② 根式的乘除運算

根式的乘法

動畫 根式的乘法

教學提醒①

此處不須再強調平方根的乘法是否滿足交換律等太理論性的結構問題，讓學生自然以數字的乘法去運算即可。

① 在本節溫故啟思（P.75）的問題❶中，計算可得

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6=\sqrt{36}=\sqrt{4\times9}$，

那麼前面問題中的 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 是否也會等於 $\sqrt{3\times2}$ 呢？

探索活動

根式的乘法

請利用科學型計算機計算 $(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2=$ <u>6</u> 。

科學型計算機

$\underbrace{\boxed{3}\to\boxed{\text{SHIFT}}\to\boxed{x^2}}_{\sqrt{3}}\to\boxed{\times}\to\underbrace{\boxed{2}\to\boxed{\text{SHIFT}}\to\boxed{x^2}}_{\sqrt{2}}\to\boxed{=}\to\boxed{x^2}$

教學提醒②

此探索的教學目的為「讓學生透過計算機的輔助，實際計算得到 $(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2$ 之值。教師在操作此探索活動時，如果學生按照操作完之後得到 6 的結果，再減去 6，可視學生程度講解計算機內建的演算法，會得到 -1.2×10^{-10} 而不是 0，這是由於計算機在算方根時取了近似值的緣故，也可藉此說明計算機的限制。

② 由探索活動可知 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ 是 6 的正平方根，而 6 的正平方根就是 $\sqrt{6}$，即 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}=\sqrt{3\times2}$。

一般而言，當 a，b 皆為正數或 0 時，

$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})(\sqrt{a}\times\sqrt{b})=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})(\sqrt{b}\times\sqrt{b})=a\times b=ab$，

即 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 是 ab 的正平方根，而 ab 的正平方根為 $\sqrt{ab}$，

所以可得 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{a\times b}$。

因此我們可知：

根式的乘法

若 $a\geq0$，$b\geq0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$。

因此在本節一開始（P.75）的問題中，依霖班上想要選擇的土地面積為 $\sqrt{6}$ 平方公尺。

例 2 根式的乘法

計算下列各根式：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{13}$　　(2) $-2\sqrt{3}\times3\sqrt{7}$

解

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{13}$
$=\sqrt{5\times13}$
$=\sqrt{65}$

(2) $-2\sqrt{3}\times3\sqrt{7}$
$=-2\times\sqrt{3}\times3\times\sqrt{7}$
$=(-2\times3)\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}$
$=-6\times\sqrt{21}$
$=-6\sqrt{21}$

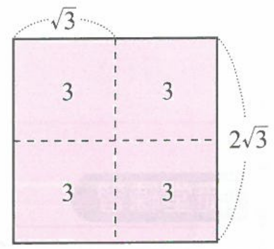
隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{11}$
$=\sqrt{2\times11}$
$=\sqrt{22}$

(2) $-3\sqrt{10}\times(-5\sqrt{3})$
$=(-3)\times(-5)\times\sqrt{10\times3}$
$=15\sqrt{30}$

如右圖，面積分別為 12 與 3 的兩個正方形，大正方形面積是小正方形面積的 4 倍，其邊長分別為 $\sqrt{12}$ 與 $\sqrt{3}$。由圖形來看，大正方形邊長應是小正方形邊長的 2 倍，但 $\sqrt{12}$ 會是 $\sqrt{3}$ 的 2 倍嗎？



類題演練 配合例題 2

計算下列各根式：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$　解▶ $\sqrt{14}$。

(2) $-3\sqrt{5}\times2\sqrt{11}$　解▶ $-6\sqrt{55}$。

(3) $-\sqrt{3}\times(-3\sqrt{7})$　解▶ $3\sqrt{21}$。

(4) $4\sqrt{13}\times\sqrt{13}$　解▶ 52。

一般來說，若一正整數 a 可分解成 $a=b^2\times c$，其中 b 是正整數，c 是正整數，且 c 的因數中沒有大於 1 的完全平方數，則 $\sqrt{a}=\sqrt{b^2\times c}=\sqrt{b^2}\times\sqrt{c}=b\sqrt{c}$，例如：$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3}$。

習慣上，我們常將 $\sqrt{a}$ 利用這種方式簡化為 $b\sqrt{c}$，這個過程稱為化簡根式，而 $b\sqrt{c}$ 稱為**平方根 $\sqrt{a}$ 的最簡式**或**最簡根式**，例如 $2\sqrt{3}$ 與 $2\sqrt{5}$ 都是最簡根式。因此，面積分別為 12 與 3 的正方形，其邊長的比值為 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$，此時若將兩邊長皆化簡為最簡根式，便可輕易看出其比值為 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$。

例 3　根式的化簡

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{125}$　　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{84}$

解

(1) $\sqrt{125}$
$=\sqrt{5^3}$
$=\sqrt{5^2}\times\sqrt{5}$
$=5\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{84}$
$=\sqrt{3\times(2^2\times 3\times 7)}$
$=\sqrt{2^2\times 3^2\times 7}$
$=\sqrt{(2\times 3)^2}\times\sqrt{7}$
$=6\sqrt{7}$

隨堂練習

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{8}$
$=\sqrt{2^3}$
$=\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}$
$=2\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{300}$
$=\sqrt{3\times 10^2}$
$=\sqrt{10^2}\times\sqrt{3}$
$=10\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{27}\times\sqrt{6}$
$=\sqrt{3^3\times 2\times 3}$
$=\sqrt{3^4\times 2}$
$=\sqrt{(3^2)^2}\times\sqrt{2}$
$=9\sqrt{2}$

類題演練　配合例題 3

將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{260}$　　(2) $\sqrt{78}\times\sqrt{13}$

解▶ $2\sqrt{65}$。　　解▶ $13\sqrt{6}$。

歷屆試題　基礎題

若 $\sqrt{44}=2\sqrt{a}$，$\sqrt{54}=3\sqrt{b}$，則 $a+b$ 之值為何？

(A) 13　(B) 17
(C) 24　(D) 40

解▶(B)。

《108.會考》通過率 82%

在例題 3 中，我們可以把 $\sqrt{125}$ 或 $\sqrt{84}$ 這類的根式化簡成最簡根式。除此之外，還有什麼樣的根式是還可化簡的呢？

如下列這三種情形：

① 根號內為正整數，且此正整數有質數平方的因數，例如：$\sqrt{12}$、$\sqrt{125}$。

② 根號內為小數或分數，例如：$\sqrt{0.3}$、$\sqrt{\dfrac{75}{4}}$。

③ 分母為根式，例如：$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$。

若要化簡像 $\sqrt{0.3}$、$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 這類的根式則需利用根式的除法來化簡為最簡根式。

① 教學提醒

根式化簡的目的是在計算過程中，進行同類項合併以簡化算式，因此先讓學生判斷哪些是需要化簡的根式。

根式的除法

動畫　根式的除法

我們知道 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$，那麼 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2\div 3}$ 呢？

因為 $(\sqrt{2}\div\sqrt{3})^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2=\dfrac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$，

所以 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}$ 是 $\dfrac{2}{3}$ 的正平方根，而 $\dfrac{2}{3}$ 的正平方根是 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，

亦即 $\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2\div 3}$。

因此我們可知：

根式的除法

若 $a\geq 0$，$b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{a\div b}$。