^2$ 、 $(1.5)^2$ 、 $(1.6)^2$ 中找到最靠近 2 的。

$(1.3)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ $(1.4)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ $(1.5)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ $(1.6)^2 = \underline{\hspace{1cm}}$

可知_____

例二、用完全平方數快速看出下列根號數的整數範圍：例： $3 < \sqrt{15} < 4$

$\sqrt{20}$	$\sqrt{75}$	$\sqrt{103}$	$\sqrt{300}$	$-\sqrt{50}$
			1	

例三、(1)利用以下的數值，以十分逼近法計算 $\sqrt{70}$ 的近似值＝_____【台南復興 106】

(以四捨五入法求到小數點後第 2 位)

$$8^2=64、9^2=81、8.3^2=68.89、8.4^2=70.56、8.5^2=72.25$$

$$8.35^2=69.7225、8.36^2=69.8896、8.37^2=70.569、8.365^2=69.973225$$

(2)根據上表，思考： $83^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ 、 $0.85^2 = \underline{\hspace{1cm}}$

例四、(1) 設 x 為正整數，滿足 $\sqrt{10} < x < \sqrt{90}$ ，滿足條件的 x 有_____

(2)已知 A 為正整數，且 $\sqrt{88} < A < \sqrt{1234}$ ，則符合條件的 A 共有_____個【桃園大成 106】

馬上練習

1. (1) $\sqrt{0.04} =$ _____ (2) $\sqrt{1.44} =$ _____ (3) $\sqrt{40000} =$ _____ (4) $\sqrt{4900} =$ _____

2. (1) $\sqrt{150}$ 的整數部分 _____

(2) $\sqrt{381}$ 的整數部分 _____

(3) 請問 $\sqrt{140}$ 介於哪兩個連續整數之間？答： _____

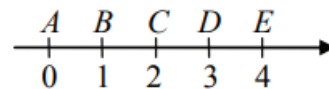
(4) 請問 $-\sqrt{200}$ 介於哪兩個連續整數之間？答： _____

(5) 請問 $-\sqrt{10}$ 介於哪兩個連續整數之間？答： _____ 【桃園平南 110】

(6) 68 的負平方根的值介於哪兩個連續整數之間？答： _____

(7) () 如圖， $2\sqrt{13}-4$ 在數線上的位置應在哪兩點之間？【高雄陽明 109】

(A) A 和 B (B) B 和 C (C) C 和 D (D) D 和 E



3. 已知 $\sqrt{19} \doteq 4.36$ 、 $\sqrt{190} \doteq 17.03$

(1) $\sqrt{1900} \doteq$ _____

(2) $\sqrt{1.9} \doteq$ _____

4. 以十分逼近法計算 $\sqrt{14}$ ，若 $\sqrt{14} = a.b\dots\dots$ ，則 $a+b =$ _____ 【桃園大成 106】

(a 為 $\sqrt{14}$ 的整數部分， b 為 $\sqrt{14}$ 的小數點後第一位)

已知 $(3.5)^2 = 12.25$ ， $(3.6)^2 = 12.96$ ， $(3.7)^2 = 13.69$ ， $(3.8)^2 = 14.44$ ， $(3.9)^2 = 15.21$ ， $4^2 = 16$

5. 設 x 為正整數，滿足 $\sqrt{45} < x < \sqrt{150}$ ，滿足條件的 x 有 _____

例五、根號的整數與小數

(1) 設 $\sqrt{2}=a+b$ ，其中 a 是整數部分， b 是小數部分，則 $a=$ _____、 $b=$ _____

(2) 設 $2\sqrt{6}=a+b$ ，其中 a 是整數部分， b 是小數部分，則 $a=$ _____、 $b=$ _____

(3) 若 $\sqrt{20+\sqrt{5}}=a+b$ ，其中 a 是整數部分， b 是小數部分，則 $a=$ _____、 $b=$ _____

【思考 $\sqrt{5}$ 大概是幾，就可以估計 $\sqrt{20+\sqrt{5}}$ 大概是幾到幾】

馬上練習

1. 設 $\sqrt{110}=a+b$ ，其中 a 是整數部分， b 是小數部分，則 $a=$ _____、 $b=$ _____

2. 若 $10\sqrt{2}=a+b$ ，其中 a 是整數部分， b 是小數部分，則 $a=$ _____、 $b=$ _____

3. () 下列關於 $\sqrt{15}$ 的敘述何者錯誤? 【桃園中興 109】

(A) $\sqrt{15}$ 的值不為整數

(B) 在數線上座標為 $\sqrt{15}$ 的點在 4 的左邊

(C) $\sqrt{15}=\sqrt{16}-\sqrt{1}$

(D) $\sqrt{15} > 3.5$

重點三、根式的比大小

例一、已知 $3 > 2$ 則 $\sqrt{3} > \sqrt{2}$

則 $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$ 、 $b = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 、 $c = \frac{3}{\sqrt{4}}$ 哪個大？

峰兄說：

例二、在 $\square$ 中填入 $>$ 、 $<$ 或 $=$ 。

(1) $\sqrt{3} \square \sqrt{5}$

(2) $\sqrt{10} \square 3$

(3) $\sqrt{20} \square 4$

(4) $\sqrt{0.01} \square 0.1$

(5) $8 \square \sqrt{70}$

(6) $\sqrt{0.16} \square 0.3$

(7) $1\frac{1}{3} \square \sqrt{\frac{9}{4}}$

(8) $\sqrt{\frac{169}{25}} \square \sqrt{11\frac{1}{9}}$

(9) $-\sqrt{2} \square -\sqrt{3}$

(10) $-\sqrt{0.01} \square -1$

(11) $-\sqrt{\frac{4}{25}} \square -\sqrt{\frac{1}{4}}$

(12) $-2 \square \sqrt{4}$

馬上練習

(1) $A = \sqrt{\frac{5}{2}}$ $B = \frac{5}{\sqrt{2}}$ $C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $D = \frac{5}{2}$

(2) $A = -\sqrt{\frac{3}{4}}$ $B = \frac{3}{-\sqrt{4}}$ $C = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ $D = -\frac{3}{4}$

作業練習

一、選擇題：

- () 1. 下列有關平方根的敘述，哪一個是正確的？
(A) 0 沒有平方根 (B) 0.2 是 0.4 的平方根
(C) 16 的平方根是 4、-4 (D) -13 是 -169 的平方根
- () 2. 最接近 $\sqrt{262}$ 的正整數為何？
(A) 15 (B) 16
(C) 17 (D) 18
- () 3. 下列有關 $\sqrt{8}$ 的敘述，何者不正確？
(A) $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$ (B) 在數線上可以找到坐標為 $\sqrt{8}$ 的點
(C) $\sqrt{8}$ 是 64 的平方根 (D) $\sqrt{8} < 3$
- () 4. $\sqrt{3\frac{1}{16}}$ 的值與下列何者相同？
(A) $1\frac{3}{4}$ (B) $1\frac{1}{4}$
(C) $\pm 1\frac{3}{4}$ (D) $2\frac{3}{4}$
- () 5. 若 $\sqrt{121-a}$ 為正整數，則正整數 a 有多少個？
(A) 1 (B) 10
(C) 11 (D) 121
- () 6. 下列哪一個數不是完全平方數？
(A) $2^8 \times 5^4 \times 11^5$ (B) $2^4 \times 5^6 \times 7^8$
(C) $\sqrt{16}$ (D) 121
- () 7. 一個邊長為 a 的正方形，其面積為 68，則下列選項何者正確？
(A) $5 < a < 6$ (B) $6 < a < 7$
(C) $7 < a < 8$ (D) $8 < a < 9$
- () 8. 下列敘述何者錯誤？
(A) 256 的平方根為 ± 16 (B) $\sqrt{121} = 11$
(C) 若 $x^2 = 17$ ，則 $x = \pm\sqrt{17}$ (D) $\sqrt{169}$ 的平方根為 ± 13
- () 9. 若 -3 是 $2x-1$ 的平方根，則 $(x+2)(x-2) = ?$
(A) 21 (B) 18
(C) 15 (D) 12
- () 10. 已知 a 為正整數，且 $80 \leq a < 300$ ，則能使 $\sqrt{a}$ 為正整數的 a 有多少個？
(A) 17 (B) 9
(C) 8 (D) 7

二、填充題：

1. 求下列各數的平方根：

(1) 289：_____。(2) $\sqrt{36}$ ：_____。(3) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ = _____。

2. (1) 已知 -11 是 $5a-4$ 的平方根，則 a = _____。

(2) 若 5 和 -5 是 $(3x+2)^2$ 的平方根，則 x = _____

(3) 若 -3 是 $2x-y+4$ 的其中一個平方根， ± 2 是 $3x+2y$ 的平方根，則 x = _____、 y = _____

3. 若 $\sqrt{150}$ 的整數部分為 a ， $\sqrt{24}$ 的整數部分為 b ，則 $a+b$ 的平方根為 _____。

4. 參考以下數據： $6.8^2=46.24$ ， $6.9^2=47.61$ ， $6.83^2=46.6489$ ， $6.84^2=46.7856$ ， $6.85^2=46.9225$ ， $6.86^2=47.0596$ ，用十分逼近法，求 $\sqrt{47}$ 的近似值為 _____。(求至小數點後第 1 位)

5. 已知 $\sqrt{2809}=53$ ，則 $\sqrt{28.09}$ 的值為 _____。

6. 若 n 為正整數，且 $13 \leq \sqrt{n} \leq 23$ ，則符合條件的 n 有 _____ 個。

三、資優挑戰題：

1. 若 $a=94^2-2\times 94\times 34+34^2$ ， $b=26^2+8\times 26+4^2$ ，則 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若 $\sqrt{2x-y}+|2x+y-4|=0$ ，則 $\sqrt{x+4y}$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若 $x+y$ 的正平方根是 4， $x-y$ 的負平方根是 -2，則 $\sqrt{x^2-y^2}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若 $a>b>0>c$ 且 $\frac{c}{a}<\frac{-1}{2}$ ，化簡 $\sqrt{(b-a)^2}-(\sqrt{b-c})^2+\sqrt{(b+2c)^2}=\underline{\hspace{2cm}}$ 【彰化精誠 104】【☆】

5. 設 a, b, c, d 皆為正數， $a<b$ ， $c>d$ ， $bc>ad$ ，若一個三角形三邊長分別為 $\sqrt{a^2+c^2}$ 、 $\sqrt{b^2+d^2}$ 、 $\sqrt{(b-a)^2+(c-d)^2}$ ，求此三角形面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 【彰化精誠 104】【☆】

根式運算

重點一、根式的化簡：用標準分解式提出「偶數次方」的數值： $\sqrt{a^2b^4c^6}=ab^2c^3$

例一 (1) $\sqrt{A^2} =$ (2) $\sqrt{A^3} =$ (3) $\sqrt{A^4} =$ (4) $\sqrt{A^5} =$

(5) $\sqrt{2^5} =$ (6) $\sqrt{(0.3)^2} =$ (7) $\sqrt{(-5)^2} =$ (8) $\sqrt{7^3} =$

例二 (1) $\sqrt{AB^2} =$ (2) $\sqrt{A^3B^5} =$

(3) $\sqrt{2^4 \times 3} =$ (4) $\sqrt{5^3 \times 7^2} =$

(5) $\sqrt{\frac{3^5}{7^2}} =$ (6) $\sqrt{180} =$

馬上練習

a. $\sqrt{18} =$ b. $\sqrt{40} =$ c. $\sqrt{45} =$

d. $\sqrt{80} =$ e. $\sqrt{120} =$ f. $\sqrt{\frac{8}{25}} =$

g. $\sqrt{2^2 \times 5^2} =$ h. $\sqrt{2^2 \times 3^4 \times 11^2} =$ i. $\sqrt{5^3 \times 7^2} =$

j. $\sqrt{2^7} =$ k. $\sqrt{2^2 \times 3^5} =$ l. $\sqrt{\frac{5^4}{2^6}} =$

例二、連續的有理化與分項對消

根據前面的基礎，我們知道： $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

基礎 a、 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

基礎 b、 $\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} =$

基礎 c、 $\frac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{15}-\sqrt{10}} + \frac{5}{\sqrt{20}-\sqrt{15}} =$

觀察基礎 a~c，我們可以得知： $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} =$ 、 $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$

(1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$

(2) $\frac{3}{10+\sqrt{97}} + \frac{3}{\sqrt{97}+\sqrt{94}} + \frac{3}{\sqrt{94}+\sqrt{91}} + \dots + \frac{3}{\sqrt{4}+1} =$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{12}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{10}{\sqrt{57}+\sqrt{47}} =$

(4) $\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{167}+\sqrt{169}} =$

(5) () 若 $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} = a\sqrt{6}+b\sqrt{3}+c\sqrt{2}$ ，其中 a, b, c 均整數，則 $a+b+c = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。【彰化精誠103】

馬上練習

1. () 設 $x = \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{98}} + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{96}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2}}$ ，且 x 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{a}{b} = ?$ (A) $8 - 4\sqrt{2}$ (B) $8 + 4\sqrt{2}$ (C) $4 - 2\sqrt{2}$ (D) $4 + 2\sqrt{2}$ 。【彰化精誠103】

2. 化簡 $\frac{1}{\sqrt{100} - \sqrt{97}} - \frac{1}{\sqrt{97} - \sqrt{94}} + \frac{1}{\sqrt{94} - \sqrt{91}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 【彰化精誠 104】

3. 化簡 $\frac{3}{2 - \sqrt{7}} - \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{21} + \sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 【彰化精誠 104】

4. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 【台南歸仁 109】

作業練習

一、有理化分母

$$(1) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

$$(5) \frac{1}{4-\sqrt{3}}$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$$

$$(7) \frac{1}{3-\sqrt{6}}$$

$$(8) \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$(9) \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$$

$$(10) \frac{1}{4+\sqrt{15}}$$

$$(11) \frac{1}{\sqrt{10}+3}$$

$$(12) \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

$$(13) \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$(14) \frac{13}{3\sqrt{6}-2\sqrt{7}}$$

$$(15) \frac{6}{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$$

$$(16) \frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$$

二、變化題

(1)() $\sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5^5}$ 和下列那一個值相同？【彰化和美 107】

(A) $120\sqrt{15}$ (B) $36\sqrt{30}$ (C) $45\sqrt{15}$ (D) $450\sqrt{10}$

(2)() 下列哪一個數最大？【新北樟實 106】

(A) $\frac{6}{5}$ (B) $\sqrt{\frac{6}{5}}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ (D) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

(3)

(4) 有理化 $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$ _____

(5) $\frac{1}{\sqrt{50} + \sqrt{49}} + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{48}} + \frac{1}{\sqrt{48} + \sqrt{47}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} =$ _____ 【高雄陽明 110】

重點三、根式的乘除法

1. 什麼是根式？

含有_____的數字進行運算，稱為根式。

2. 根式的乘法：

$$(1) A \times \sqrt{B} =$$

$$(2) \sqrt{A} \times \sqrt{B} =$$

$$(3) \sqrt{A^2 B} =$$

$$(4) \sqrt{\frac{A}{B}} \times \sqrt{\frac{B}{C}} =$$

3. 根式的除法：

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{A\sqrt{B}}{C\sqrt{D}} = \sqrt{\frac{A^2 B}{C^2 D}}$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} \div \sqrt{\frac{A}{C}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \times \sqrt{\frac{C}{A}} = \sqrt{\frac{C}{B}}$$

例一、 (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} =$

$$(2) \sqrt{5} \times \sqrt{7} =$$

$$(3) \sqrt{10} \times 2\sqrt{5} =$$

$$(4) \sqrt{12} \times \sqrt{15} =$$

例二、 (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} =$

$$(2) \sqrt{5} \times \sqrt{7} =$$

$$(3) \sqrt{10} \times 2\sqrt{5} =$$

$$(4) \sqrt{12} \times \sqrt{15} =$$

例三、 (1) $\sqrt{21} \div \sqrt{7} =$ _____

$$(2) 2\sqrt{5} \div \sqrt{5} =$$

$$(3) \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} =$$

$$(4) \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} =$$

$$(5) \sqrt{\frac{18}{7}} \div \sqrt{\frac{6}{7}} =$$

$$(6) \sqrt{\frac{35}{12}} \div \sqrt{\frac{10}{3}} =$$

$$(7) 2\sqrt{\frac{3}{8}} \div \sqrt{2\frac{2}{7}} =$$

$$(8) \sqrt{\frac{6}{7}} \div \sqrt{\frac{3}{14}} \div \sqrt{2} =$$

馬上練習

一、乘法的基本運算

a. 根式乘整數

(1) $(-5) \times \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $(-1) \times \sqrt{7} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $3\sqrt{2} \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(-3\sqrt{5}) \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $(-4) \times \sqrt{15} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $(-2\sqrt{2}) \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

b. 根式乘根式

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{6} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $(-\sqrt{7}) \times 3\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(-2\sqrt{5}) \times 3\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{15} \times \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $(-\sqrt{21}) \times \sqrt{7} = \underline{\hspace{2cm}}$

c. 分數乘分數

(1) $\sqrt{\frac{5}{6}} \times \sqrt{\frac{12}{7}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sqrt{\frac{11}{7}} \times \sqrt{\frac{2}{7}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{6}{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\sqrt{1\frac{3}{5}} \times \sqrt{\frac{5}{12}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{\frac{26}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{13}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $\sqrt{2\frac{4}{9}} \times \sqrt{3\frac{3}{11}} = \underline{\hspace{2cm}}$

二、除法的基本運算

a. 簡單除法

(1) $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sqrt{125} \div \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sqrt{3} \div \sqrt{12} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{54} \div \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $3\sqrt{7} \div \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $5\sqrt{2} \div \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

(8) $\sqrt{32} \div 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

(9) $\sqrt{54} \div 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) $6\sqrt{21} \div 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

c. 分數除法

(1) $\sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{6} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sqrt{\frac{1}{16}} \div \sqrt{\frac{1}{49}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $-\sqrt{\frac{4}{3}} \div \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{\frac{4}{7}} \div \sqrt{\frac{5}{14}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $\sqrt{\frac{3}{5}} \div \sqrt{\frac{6}{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$

例四、連續多項的乘除法

(1) $\sqrt{5} \div \sqrt{\frac{1}{3}} \div \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sqrt{27} \div \sqrt{3} \div (-\sqrt{5}) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sqrt{4\frac{1}{5}} \div \sqrt{\frac{7}{10}} \div \sqrt{\frac{6}{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\sqrt{6} \div \sqrt{24} \div \sqrt{72} \div \sqrt{\frac{5}{12}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{42} \times \sqrt{3\frac{1}{3}} \div \sqrt{7\frac{6}{7}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $\sqrt{1\frac{3}{7}} \div \frac{2}{3} \sqrt{1\frac{1}{10}} \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $(-\sqrt{1\frac{2}{3}}) \div \sqrt{\frac{5}{54}} \times \sqrt{\frac{5}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(8) $\frac{4}{\sqrt{5}} \div \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$

馬上練習

(1) $\sqrt{11} \times \sqrt{3}$

(2) $(-5\sqrt{2}) \times 3\sqrt{7}$

(3) $3\sqrt{3} \times 6\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$

(5) $6\sqrt{7} \times (-2\sqrt{3})$

(6) $4\sqrt{2} \times 9\sqrt{2}$

(7) $\sqrt{7} \times (-\sqrt{3})$

(8) $\frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{7})$

(9) $\sqrt{1\frac{1}{2}} \div \sqrt{\frac{1}{6}} \times \sqrt{\frac{6}{7}}$

(10) $\sqrt{15} \times \sqrt{5\frac{1}{3}} \div \sqrt{1\frac{4}{5}}$

(11) $3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{6} \div \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}}$

(12) $\sqrt{15} \times \sqrt{5\frac{1}{3}} \div \sqrt{1\frac{4}{5}}$

(13) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \div \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} \times \sqrt{\frac{21}{4}}$

(14) $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}}$

(15) $5\sqrt{45} \times (-\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}) \div \sqrt{\frac{5}{4}}$

三、化簡後合併同類方根

「能化簡要先化簡」，才能看見正確的同類項。

$$(1) \sqrt{A^3} + \sqrt{A} =$$

$$(2) \sqrt{A^2} + 3A =$$

$$(3) \sqrt{A^5} + \sqrt{A^3} =$$

例三、(1) $\sqrt{27} - \sqrt{3} =$

(2) $\sqrt{18} + 2\sqrt{8} =$

(3) $\sqrt{12} + \sqrt{12} =$

(4) $\sqrt{8} + 3\sqrt{2} - \sqrt{32} =$

(5) $\sqrt{147} + \sqrt{75} - \sqrt{27} =$ **【高雄民族 106】**

馬上練習

1. (1) $7\sqrt{5} - \sqrt{45} =$ 。

(2) $-\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{2} =$ 。

(3) $\sqrt{18} - 5\sqrt{3} + \sqrt{12} =$

(4) $\sqrt{50} + \sqrt{27} - (\sqrt{18} + \sqrt{54}) =$ **【台中大業 109】**

2. () 請計算並化簡 $\sqrt{108} - \sqrt{96} - \sqrt{48} + \sqrt{24} = ?$ **【新北八里 107】**

(A) $-2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$ (C) $6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ 。

3. () 下列何者不是 $\sqrt{3}$ 的同類方根？ **【彰化和美 107】**

(A) $\frac{1}{3}\sqrt{24}$ (B) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ (C) $2\sqrt{12}$ (D) $\sqrt{16\frac{1}{3}}$

4. () 下列哪一個式子的運算結果與其他三者不同？ **【彰化精誠 103】**

(A) $\sqrt{4} + \sqrt{3}$ (B) $\sqrt{63} - \sqrt{28}$ (C) $\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{28}{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{5}{3}} \div \sqrt{\frac{5}{21}}$ 。

四、根式的分配律

例四、 (1) $\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})=$

(2) $2\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{2})=$

(3) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})=$

(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})=$

(5) $-(5-2\sqrt{3})=$

(6) $\sqrt{6}(\sqrt{12}-3\sqrt{3})=$

馬上練習

(1) $\sqrt{5}(\sqrt{15}+\sqrt{3})=$ _____。【高雄林園 108】

(2) $\sqrt{15}(\sqrt{17}-\sqrt{2})(\sqrt{17}+\sqrt{2})=$ _____

(3) $(3-\sqrt{2})(\sqrt{15}+\sqrt{3})=$ _____

(4) $-4(\sqrt{75}+\sqrt{45})=$

(5) $(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=$

例六、四則混合練習(LV.1)

(1) $(-7\sqrt{21}) \times \sqrt{\frac{1}{7}} - 4\sqrt{3} =$ _____

(2) $(-3\sqrt{33}) \times (-\sqrt{\frac{1}{3}}) - 6\sqrt{11} =$ _____

例七、四則混合練習(LV.2)

(1) () 例算式 $(\sqrt{6} + \sqrt{10} \times \sqrt{15}) \times \sqrt{3}$ 之值為何？【高雄民族 106】

(A) $2\sqrt{42}$ (B) $12\sqrt{5}$ (C) $18\sqrt{2}$ (D) $12\sqrt{13}$

(2) $\sqrt{6} (3\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{2} \div (2 - \sqrt{3}) =$ _____ 【新北樟實 106】

例八、四則混合練習(LV.3)

(1) () 計算 $(\sqrt{20} + \sqrt{19})^2 - (\sqrt{20} - \sqrt{19})^2$ 的結果為何？【彰化精誠 103】

(A) 0 (B) 38 (C) 78 (D) $8\sqrt{95}$ 。

(2) $(7 - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} =$ _____ 【高雄林園 108】

(3) 化簡 $\sqrt{(\frac{41}{199})^2 - (\frac{9}{199})^2} =$ _____ 【彰化精誠 104】

馬上練習

(1) $2\sqrt{14} \times \sqrt{\frac{4}{7}} - 7\sqrt{2} =$ _____

(2) $4\sqrt{21} \times (-\sqrt{\frac{1}{7}}) + 6\sqrt{3} =$ _____

(3) $(-2\sqrt{15}) \times (-\sqrt{\frac{1}{5}}) + 5\sqrt{3} =$ _____

(4) $3\sqrt{14} \times (-\sqrt{\frac{1}{2}}) + 4\sqrt{7} =$ _____

(5) $\sqrt{108} - 5\sqrt{12} + \sqrt{45} =$ _____

(6) $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$ _____

(7) $\sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{27} =$ _____

【嘉義北興 109】

作業練習

一、基本計算【彰化和美 107、新北樟實 106】

(1) () 計算 $2\sqrt{3} \times (-5) = ?$

(A) $-2\sqrt{15}$ (B) $-5\sqrt{6}$

(C) $2\sqrt{3}-5$ (D) $-10\sqrt{3}$

(2) $2\sqrt{27} + \sqrt{12} =$ _____。

(3) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{9}{10}} =$ _____。

(4) $-2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} =$ _____。

(5) $\sqrt{98} \div \sqrt{7} =$ _____。

(6) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{6}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} =$ _____。

(7) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} =$ _____。

(8) $(-5\sqrt{3}) \times (\sqrt{24} + \sqrt{60}) =$ _____。

(9) $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - (8\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) =$ _____。

(10) $7 - \sqrt{12} - 2(4 - \sqrt{27}) =$ _____。

(11) $(-5\sqrt{6}) \times \sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{3} =$ _____。

(12) $2\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{2} =$ _____。

二、常考運算(須化為最簡根式)

(1) $(-\sqrt{24}) \div (-\sqrt{\frac{3}{5}}) \div \sqrt{2\frac{2}{3}} =$ _____。

(2) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} =$ _____。

(3) $\sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{2}{81}} =$ _____。

(4) $\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}\sqrt{6} =$ _____。

(5) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{81}} =$ _____。

(6) $\sqrt{121} + \sqrt{169} + \sqrt{225} + \sqrt{289} =$ _____。

(7) $-6\sqrt{8} + 2\sqrt{12} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{48} =$ _____。

(8) $\sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} + \sqrt{32} + \sqrt{64} =$ _____。

(9) 已知 $a+b=10$ ， $ab=15$ ，則 $a-b=$ _____。

(10) 設 $\sqrt{3}$ 的小數部分為 a ，則 $a^2 + a + \frac{2}{a} =$ _____。【☆】

資優思考一、有加減法的比大小

A 類：單一根式比大小，『直接有理化』或『直接平方』。

B 類：若 $a = \sqrt{10} + \sqrt{5}$ 、 $b = \sqrt{12} + \sqrt{3}$ ， $10 + 5 = 12 + 3$ ，『和相同』直接『和』。

C 類：【資優】若 $a = \sqrt{11} - \sqrt{10}$ 、 $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$ ， $11 - 10 = 12 - 11$ ，『差相同』就『差』。

(1) 若 a 、 b 、 c 為三個正分數，且 $a \times \sqrt{\frac{3}{2}} = b \times \frac{3}{\sqrt{2}} = c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ 則 a 、 b 、 c 三數的大小關係為何？

(2) 若 a 、 b 、 c 為三個正分數，且 $a \times \sqrt{\frac{2}{5}} = b \times \frac{2}{\sqrt{5}} = c \times \frac{\sqrt{2}}{5}$ 則 a 、 b 、 c 三數的大小關係為何？

(3) 比較 $a = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ 、 $b = \sqrt{7} + \sqrt{2}$ 、 $c = \sqrt{5} + 2$ 的大小關係為何？【台中台北常考】

(4) 比較 $a = \sqrt{13} + \sqrt{3}$ 、 $b = \sqrt{12} + 2$ 、 $c = \sqrt{11} + \sqrt{5}$ 的大小關係為何？

(5)比較 $a = \sqrt{2} - \sqrt{8}$ 、 $b = \sqrt{3} - \sqrt{7}$ 、 $c = 2 - \sqrt{6}$ 的大小關係為何？【北北基】

(6)比較 $a = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ 、 $b = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ 、 $c = 3 - \sqrt{8}$ 的大小關係為何？【反有理化】【私校常考】

(7)比較 $a = \sqrt{15} - \sqrt{5}$ 、 $b = \sqrt{17} - \sqrt{7}$ 、 $c = \sqrt{19} - 3$ 的大小關係為何？【反有理化】

(8)比較 $a = \sqrt{3} + \sqrt{12}$ 、 $b = 2 + 2\sqrt{3}$ 、 $c = 2\sqrt{3} + \sqrt{8}$ 的大小關係為何？【峰兄吃飽太閒想的】

資優思考二、經典變化題

1. 設 $x = \frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$, 則 $x^2 - y^2 = ?$ 【☆】

2. 設 $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a , 則 $a = ?$ 【☆】

3. 已知 $x = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$, 則 x 的倒數為 _____。【☆】

4. 計算 $(3 + \sqrt{10})^4 (3 - \sqrt{10})^3 =$ _____。【☆】

5. 計算 $\frac{1 + \sqrt{6} + \sqrt{7}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} =$ _____。【☆】

根式運算綜合作業

一、選擇題：

() 1. 下列何者為最簡根式？

- (A) $3\sqrt{50}$ (B) $\sqrt{\frac{7}{24}}$ (C) $\sqrt{330}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

() 2. 下列何者化簡後不是其他三者的同類方根？

- (A) $\sqrt{180}$ (B) $\sqrt{\frac{125}{3}}$ (C) $\sqrt{\frac{121}{5}}$ (D) $\sqrt{7.2}$

() 3. 計算 $\sqrt{\frac{20}{45}}$ 之值為何？

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{9}$

() 4. $\begin{cases} 2x+3y=17 \\ 5x+2y=26 \end{cases}$ ，則 $\sqrt{x^2+y^2}=?$

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $\sqrt{26}$

() 5. 若 $a=5\sqrt{2}$ ， $b=3\sqrt{3}$ ，則 a^2+b^2 的值為何？

- (A) 73 (B) 77 (C) 81 (D) 88

() 6. 計算 $(-\sqrt{\frac{5}{6}}) \times \sqrt{\frac{24}{25}} \div (-\sqrt{\frac{3}{5}}) = ?$

- (A) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

() 7. 下列各式何者錯誤？

- (A) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
(C) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \div \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \div \sqrt{2} = \sqrt{2}$

() 8. 下列根式中，有幾個 $\sqrt{15}$ 的同類方根？

$$\boxed{\sqrt{180}、\sqrt{135}、\sqrt{1.08}、\sqrt{\frac{3}{5}}、\sqrt{\frac{125}{3}}、\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

() 9. 將 $(-\sqrt{1\frac{2}{3}}) \times \sqrt{\frac{8}{20}} \times \sqrt{1\frac{6}{9}} \div (-\sqrt{3\frac{1}{5}})$ 的結果化為最簡根式可得 $\frac{q}{p}\sqrt{n}$ ，則 $p+q+n$ 之值為何？

- (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20

() 10. 已知 $\sqrt{3} \div 1.732$ ，則 $\frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ 之值最接近下列哪一個數？

- (A) 25.124 (B) 23.124 (C) 21.124 (D) 20.124

() 11. 計算 $(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1-\sqrt{3}+\sqrt{5}) = ?$

- (A) $7+2\sqrt{15}$ (B) $3+2\sqrt{15}$
(C) $-3+2\sqrt{15}$ (D) $-7+2\sqrt{15}$

二、填充題：

1. 若 n 為正整數，且 $n < 5\sqrt{3} < n+1$ ，則 $n =$ _____。

2. 試比較 $\sqrt{7} + \sqrt{11}$, $\sqrt{5} + \sqrt{13}$, $\sqrt{3} + \sqrt{15}$ 三數的大小。答：_____。

3. 計算 $\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}} =$ _____。

4. 計算 $\sqrt{1\frac{2}{7}} \div 2\sqrt{\frac{3}{35}} =$ _____。

5. $3\sqrt{2} \div (2\sqrt{3}) \times \sqrt{27} - \frac{\sqrt{18}}{2} =$ _____ 【彰化和美 107】

6. $(-4\sqrt{35}) \times \sqrt{\frac{1}{7}} - 2\sqrt{5} =$ _____

7. $5\sqrt{30} \times (-\sqrt{\frac{1}{5}}) - 8\sqrt{6} =$ _____

三、資優挑戰題：

1.() $(2+\sqrt{5})^{2017} - 4(2+\sqrt{5})^{2016} - (2+\sqrt{5})^{2015}$ 的值為何？【台南特招 106】【☆☆】

(A) $-2\sqrt{5}(2+\sqrt{5})^{2015}$ (B) $-(2+\sqrt{5})^{2015}$ (C) 0 (D) $(2+\sqrt{5})^{2015}$ 【提示：結合律之後硬爆】

2.() 若 a 、 b 、 c 為三數，且 $a = \frac{\sqrt{19}}{0.5}$ 、 $b = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{0.5}}$ 、 $c = \frac{\sqrt{19}}{0.6}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係何者正確？

(A) $c > a > b$ (B) $b > a > c$ (C) $b > c > a$ (D) $a > c > b$ 【桃連特招 106】【☆】

3.() 若 x 為正整數， y 為負數，則 $|x+3| + |2y-3| - \sqrt{(2y-x)^2}$ 之值為何？【桃連特招 106】【☆】

(A) 0 (B) 3 (C) 6 (D) 9

4. (1) $\sqrt{122^2 - 72^2 - 50^2} =$ _____ 【新北板橋 109】【☆】

(2) $(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}) =$ _____ 【新北中正 108】【☆】

5. (1) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{12}{3-\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 【嘉義北興 109】

(2) () 若 $\frac{1}{2013\sqrt{2012}+2012\sqrt{2013}} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}$ ，求 $a-b = ?$ 【高雄正興 101】【☆】

(A)1 (B)-1 (C)4025 (D)-4025

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}\right) \times (\sqrt{5}+\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【彰化精誠 106】【☆】

(4) 小原在計算 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2019^2}+\frac{1}{2020^2}}$ 之值時苦無想法，老師提示他，每一

項都是 $(1+A)^2$ 的形式，則 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2019^2}+\frac{1}{2020^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$

【彰化精誠 109】【☆☆☆】【提示：通分後可湊完全平方式，然後變分項對消】

畢氏定理

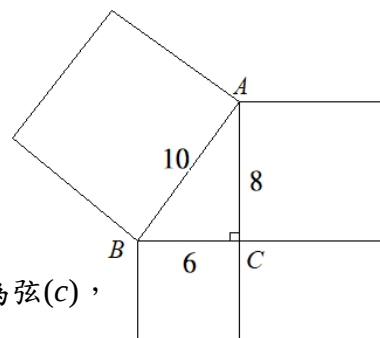
重點一、圖解畢氏定理

1. 觀察右圖三角形與正方形的關係，我們可以得知：

(1) 三個正方形面積是_____、_____、_____

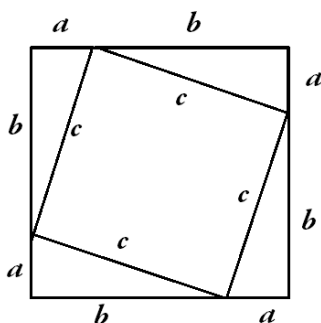
(2) 恰好三個正方形面積關係為：_____

(3) 任意的「_____」三角形中，短邊為勾(a)、長邊為股(b)、斜邊為弦(c)，且_____。這個規則，我們稱為勾股定理或畢氏定理。



2. 另外兩短邊的算法為： $a^2 = \text{_____}$ 或 $b^2 = \text{_____}$ 。

3. 畢氏定理的常用證明：

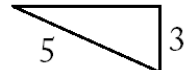
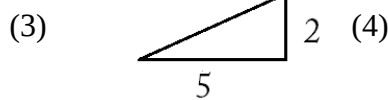
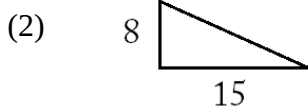
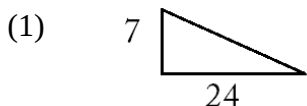


【思考】大正方形面積=4塊_____+_____

$$\rightarrow (\text{_____})^2 = 4 \times (\text{_____}) + c^2$$

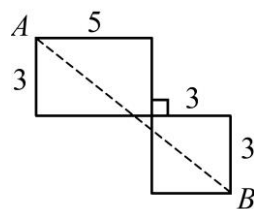
$\rightarrow$

例一、求第三邊

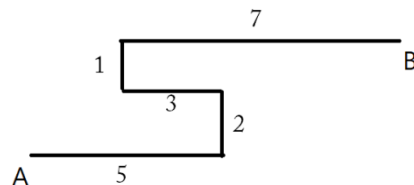


例二、求轉彎的距離

(1) 右圖由一個長方形和一個正方形組成， $\overline{AB} = \text{_____}$



(2) 如圖，每一個轉彎處皆為直角，請問 $\overline{AB} = \text{_____}$



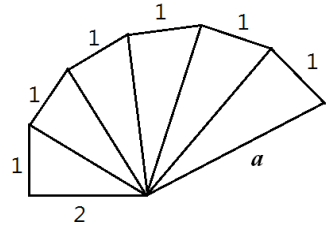
例三、常考陷阱

- () 下列何者不能做為直角三角形的三邊長？
 (A) 2.5、6、6.5 (B) 11、12、13 (C) 1 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ (D) 1 、 1 、 $\sqrt{2}$ 。
- () 下列何組數字能做為直角三角形的三邊長？
 (A) $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$ (B) 3^2 、 4^2 、 5^5 (C) 9、40、41 (D) 1 、 1 、 2 。
- 已知直角三角形的其中兩邊是 6 和 8，則第三邊邊長=_____

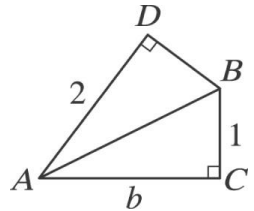
【關鍵：沒人規定第三邊一定是斜邊】

例四、疊合圖形

- 如右圖是由六個直角三角形拼成的海螺圖，計算圖中的 $a =$ _____

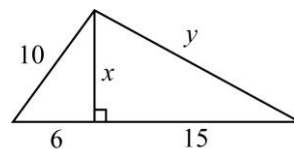
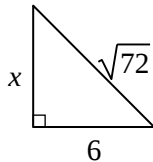
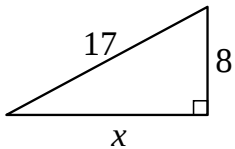


- 如右圖，在直角三角形 ABC 之斜邊 $\overline{AB}$ 上另作一直角三角形 ABD ，並以 $\overline{AB}$ 為斜邊，若 $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AD} = 2$ ，則 $\overline{BD} =$ _____

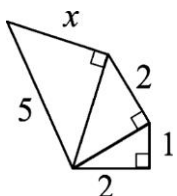


馬上練習

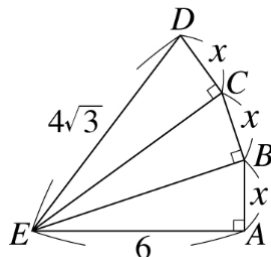
- $x =$ _____。
- $x =$ _____。
- $x =$ _____， $y =$ _____



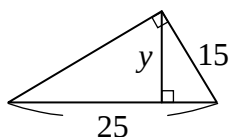
- $x =$ _____



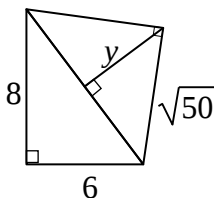
- $x =$ _____



進階一、斜邊上的高



(1) $y =$ _____

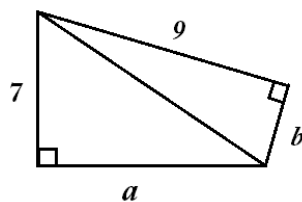


(2) $y =$ _____

進階二

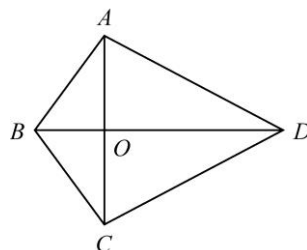
如右圖， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = 7$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CD} = b$ 、 $\overline{AD} = 9$ ， $(a+b)(a-b) =$ _____

【基測 95】



進階三

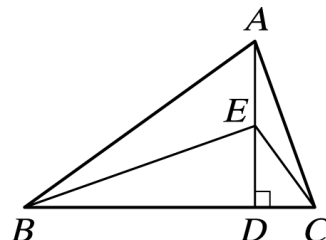
如右圖， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，且 $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{CD} = 7$ ，則 $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 =$ _____ 【新竹實驗104】



進階四

如圖，三角形 ABC 中，若 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， E 是 $\overline{AD}$ 上的任一點，已知 $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{CE} = 4$ 。

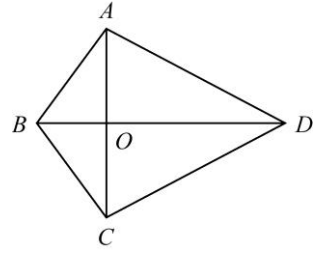
求 $\overline{AC}^2 + \overline{BE}^2 =$ _____ 【彰化精誠106】【☆】



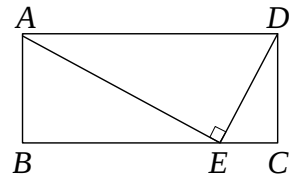
馬上練習

1. () 如右圖， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，且 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{CD} = 6$ ，則 $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = ?$

- (A) 10 (B) 13
(C) 25 (D) 52



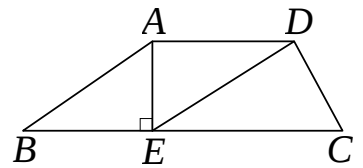
2. 如右圖，已知長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AE} = 15$ ， $\overline{AD} = 17$ ， $\angle AED = 90^\circ$ ，則矩形 $ABCD$ 的面積 = _____。



3. () 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， E 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 。

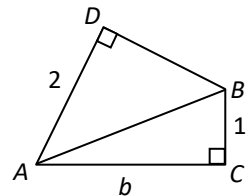
若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BE} = 8$ ， $\overline{DE} = 6\sqrt{3}$ ，則 $\overline{AD}$ 的長度為何？【會考 103】

- (A) 8 (B) 9 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $6\sqrt{3}$



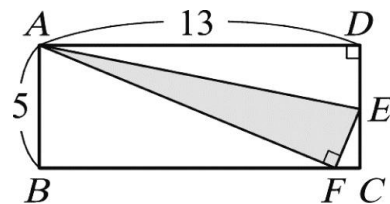
4. () 如圖，在直角三角形 ABC 的斜邊 $\overline{AB}$ 上另作一直角三角形 ABD ，並以 $\overline{AB}$ 為斜邊，若 $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AD} = 2$ ，則 $\overline{BD} = ?$ 【翰林進階】

- (A) $\sqrt{b^2 - 5}$ (B) $\sqrt{b^2 - 3}$
(C) $\sqrt{b^2 + 3}$ (D) $\sqrt{b^2 + 5}$



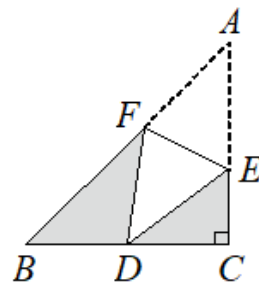
重點二、摺疊圖形與假設未知數

例一、如圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{AD} = 13$ ，今將 D 點摺疊至 $\overline{BC}$ 上的 F 點，則 $\overline{CE} = ?$

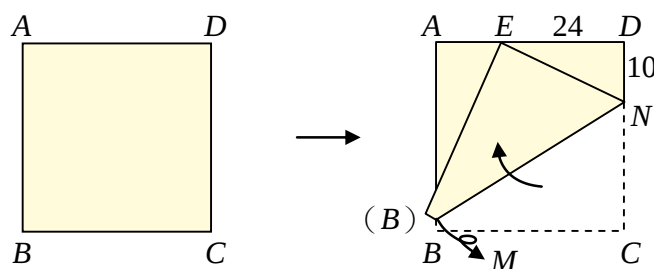


例二、如右圖，將一等腰直角三角形 ABC 的紙片摺疊，使得 A 點落於 $\overline{BC}$ 的中點 D 。

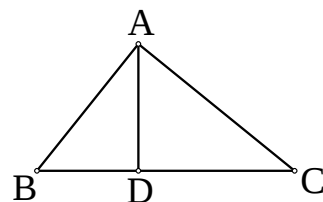
已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = \overline{BC} = 24$ ，則 $\overline{EC} = ?$



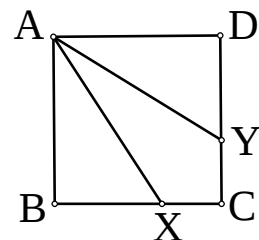
例三、如圖所示，將正方形 $ABCD$ 摺疊，使得 C 點落在 $\overline{AD}$ 上的 E 點處，且 $\overline{MN}$ 為摺痕， M 點在 $\overline{AB}$ 上， N 點在 $\overline{CD}$ 上。若 $\overline{DE} = 24$ ， $\overline{DN} = 10$ ，求此正方形 $ABCD$ 的邊長。



例四、已知 $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 16$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，則 $\overline{AD} = ?$

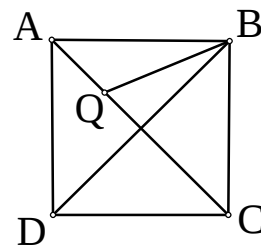


例五、如圖正方形 $ABCD$ 的邊長為 12， $\overline{AX}$ 與 $\overline{AY}$ 將此正方形面積分成三等分，則 $\overline{AY} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

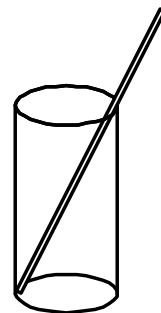


馬上練習

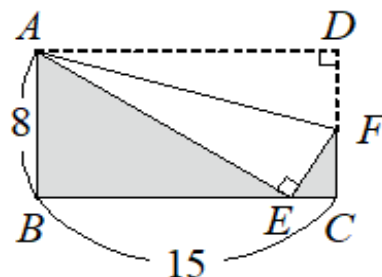
1. 如圖，設 Q 為正方形 $ABCD$ 對角線 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AQ} = 7$ ， $\overline{CQ} = 17$ ，則 $\overline{BQ} =$ _____。



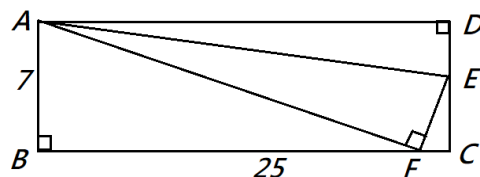
2. 有一圓柱形的玻璃杯，其半徑為 4 公分，高 15 公分，將一根長為 22 公分的攪拌棒斜放入杯中，則攪拌棒在杯子外的長度最短為多少公分？



3. 如右圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 15$ ，摺疊後使得 D 點落在 $\overline{BC}$ 上一點 E ，則 $\overline{EC} =$ ？



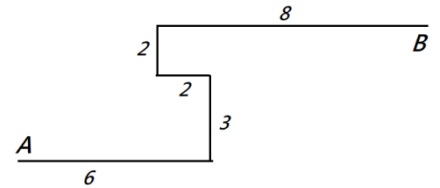
4. 如圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 7$ 公分， $\overline{BC} = 25$ 公分，今將其摺疊，使其頂點 D 點落在 $\overline{BC}$ 上之一點 F ，則 $\overline{EF} =$ _____ 公分。



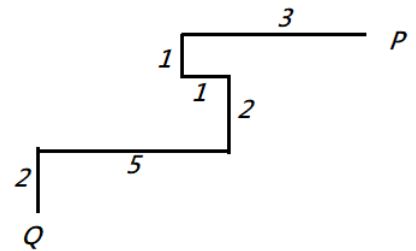
作業練習

(1) 甲、乙二人分別由 A 、 B 兩地出發，甲向東走 3 公里，再向南走 5 公里，到達 C 地；乙向南走 8 公里，再向西走 7 公里，也到達 C 地，則 A 、 B 兩地相距_____公里

(2) 如右圖，在一片平坦無障礙物的大草地上，大歐從 A 地向東走 6 公尺，再向北走 3 公尺，再向西走 2 公尺，再向北走 2 公尺，最後向東走 8 公尺到達 B 地，則 $\overline{AB}$ = _____



(3) 如右圖，一隻螞蟻從 P 點向西走 3 公分，再向南走 1 公分，再向東走 1 公分，再向南走 2 公分，再向西走 5 公分，最後再向南走 2 公分到達 Q 點，則 $\overline{PQ}$ = _____

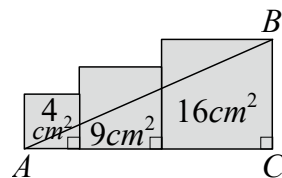


(4) () 已知一直角三角形，其中斜邊長為 26，則下列何者可能為其兩股長？
 (A) 10、13 (B) 10、12 (C) 20、24 (D) 10、24。

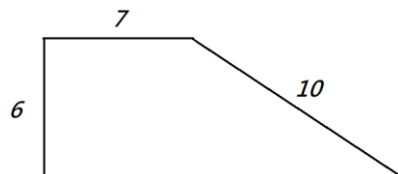
(5) () 已知直角三角形的其中兩邊為 9、12，則第三邊長度為 = _____

(6) () 直角三角形 ABC 的三邊關係為 $\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{DF}^2$ ，則哪個角是直角？
 (A) D (B) E (C) F (D) 無法判斷。

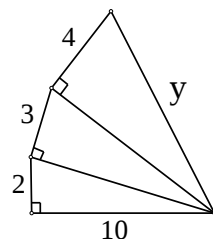
(7) 有三個正方形緊密排列如右圖所示，已知三正方形的面積分別為 4cm^2 、 9cm^2 、 16cm^2 ，則 $\overline{AB}$ 的長為_____cm。



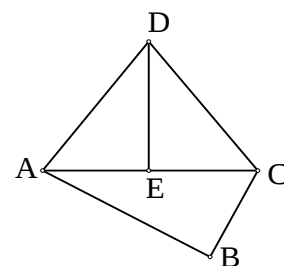
(8) 如右圖，此梯形的下底為_____。



(9) 假設一直角三角形的兩股分別為 y ， $\sqrt{15}y$ ，那麼它的斜邊=_____。

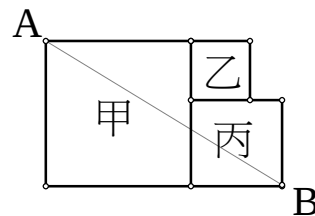


(10) 如右圖，試求圖中 y 的長度=_____。

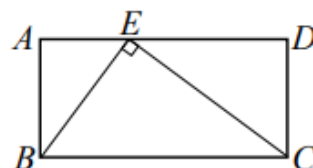


(11) 如圖， $\overline{AD}=10$ ， $\overline{AB}=12$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{DE}=8$ ， $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ， $\angle B=90^\circ$ ，則 $\overline{CD}$ = _____

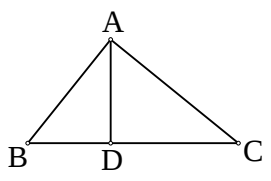
(12) 如圖，甲、乙、丙均為正方形，乙的周長為 12，丙的周長為 16，則 $\overline{AB}$ = _____



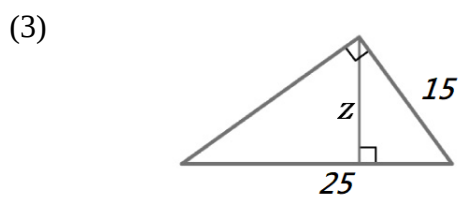
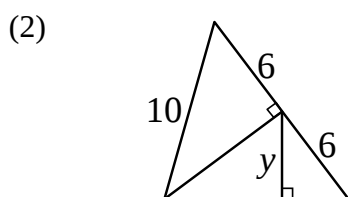
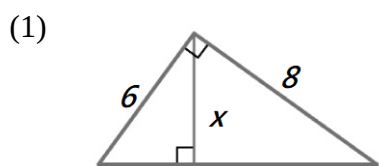
(13) 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， E 在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{BE} \perp \overline{CE}$ 。若 $\overline{BE}=6$ 公分， $\overline{CE}=8$ 公分，則長方形 $ABCD$ 的周長為_____公分。【新北板橋 109】



重點三、畢氏數的應用

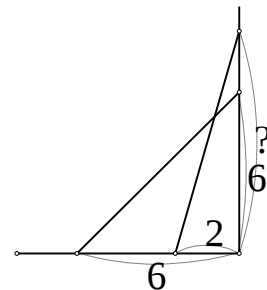
常見的畢氏數		直角三角形斜邊上的高：
3、4、5	1、1、 $\sqrt{2}$	 $\overline{AD} =$
6、8、10	1、 $\sqrt{3}$ 、2	
9、12、15	5、12、13	
12、16、20	7、24、25	
特質：	8、15、17	

例一、斜邊上的高



例二、旗桿問題與梯子問題

1. 于晏拍戲時拿一梯子在離牆 6 公尺處斜放在牆邊，此時梯子的頂端剛好也離地面 6 公尺(如圖所示)，今移動此梯使它在離牆 2 公尺處斜放，則梯頂離地面_____公尺。



2. 有一旗竿直立在地面上，有一條繩子至桿頭垂下。已知繩子比旗竿長 1 公尺，小暉把繩子往外拉 3 公尺後，繩子才會拉直，則旗竿的高度為_____公尺。

例三、座標問題

兩點距離公式：把兩點的位置連起來畫成_____形。

已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。

1. 直角坐標平面上有 $E(-3, 6)$ 、 $F(5, 6)$ 、 $G(3, -1)$ 、 $H(7, -1)$ 四點，則：

(1) $\overline{EF} =$ _____。 (2) $\overline{GH} =$ _____。

2. 直角坐標平面上有 $M(-3, 4)$ 、 $N(5, 4)$ 、 $P(-3, 1)$ 、 $Q(5, -2)$ 四點，則：

(1) $\overline{MP} =$ _____。 (2) $\overline{NQ} =$ _____。

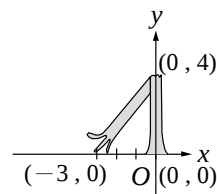
3. 直角坐標平面上有 $A(-3, -1)$ 、 $B(-5, 3)$ 、 $C(7, 4)$ 三點，則：

(1) $\overline{AB} =$ _____。 (2) $\overline{BC} =$ _____。 (3) $\overline{CA} =$ _____。

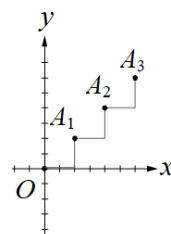
4. 已知直角坐標平面上有 $A(4, -3)$ 、 $B(3, 3)$ 、 $C(5, -1)$ 、 $D(-2, 4)$ 四點，則哪一點離原點最遠？

5. 直角坐標平面上有 $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(3, 4)$ 三點，則三角形 ABC 是否為等腰三角形？

6. 如右圖，有一樹經颱風吹折成兩段，若吹折處的坐標為 $(0, 4)$ ，著地處的坐標為 $(-3, 0)$ ，且單位長為 1 公尺，則此樹倒下著地的那一段長度為多少公尺？



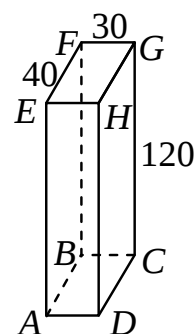
7. 如右圖，在坐標平面上有一隻小瓢蟲由原點出發，依序按向右、向上的方式移動，經過 1 分鐘後到達 A_1 ，2 分鐘後到達 A_2 ，...，12 分鐘後到達 A_{12} ，則 A_{12} 和 A_1 的距離為多少？



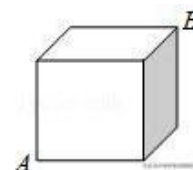
例四、箱子與最短距離

1. (1)有隻蜜蜂在右圖的長方體容器內飛行，蜜蜂從 A 點至 G 點的最短距離=_____

(2)有隻螞蟥在右圖的長方體表面爬行，螞蟥從 A 點至 G 點的最短距離=_____



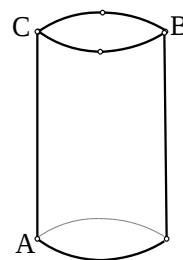
2.如圖，邊長為 1 的正方體中，小螞蟥從 A 點出發沿著正方體的外表面爬到 B 點的最短路程是_____。



3.有一圓柱體，底面的圓直徑 $\overline{CB}$ 為 2 cm，高 $\overline{AC}$ 為 π cm。

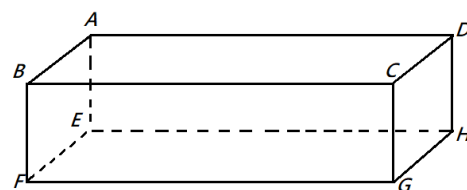
一蜜蜂從下底面的點 A 飛到上底面的點 B，則最短路徑距離=_____

有一螞蟥從下底面的點 A 走到上底面的點 B，則最短路徑長=_____



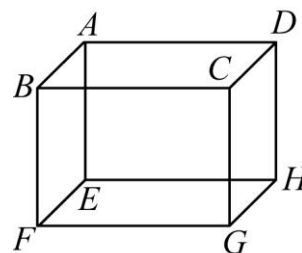
馬上練習

1. 圖中為一長方體盒子， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BF}=4$ ， $\overline{FG}=12$ ，求 $\overline{AG}$ =_____。



2. 圖四是一個長方體容器的示意圖，其中 $\overline{AB}=20$ 公分， $\overline{BF}=30$ 公分， $\overline{BC}=50$ 公分，阿裕老師想在長方體內放入一根木棒(不能超出長方體)，

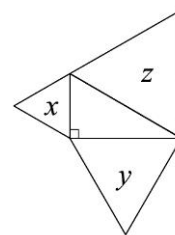
則可放入的木棒最長為_____公分。



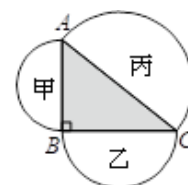
例五、直角三角形上的面積關係【名校常考變形觀念】

1. 如右圖，分別以直角三角形的三邊長向外做出正三角形，若這三個正三角形的面積分別為 x 、 y 、 z ，則 x 、 y 、 z 的關係為何？

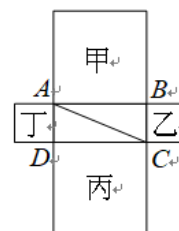
- (A) $x^2 + y^2 = z^2$ (B) $x + y > z$
(C) $x + y = z$ (D) $x + y < z$



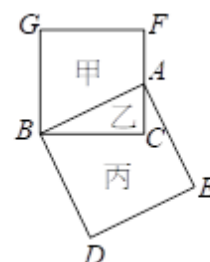
2. 如右圖，分別以直角 $\triangle ABC$ 的三個邊為直徑作半圓，若丙、乙的面積分別為 50 和 36 平方單位，則甲的面積為_____平方單位。



3. 如右圖， $ABCD$ 為一矩形，若 $\overline{BD} = 25$ ，則以矩形四邊為邊長，向外所作的正方形甲、乙、丙、丁的面積和為多少？



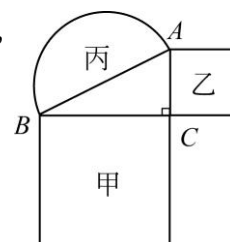
4. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，已知四邊形 $ABDE$ 和 $BCFG$ 皆為正方形，且甲、乙、丙三區域的面積分別為 124、36、140，則 $\overline{AC}$ 的長 = ？



馬上練習

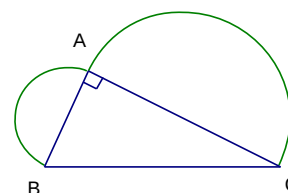
1. () 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，甲、乙均為正方形，丙為半圓，若丙面積為 50π ，則甲、乙的面積和是多少？

- (A) 50π (B) 50
(C) 400π (D) 400



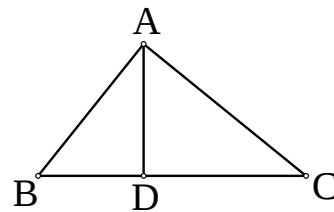
2. 如圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，各以 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為直徑畫半圓，

若 $\overline{BC} = 20$ ，則兩半圓面積和 = _____。【高雄民族 107】

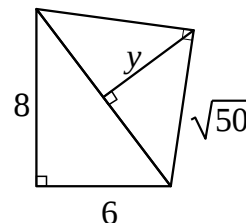


作業練習

1. 三角形 ABC 中，若 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{AB} = 3$ ，且 $\overline{AD}$ 為 $\triangle ABC$ 斜邊上的高，則 $\overline{BC} - \overline{AD} =$ _____。

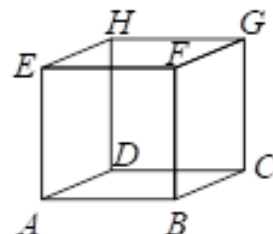


2. $y =$ _____。

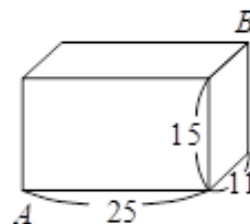


3. 有一隻螞蟻和一隻蜜蜂在邊為 2 的正方體紙盒裡，如右圖，則：

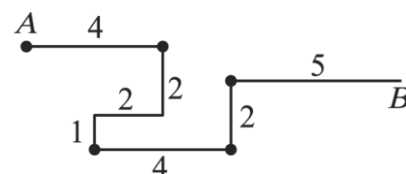
- (1) 此螞蟻沿著正方體的表面由 A 走到 G 的最短距離為多少？
 (2) 此蜜蜂從正方體的內部由 A 飛到 G 的最短距離為多少？



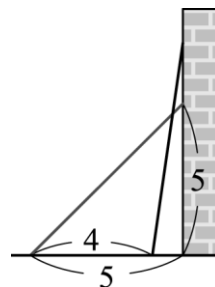
4. 右圖是長、寬、高分別為 25、11、15 的長方體，如果有一隻螞蟻只在長方體表面移動，則此螞蟻由 A 走到 B 的最短距離為多少？



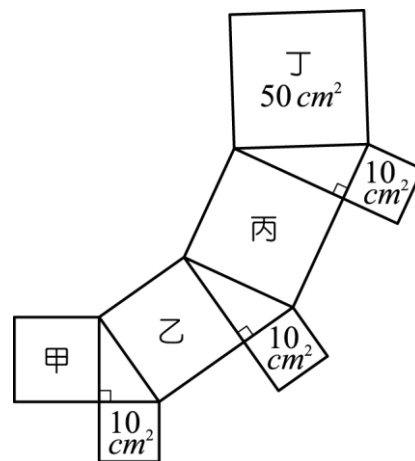
5. 有一個機器人，他只能直線前進或是轉角 90° ，附圖為此機器人從 A 點到 B 點的行走路徑，則 $\overline{AB} =$ 【 】。



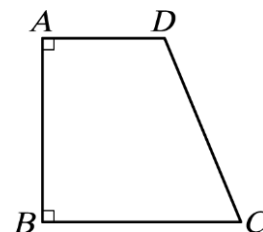
6. 如圖所示，有一木梯原本離牆 5 公尺斜放，梯頂剛好離地面 5 公尺，如今將木梯向內移動 4 公尺，則梯頂離地面【 】公尺。



7. ()如圖，圖中所有的三角形均為直角三角形，所有的四邊形均為正方形，若三個小正方形面積均為 10 cm^2 ，正方形丁面積為 50 cm^2 ，求正方形甲 + 正方形乙 + 正方形丙面積和為多少 cm^2 ？
(A) 210 (B) 150 (C) 90 (D) 70。



8. ()如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{CD} = 13$ ，求此梯形的周長為何？
(A) 44 (B) 46 (C) 48 (D) 52。



9. ()有一長度為 25 公分的梯子斜靠在牆上，從地面到梯頂的垂直高度為 24 公分，如果梯頂下滑 4 公分，則梯腳移動多少公分？ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8。

10. 已知一直角三角形的三邊長度為連續的偶數，則其面積為多少？
(A) 32 (B) 24 (C) 16 (D) 8。

作業練習

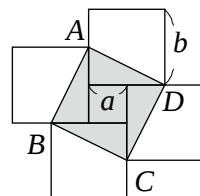
一、選擇題：

- () 1. 在直角三角形 ABC 中，若 $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ ，則下列哪個角為直角？
 (A) $\angle A$ (B) $\angle B$ (C) $\angle C$ (D) 無法判定

- () 2. 有一直角三角形，若其斜邊長為 6，一股長為 2，則另一股長為何？
 (A) $2\sqrt{10}$ (B) 4 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

- () 3. 將 1 個邊長為 a 的正方形，與 4 個邊長為 b 的正方形(其中 $b > a$)，拼成如右圖，其中 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$ 形成一個四邊形，則四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？

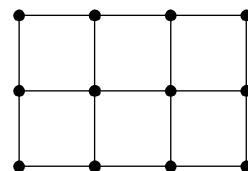
- (A) $b^2 + (b-a)^2$ (B) $b^2 + a^2$
 (C) $a^2 + 2ab$ (D) $(a+b)^2$



- () 4. 已知一直角三角形的兩股長分別為 6 公分、8 公分，則斜邊上的高是多少公分？
 (A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{24}{5}$ (C) 10 (D) $\frac{48}{5}$

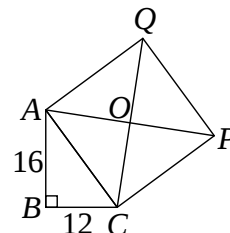
- () 5. 右圖的方格上有 12 個點，每個方格的邊長皆為 1，任兩點之間的距離有 1、2、 $\sqrt{2}$ ……，則下列哪個距離不可能存在？

- (A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{5}$
 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$



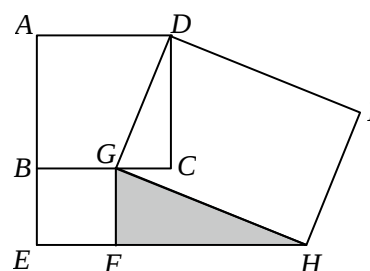
- () 6. 如右圖， $\angle ABC = 90^\circ$ ，以 $\overline{AC}$ 為邊長作正方形 $ACPQ$ ， O 為兩對角線交點，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\triangle AOQ$ 的面積為何？

- (A) 400 (B) 192
 (C) 100 (D) 96

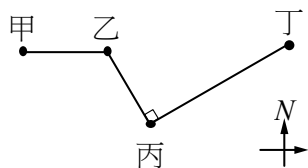


- () 7. 下圖為兩正方形 $ABCD$ 、 $BEFG$ 和矩形 $DGHI$ 的位置圖，其中 G 、 F 兩點分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{EH}$ 上。若 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BG} = 3$ ，則 $\triangle GFH$ 的面積為何？

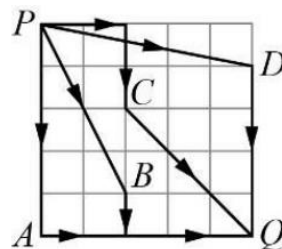
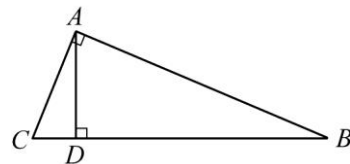
- (A) 10 (B) 11 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{45}{4}$ 【會考 104】



- () 8. 如圖，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可達丁地，則此車程需多少分鐘？【基測 94】 (A) 19.5 (B) 24 (C) 25 (D) 28



- () 9. 若一直角三角形的兩股長各為 4 公分及 5 公分，斜邊長為 a 公分，則下列敘述何者正確？
 (A) $5.5 < a < 6.0$ (B) $6.0 < a < 6.5$
 (C) $6.5 < a < 7.0$ (D) $7.0 < a < 7.5$
- () 10. 長方形 $ABCD$ 的兩對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於 O ，如果 $\overline{BO} = 5$ ， $\overline{AB} = 6$ ，則 $\overline{AD} = ?$
 (A) $3\sqrt{5}$ (B) $4\sqrt{2}$
 (C) 8 (D) 10
- () 11. 數線上相異兩點 $P(a)$ 、 $Q(b)$ ，若 $\overline{PQ} = a - b$ ，則下列敘述何者正確？
 (A) $a < b$ (B) $a \leq b$
 (C) $a > b$ (D) $a \geq b$
- () 12. 如圖，在三角形 ABC 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D ，則下列何者錯誤？
 (A) $\overline{BC} = 13$ (B) $\overline{AD} = \frac{5 \times 12}{13}$
 (C) $\overline{CD} = 4$ (D) $\overline{BD} = \frac{144}{13}$
- () 13. 下列哪一個選項可以作為直角三角形的三邊長？
 (A) $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$
 (C) 3^2 、 4^2 、 5^2 (D) $\frac{1}{12}$ 、 $\frac{1}{15}$ 、 $\frac{1}{20}$
- () 14. 已知直角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，則 $\overline{CA} = ?$ 【彰化精誠103】
 (A) $\sqrt{7}$ (B) 5 (C) 7 (D) 25。
- () 15. 下列各選項中的三個數，哪一個選項可為直角三角形的三邊長？【彰化精誠103】
 (A) $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$ (B) 3^2 、 4^2 、 5^2 (C) $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ (D) $1\frac{1}{2}$ 、 2 、 $2\frac{1}{2}$ 。
- () 16. 右圖是小欣的家 (P 點) 到立人國中 (Q 點) 的街道圖，共有 A、B、C、D 四條路徑，它是利用邊長均為 1 個單位長的正方形方格所設計的，則小欣從家裡走到學校的最短路徑是哪一條？【新北板橋 109】【☆】
 (A) A (B) B (C) C (D) D

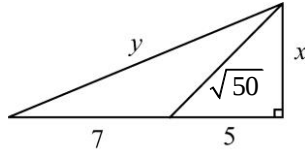


二、填充題：

1. 求下列各圖中 x 、 y 的值：

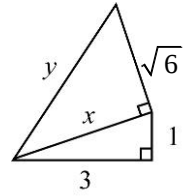
(1) $x =$ _____

$y =$ _____

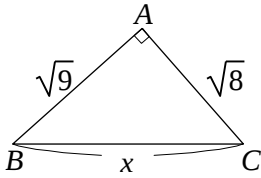


(2) $x =$ _____

$y =$ _____

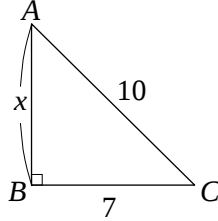


(3)



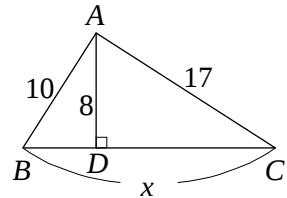
$x =$ _____

(4)



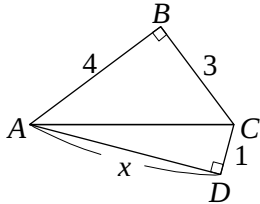
$x =$ _____

(5)



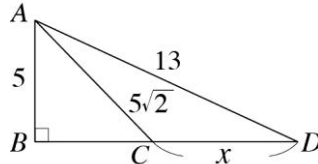
$x =$ _____

(6)



$x =$ _____

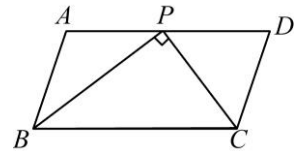
(7)



$x =$ _____

2. 已知直角三角形兩股長分別為 2 、 $\sqrt{5}$ ，則斜邊長為_____。

3. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， P 點在 $\overline{AD}$ 上， $\angle BPC = 90^\circ$ ，若 $\overline{PB} = 4$ ， $\overline{PC} = 3$ ，則平行四邊形 $ABCD$ 的面積為_____。

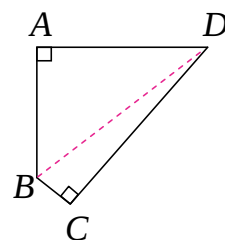


4. (1) 已知坐標平面上有 $A(-1, 3)$ 、 $B(-1, 18)$ 兩點，則 $\overline{AB} =$ _____。

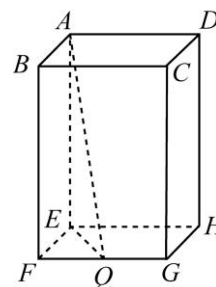
(2) 已知坐標平面上有 $C(0, 3)$ 、 $D(4, 0)$ 兩點，則 $\overline{CD} =$ _____。

三、計算題：

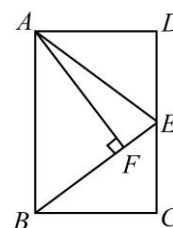
1. 如右圖，若 $\angle A$ 、 $\angle C$ 均為直角， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 2$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為何？



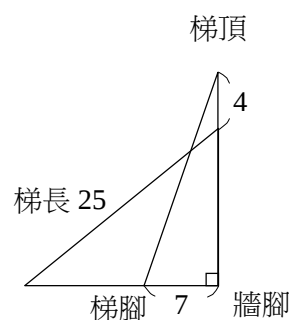
2. 右圖是一個長方體， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{BF} = 12$ ， Q 是 $\overline{FG}$ 的中點，求 $\overline{AQ} = ?$



3. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 8$ ， E 為 $\overline{DC}$ 的中點， $\overline{AF} \perp \overline{BE}$ ，求：
(1) 三角形 AEB 的面積 (2) $\overline{AF}$

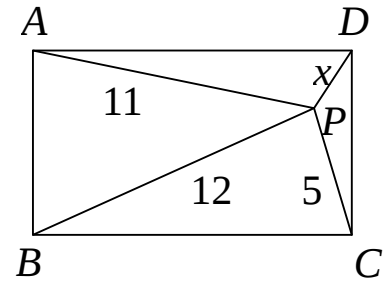


4. 將 25 公尺長的梯子靠在一垂直牆上，已知牆腳與梯腳距離為 7 公尺，若梯頂下滑了 4 公尺，則梯腳向外滑動了多少公尺？



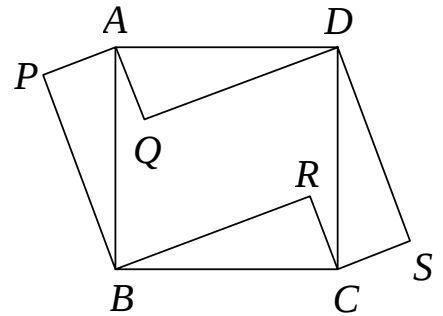
四、資優挑戰題：

1.如圖，在一矩形內選一點 P ，使得 $\overline{PA} = 11$ ， $\overline{PB} = 12$ ， $\overline{PC} = 5$ ，則 $\overline{PD} =$ _____。【☆】

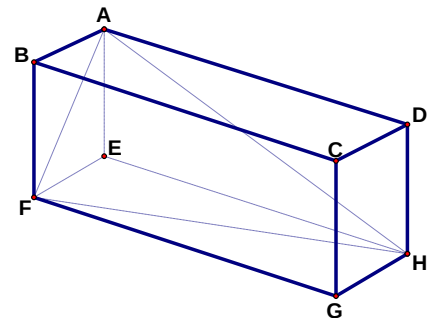


2.如圖， $ABCD$

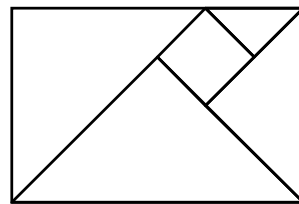
為正方形， $\triangle APB$ 、 $\triangle CRB$ 、 $\triangle CSD$ 、 $\triangle AQD$ 均為相同的直角三角形，而且二股長都是 5 和 12。則 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} =$ _____。【康軒 A++】【☆】



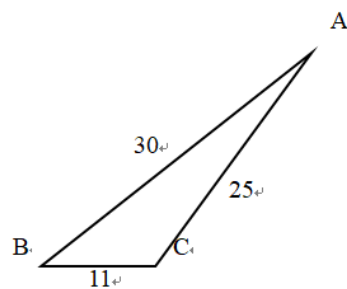
3.()如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，若 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AD} = 2\sqrt{15}$ ， $\overline{AE} = \sqrt{21}$ ，則 $\triangle AFH$ 的面積為何？(A) $12\sqrt{11}$ (B) $6\sqrt{11}$ (C) 20 (D) $\frac{45}{2}$ 。【彰化精誠103】【☆】



4.如右下圖，四個不同大小的等腰直角三角形和一個正方形拼成一個長方形。已知這個長方形的面積為 72 平方公分，求正方形之面積為_____平方公分。【高雄七賢、新北板橋、彰化福興】【☆】



5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 25$ ， $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{BC} = 11$ ，求 $\triangle ABC$ 面積=? 【高雄七賢 109】【☆】



6. 如下圖，長方形 $ABCD$ 的面積為 150 平方公尺，已知 $\overline{AP} = 4\sqrt{6}$ 公尺， $\overline{CD} = 5\sqrt{3}$ 公尺，若小宇從 P 點出發，沿著長方形的邊經過 D 點、 C 點，最後到達 B 點，則：【高雄七賢 108】【☆】

(1) $\overline{PD} = ?$

(2) 請問小宇共走了多少公尺？

