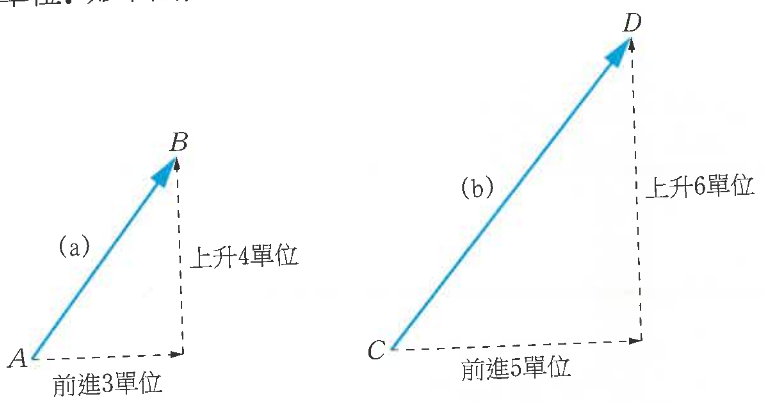
2-1 直線方程式及其圖形

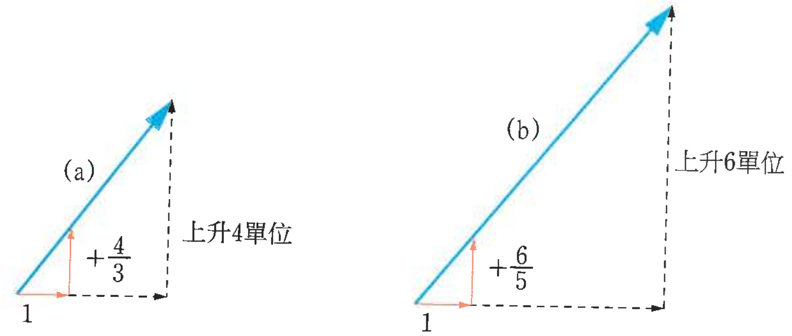
建築物出入口見到的無障礙坡道，通常考量使用者的需求，不會建得太“陡.”事實上，內政部規範無障礙坡道的坡度 (高度與水平長度的比值) 不得大於 $\frac{1}{12}$. 這個高度與水平長度的比值其實與直線“斜率”概念類似.

1 直線的斜率

想像一下有兩個坡道，在坡道 (a) 上由 A 移動至 B 時，水平方向前進 3 單位，垂直高度上升 4 單位. 而在坡道 (b) 上由 C 移動至 D 時，水平方向前進 5 單位，垂直高度上升 6 單位. 如下圖，哪一個坡道比較陡呢?



由於水平方向前進的距離不同，我們不能單看垂直高度上升的距離來決定哪一個比較陡. 比較好的方式是以水平方向前進相同的距離來比較垂直高度的變化，高度變化越多者越陡.

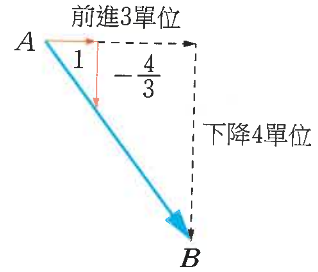


前進 1 單位，高度變化量 $+\frac{4}{3}$ 單位.

前進 1 單位，高度變化量 $+\frac{6}{5}$ 單位.

如上圖，由於 $\frac{4}{3}>\frac{6}{5}$，我們可以說坡道 (a) 較陡.

如果在下圖的坡道上由 A 移動至 B，為了區分上升或下降，水平方向前進 1 單位，就以垂直高度變化量為 $-\frac{4}{3}$ 表示 (負號表示下降).



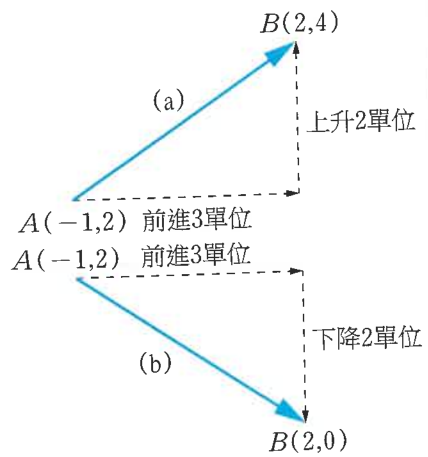
前進 1 單位，高度變化量 $-\frac{4}{3}$ 單位.

因此，**水平方向前進 1 單位，垂直高度的變化量** (正號表示上升，負號表示下降) 可以描述坡道的傾斜程度 (陡、緩) 與傾斜方向 (上升、下降).

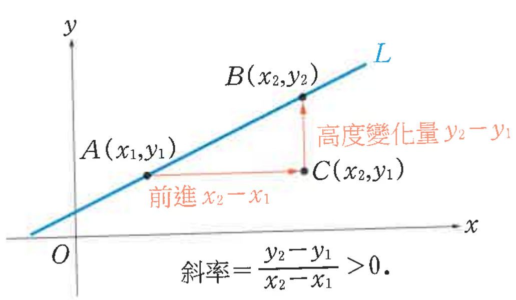
教學活動

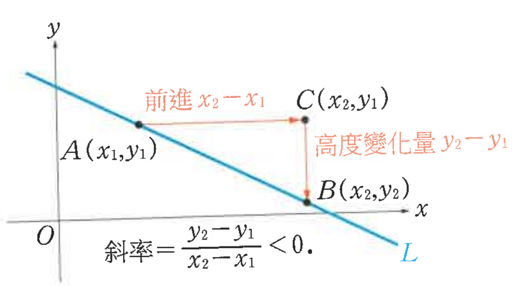
(1) 如圖 (a), 在坐標平面上由 A 直線移動至 B, 則水平方向向右前進 1 單位, 垂直高度的變化量為______單位.

(2) 如圖 (b), 在坐標平面上由 A 直線移動至 B, 則水平方向向右前進 1 單位, 垂直高度的變化量為______單位



如下圖, 在坐標平面上, 當直線 L 不是鉛直線, 我們將 L 視為一個坡道, 從其上一點 $A(x_1, y_1)$ 走到另一點 $B(x_2, y_2)$, 則水平方向前進 1 單位, 垂直高度的變化量為 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 此值稱為直線 L 的**斜率**, 如下圖所示.





根據三角形的相似性質可知, 垂直與水平方向變化量的比值 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 是一個定值, 不會因為 A, B 兩點的坐標不同而有差異. 另外, 即使當 $x_2<x_1$, 計算比值 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 與 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 兩者也是相同的.

例題 1

坐標平面上三點 $A(1, -3)$, $B(5, 1)$, $C(11, 4)$ 請問這三點在同一條直線上嗎?

解

若 A, B, C 三點在同一條直線上, 則 A, B 兩點所得的斜率 m_{AB}, 與 A, C 兩點所得的斜率 m_{AC} 必相同, 即 $m_{AB}=m_{AC}$.

又 $m_{AB}=\dfrac{1-(-3)}{5-1}=1$, $m_{AC}=\dfrac{4-(-3)}{11-1}=\dfrac{7}{10}$,

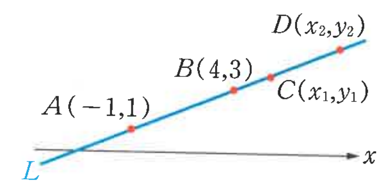
得 $m_{AB}\neq m_{AC}$, 故 A, B, C 三點不在同一直線上.

隨堂練習

如右圖, $A(-1, 1)$, $B(4, 3)$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ 四點在直線 L 上, 求:

(1) 直線 L 的斜率.

(2) $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的值.



注意到如果直線 L 是一條鉛直線, 則 $x_1=x_2$, 那麼 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的分母為 0. 因此, 我們規定**鉛直線沒有斜率**.

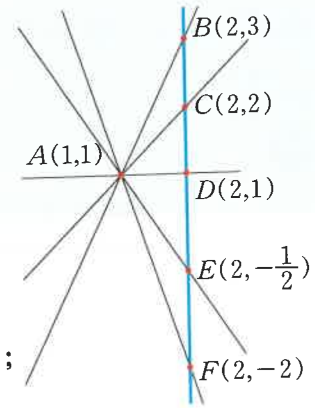
直線的斜率

(1) 直線 L 不是鉛直線, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 為 L 上相異兩點, 則 L 的斜率為 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

(2) 若直線 L 是鉛直線, 則規定沒有斜率.

例題 2

如右圖，鉛直線 $x=2$ 與其餘 5 條直線 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AF}$ 分別交於 B, C, D, E, F. 試求這 5 條直線的斜率並比較斜率大小.



解

由斜率定義可得

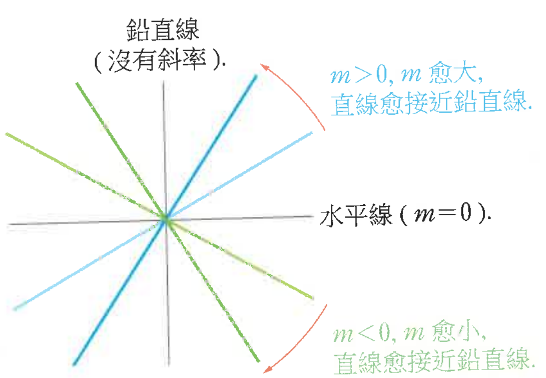
$\overleftrightarrow{AB}$ 斜率為 $m_{AB}=\dfrac{3-1}{2-1}=2$；$\overleftrightarrow{AC}$ 斜率為 $m_{AC}=\dfrac{2-1}{2-1}=1$；

$\overleftrightarrow{AD}$ 斜率為 $m_{AD}=\dfrac{1-1}{2-1}=0$ (水平線斜率為 0)；

$\overleftrightarrow{AE}$ 斜率為 $m_{AE}=\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{2-1}=-\dfrac{3}{2}$；$\overleftrightarrow{AF}$ 斜率為 $m_{AF}=\dfrac{-2-1}{2-1}=-3$,

因此 $m_{AB}>m_{AC}>m_{AD}=0>m_{AE}>m_{AF}$.

例題 2 中，當斜率為正值時，如 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ 斜率斜率分別為 2, 1, 此時 $\overleftrightarrow{AB}$ 比 $\overleftrightarrow{AC}$ 陡. 而當斜率為負值時，如 $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{AE}$ 斜率分別為 -3, $-\dfrac{3}{2}$，此時 $\overleftrightarrow{AF}$ 比 $\overleftrightarrow{AE}$ 陡. 而水平線 $\overleftrightarrow{AD}$ 斜率為 0. 總的來說，斜率絕對值越大，直線越接近鉛直線，如下圖所示.

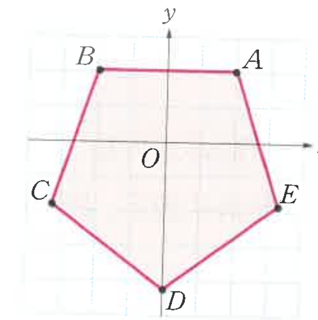


老師的話

斜率絕對值越大，直線越接近鉛直線 (越陡).

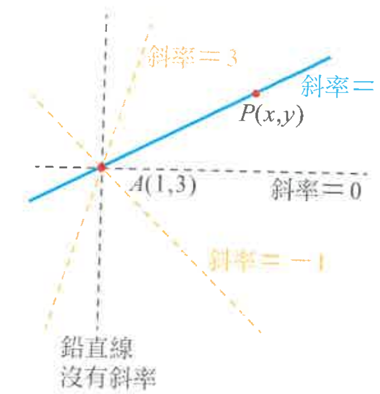
隨堂練習

右圖為一個正五邊形，且 $\overline{AB}$ 垂直 y 軸，比較各邊所在直線的斜率大小.

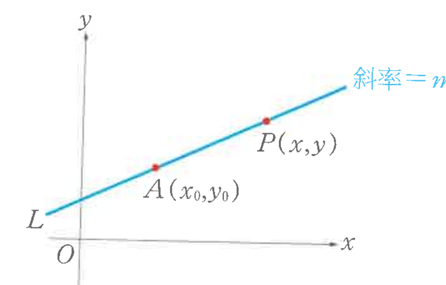


2　用點與斜率決定直線方程式

如右圖，坐標平面上，通過 $A(1, 3)$ 的直線有無限多條，但是斜率為 $\dfrac{1}{2}$ 的只有 1 條，那麼，該如何表示其方程式？若 $P(x, y)$ 是直線上的動點，因為斜率為 $\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{y-3}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，即 $y-3=\dfrac{1}{2}(x-1)$，直觀來看，此 x, y 的關係式即為所求直線方程式.



同理，右圖是通過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的唯一直線 L，$P(x, y)$ 是直線 L 上異於 A 的動點，因為 L 斜率為 m，所以 $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=m$，即 $P(x, y)$ 滿足方程式 $y-y_0=m(x-x_0)$，若 P 為 $A(x_0, y_0)$，亦滿足方程式.



反之，當 $P(x, y)$ 滿足方程式 $y-y_0=m(x-x_0)$. 如果 $x=x_0$，則 $y=y_0$，則 P 點就是 A 點 (x_0, y_0). 如果 $x\neq x_0$，則 $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=m$，這表示通過 P, A 兩點的直線斜率也是 m，但是通過點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線就是 L，因此 P 點在 L 上，所以 $y-y_0=m(x-x_0)$ 即為 L 的方程式，此式叫做直線 L 的**點斜式**.