

表1、公開授課－觀察前會談紀錄表

共備人員	林金龍老師	任教年級	二、三	任教領域/科目	數學
授課教師	王淳妍老師	任教年級	三	任教領域/科目	數學
教學單元(含標題)	3-2 三角形的心				
觀察前會談(備課)日期及時間	110年12月15日(四) 15:15至16:00		地點	小會議室	
預定入班教學觀察/公開授課日期及時間	111年12月16日(五) 13:15至14:00		地點	美三1教室	

一、學習目標(含核心素養、學習表現與學習內容)：

(一)學習目標：

1. 認知：了解三角形的外心，可由中垂線性質得知；三角形的內心，可由角平分線性質得知；三角形的重心，可由中線性質得知。了解外心、內心和重心之概念後，可利用其觀念，加以應用與解題。
2. 技能：(1)能透過實際操作，摺出三角形三邊的中垂線、三個角的角平分線及三邊的中線(三邊的中點至三頂點連線)，皆交於一點，分別為三角形的外心、內心與重心。
(2)使九年級的學生在學習三角形的心，對於題型的演練，能應用三角形的外心、內心與重心的特性，能順利的求解。
3. 情意：(1)專注聆聽與思考。
(2)輪流發表與合作。

(二)學習表現：s-IV-11理解三角形重心、外心、內心的意義和其相關性質。

(三)學習內容：S-9-8三角形的外心：外心的意義與外接圓，三角形的外心到三角形的三個頂點等距離，直角三角形的外心即斜邊的中點。

S-9-9三角形的內心：內心的意義與內切圓，三角形的內心到三角形的三邊等距，三角形的面積=周長×內切圓半徑÷2，直角三角形的內切圓半徑=(兩股和-斜邊)÷2。

S-9-10三角形的重心：重心的意義與中線，三角形的三條中線將三角形面積六等分，重心到頂點的距離等於它到對邊中點的兩倍(重心的物理意義)。

(四)素養：

1. 數-J-A1 對於學習數學有信心和正向態度，能使用適當的數學語言進行溝通，並能將所學應用於日常生活中。
2. 數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。
3. 數-J-A3 具備識別現實生活問題和數學的關聯的能力，可從多元、彈性角度擬訂問題解決計畫，並能將問題解答轉化於真實世界。
4. 數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。

5. 數-J-B3具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養，並能在數學的推導中，享受數學之美。
6. 數-J-C1具備從證據討論與反思事情的態度，提出合理的論述，並能和其他人進行理性溝通與合作。

(五)議題融入：

認識文化的豐富與多樣性；養成尊重差異與追求實質平等的跨文化素養；維護多元文化價值。

二、學生經驗(含學生先備知識、起點行為、學生特性...等)：

- (一)此班學生有17人(美術班)，學生的數學能力屬中上、中等與中下程度。
- (二)學生已學會本章前一單元，能利用三角形全等、相似性質證明相關的幾何性質或問題。
- (三)學生期待本單元，藉由本單元一開始以日月潭向山遊客中心、伊達邵碼頭及水社碼頭為人潮的據點，利用遊艇到湖中施放煙火的情境，來引入三角形的外心(三據點即是三角形的頂點，施放煙火的中心，即是三角形的外心)。

三、教師教學預定流程與策略：

【準備活動】

一、課堂準備：

(一)教師：

配合課本內容，教師結合日常生活情境，引發學生思考，由淺入深講解後，馬上練習，檢驗答案，立即回饋。

(二)學生：

1. 攜帶課本、筆。
2. 按組別入座(共分四組)。

二、引起動機：**5分鐘**

- (一)教師以提問方式，引導學生進入日月潭風景管理處，以遊艇行駛到向山遊客中心、伊達邵碼頭及水社碼頭為人潮的據點，和學生討論三據點的多元化的自然人文、產業及結合紹族、台灣小吃、華人與西方美食特色等觀光資源，來吸引學生探討，進而導入三角形的外心地概念，以教學互動式，引起學生的學習動機。
- (二)再利用循序漸進之教學內容，依據學生學習的經驗，啟發學生思考與強化學習動力。

【發展活動】

一、教師利用課本說明三角形外心的定義。**15分鐘**

- (一)說明三角形的外心，是利用線段的中垂線性質解決問題。(P. 150)
- (二)在尋找三角形外心之前，讓學生先熟悉中垂線性質。利用課本附件11的三個三角形，以摺紙方式，討論探索活動一三角形的外心，並能回答問題。(P. 151)
- (三)1. 透過探索活動的摺紙操作，可知任意三角形三邊中垂線交於一點。教師再利用推理證明來說明為什麼它們會交於一點。讓學生更了解、其實三角形任意兩邊中垂線的交點，即為中垂線的交點。說明外心到三頂點的距離相等，以此為圓心 O ，到三頂點的距離為半徑，圓 O 稱為三角形的「外接圓」，三角形稱為圓 O 的「圓內接三角形」。 O 點為此三角形外接圓的圓心，所以將此點稱為三角形的「外心」。(P. 152)
2. 說明不論是銳角、直角或鈍角三角形都有外心，它可能會落在三角形得內部、邊上或

外部。(P. 152)

二、教師講解三角形外心的定義、特性與銳角、直角和鈍角三角形外心的位置。6分鐘

(一)三角形的外心的定義，再次強調說明：(P. 153)

1. 任意三角形三邊中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等。
2. 若以三角形的外心為圓心，外心到三頂點的距離為半徑畫圓，可畫出此三角形的外接圓。

(二)隨機抽取兩位學生上台演練並引導學生利用尺規做圖繪製隨堂練習第1題及第2題，其他學生在座位練習。(P. 153)

(三)公佈答案及討論。

三、教師講解直角三角形的外接圓半徑 5分鐘

(一)講解例題1，在直角三角形的計算上，常使用畢氏定理作為運算的工具。(P. 154)

(二)隨機抽取兩位學生上台演練隨堂練習第1題及第2題，其他學生在座位練習。

(三)公佈答案及討論。

四、教師講解等腰三角形的外接圓半徑。 8分鐘

(一)講解例題2，外接圓的半徑可利用圓形的內幕性質來解題。(P. 155)

(二)教師引導學生分組討論隨堂練習，並由學生分組發表，最後由教師總結，學生寫出完整答案。

(三)公佈答案及討論。

(四)回家作業：自我評量 P. 180 第1、2題及學習單一張。

【總結活動】

一、 建構思辨力 4分鐘

(一)使學生藉由數學課本內容，完成每一階段的例題及隨堂練習。發揮異質分組師徒制的訓練學生合作與思考，做到數學題型要多思考與多演練，就能熟能生巧並從課本中擷取重點的讀書好習慣。

(二)利用課本 P. 150 日月潭風景管理處，以遊艇行駛到向山遊客中心、伊達邵碼頭及水社碼頭為人潮的據點，和學生討論三據點的多元化的自然人文、產及結合紹族、台灣小吃、華人與西方美食特色等觀光資源的情境布題，激發學生學習興趣，以三據點為三角頂點的觀念，利用線段的中垂線性質，來呈現外心的定義、特性與銳角、直角和鈍角三角形外心的位置，教師再以適時的提問，加深印象是非常重要的。

(一)學生可經由課本例題與隨堂練習，進而可自行思考與完成課本單元習題、自我評量及學習單的練習。

二、進行小組團體歷程 2分鐘

向小組的每一位成員，表達感謝之意。期望藉由活動的討論、溝通與分享，能提升學生學習數學的動力和知情義兼顧的目標。

四、學生學習策略或方法：

小組合作學習、單元重點提示劃記，課本例題說明，隨堂練習演練與應用問題理解與思考，進而能應用外心的特性，在線段長度與角度的計算上，都能順利求解。

五、教學評量方式（請呼應學習目標，說明使用的評量方式）：

學習單、提問、發表、小組討論、作業。

六、回饋會談預定日期與地點：（建議於教學觀察後三天內完成會談為佳）

日期及時間：111年12月16日(五) 15：15 至16：00

地點：小會議室

表2、觀察紀錄表

回饋人員	林金龍老師	任教年級	二、三	任教領域/ 科目	數學	
授課教師	王淳妍老師	任教年級	三	任教領域/ 科目	數學	
教學單元	3-2 三角形的心	教學節次	共 16 節 本次教學為第 1 節			
公開授課 日期及時間	111年12月16日(五) 第1節13:15至14:00		地點	美三1教室		
層面	指標與檢核重點	事實摘要敘述 (可包含教師教學行為、 學生學習表現、師生互動 與學生同儕互動之情形)			評量(請勾選)	
		優良	滿意	待成長		
A 課程 設計 與 教學	A-2掌握教材內容，實施教學活動，促進學生學習。		√			
	A-2-1有效連結學生的新舊知能或生活經驗，引發與維持學生學習動機。	(請文字敘述，至少條列三項具體事實摘要並對應三個檢核重點)				
	A-2-2 清晰呈現教材內容，協助學生習得重要概念、原則或技能。	A-2-1利用課本插圖動畫短片引發學生學習解方程式的動機。				
	A-2-3 提供適當的練習或活動，以理解或熟練學習內容。	A-2-2在黑板上逐步列出解題步驟，讓學生可以了解觀念及要領。				
	A-2-4 完成每個學習活動後，適時歸納或總結學習重點。	A-2-3課前讓學生分小組就坐，並於課堂講解後指定學生演練課本隨堂練習題目，實施小組討論。				
	A-3運用適切教學策略與溝通技巧，幫助學生學習。		√			
	A-3-1 運用適切的教學方法，引導學生思考、討論或實作。	(請文字敘述，至少條列二項具體事實摘要並對應二個檢核重點)				
	A-3-2 教學活動中融入學習策略的指導。	A-3-1利用講解及示範解題建立學生解題觀念。				
	A-3-3 運用口語、非口語、教室走動等溝通技巧，幫助學生學習。	A-3-2指導學生三角形三邊的中垂線交於一點，外心到三頂點的距離相等，且說明銳角、直角和鈍角三角形的外心位置，以利解題，並口語互動式詢問下一步該怎麼做？				
	A-4運用多元評量方式評估學生能力，提供學習回饋並調整教學。		√			
A-4-1運用多元評量方式，評估學生學習成效。	(請文字敘述，至少條列三項具體事實摘要並對應三個檢核重點)					
A-4-2 分析評量結果，適時提供學生適切的學習回饋。	A-4-1運用口頭問答、上台演練進行評量。					

A-4-3根據評量結果，調整教學。	A-4-2評量後針對多數學生類似的解題錯誤觀念進行再次的說明及示範。
A-4-4 運用評量結果，規劃實施充實或補強性課程。(選用)	A-4-3根據評量結果，若某小組有較多人不懂時，以小組解說示範方式進行教學。

表3、教學觀察/公開授課－觀察後回饋會談紀錄表

回饋人員	林金龍老師	任教年級	二、三	任教領域/科目	數學
授課教師	王淳妍老師	任教年級	三	任教領域/科目	數學
教學單元	3-2 三角形的心	教學節次	共 16 節 本次教學為第 1 節		
回饋會談日期及時間	111年12月16日(五) 15:15至16:00	地點	小會議室		
請依據教學觀察工具之紀錄分析內容，與授課教師討論後填寫：					
<p>一、教與學之優點及特色（含教師教學行為、學生學習表現、師生互動與學生同儕互動之情形）：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 利用板書清楚呈現講解範例，圖形畫得很完美。 2. 運用小組方式讓學生可以相互討論，互相學習。 3. 隨機抽點學生上台演練，卡住時能讓同一小組同學上台支援。 4. 老師能下來巡視各組同學練習情形，適時個別指導。 					
<p>二、教與學待調整或精進之處（含教師教學行為、學生學習表現、師生互動與學生同儕互動之情形）：</p> <p>某位學生比較快完成練習，趁老師巡視空隙及講解黑板上同學演練情形時，一心二用，寫別科講義，可以預留一些題目讓同學可以，額外練習加分，或是指導學生可以幫忙組內還沒學會的同學，小組可以加分。</p>					
<p>三、回饋人員的學習與收穫：</p> <p>當觀課人員，讓我有更多視角觀察老師的教跟學生的學，在<u>淳妍</u>老師的課堂中，老師講解範例、請學生討論、老師走動巡視、學生上台書寫發表，老師適時的提出問題引導學生，小組中同學的互相支援，展現從容有效率及訓練有素，讓我獲益良多。</p>					

附件-觀課照片(兩張)



照片說明：教師講解 P. 154 例 1 後，於黑板上提示隨堂練習，引導學生思考與解題。



照片說明：經教師引導後，學生實作 P. 154 隨堂練習第 1 題和第 2 題。

3-2 三角形的外心、內心與重心

	外心	內心	重心
圖形			
定義	△邊的 <u>中垂線</u> 交於一點，此交點稱為外心。	△內的角 <u>角平分線</u> 交於一點，此交點稱為內心。	△的 <u>三條中線</u> 交於一點，此交點稱為重心。
特性	外心到 <u>三頂點</u> 等距離	△的 <u>三邊</u> 等距離	重心到 <u>頂點</u> 的距離等於重心到 <u>中點</u> 的 <u>2</u> 倍
延伸性質	<p>1. 外心的位置</p> <p>銳角三角形：在<u>線內</u></p> <p>直角三角形：在<u>△</u></p> <p>鈍角三角形：在<u>最長邊的<u>外</u>面</u></p>	<p>1. $\triangle AIB : \triangle BIC : \triangle CIA = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$</p> <p>2. 內切圓半徑$r$、周長(s)與面積的關係</p> <p><u>面積 = $\frac{1}{2}rs$</u></p>	<p>1. 重心到三頂點與重心到三邊中點的長度比</p> <p><u>$\overline{AG} = \overline{GD} = 2 : 1$</u></p>
	<p>2. 角度(用外接圓推)</p> <p>★若$\angle A$為銳角 則$\angle BOC = 160^\circ$</p>	<p>3. 直角△內切圓半徑算法</p> <p><u>$r = \frac{\text{兩股和} - \text{斜邊}}{2}$</u></p>	<p>2. 三角形的重心與面積</p> <p>(1) <u>$\triangle ABD = \triangle ACD = \frac{1}{2} \triangle ABC$</u></p> <p>(2) <u>$\triangle ABG = \triangle BGC = \triangle AGC = \frac{1}{3} \triangle ABC$</u></p> <p>(3) <u>$\triangle AGF = \triangle BGF = \triangle BGD = \triangle CGD = \triangle CGE = \triangle AGE = \frac{1}{6} \triangle ABC$</u></p>
	<p>★若$\angle A$為鈍角 則$\angle BOC = 360 - 2\angle A$</p>	<p>4. 角度</p> <p><u>$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$</u></p>	

3-2 三角形的心—外心(學習單)

日月潭風景管理處計畫以遊艇行駛到湖中施放煙火。若以向山遊客中心 (A 點)、伊達邵碼頭 (B 點) 及水社碼頭 (C 點) 為人潮的據點，且這三個地方的民眾看到煙火的距離都一樣。



多元文化教育議題融入數學領域

日月潭位在台灣中部的南投縣，於民國八十九年一月正式升格為「日月潭國家風景區」，以日月潭中的山水美景及邵族文化特色為主題，打造成國際級的度假勝地。日月潭是全台灣最大的天然內陸湖泊，海拔高度七百六十公尺，周圍層層山巒環繞，湖面碧波粼粼，晨曦與夕陽景致更是迷人，壯麗景色美不勝收，「雙潭秋月」更為台灣早期的八景之一。現今還可乘坐遊艇環遊湖中，潭裡更蘊藏多種美味的鮮魚，日月潭國家風景區也不定期舉辦各項觀光活動，增添多元化的觀光資源。「**2022 日月潭花火音樂嘉年華**」的活動日期是 10/07 (五) ~ 11/19 (六)，活動內容豐富有花火音樂會、路跑、自行車、婚禮、紅茶文化等。

向山遊客中心展場包含「悠遊水沙連-產業館」、「日昇月恆-藝廊」、「潭情日月-自然人文館」及「多媒體影音播放室」，分別展出當地的產業、工藝和旅遊資源，其中「產業館」網羅了大日月潭地區的陶藝、紙藝、工藝、酒類、紅茶及農特產等特色產業，並提供產業資訊；「藝廊」以潭區附近工藝名家作品展為主題；「自然人文館」以影音導覽認識日月潭自然人文與歷史。

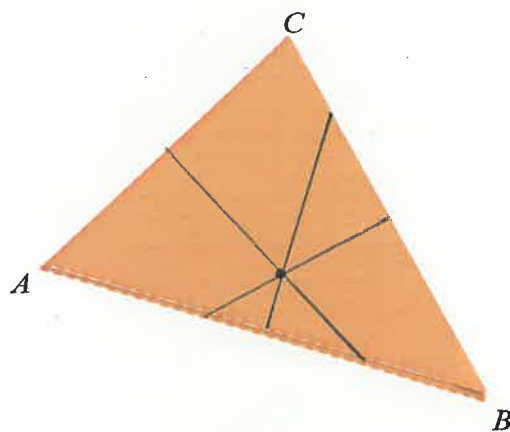
水社碼頭和伊達邵碼頭有多元文化的美食，含邵族風味餐、臺灣小吃、華人合菜及西方異國美食等。

【探索活動】三角形的外心

請同學將附件的三個三角形裁好，以摺紙方式回答下列問題：

- 1.(1)依課本 P.150 銳角三角形 ABC 中，
A 點為向山遊客中心，B 點為伊達
邵碼頭及 C 點是水社碼頭，分別摺
出 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中垂線，再將此
三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的
直線，觀察此三線是否交於一點？

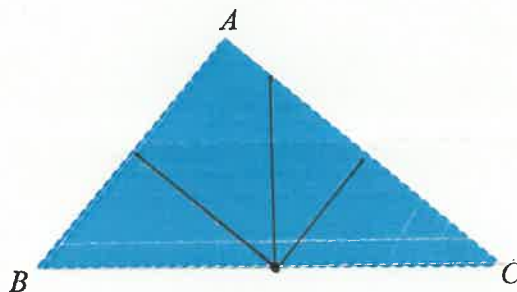
是



- (2)依中垂線性質：線段的中垂線上任
一點，到此線段的兩端點等距。
即三條中垂線交於 O 點，此 O 點
稱為外心，外心到三頂點的距離相
等。請同學觀察此 O 點是否為施放
煙火的地點？

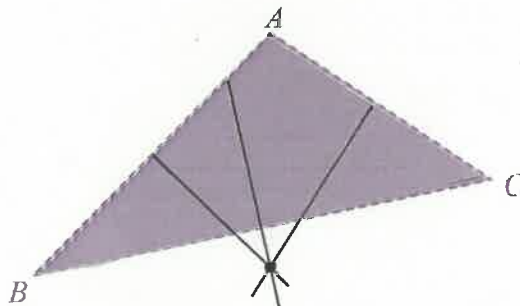
2. 分別摺出直角三角形 ABC 中， $\angle A$
是直角。 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中垂線，
再將此三角形貼在右圖中，並畫出
摺痕的直線，觀察此三線是否交於
一點？

是



3. 分別摺出鈍角三角形 ABC 中， \overline{AB} 、
 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中垂線，再將此三角形
貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀
察此三線是否交於一點？

是



4. 在上面的三個圖中，假設三條中垂線
交於 O 點，以 O 為圓心， \overline{OA} 為半
徑畫圓，則此圓是否會通過 B、C 兩
點？

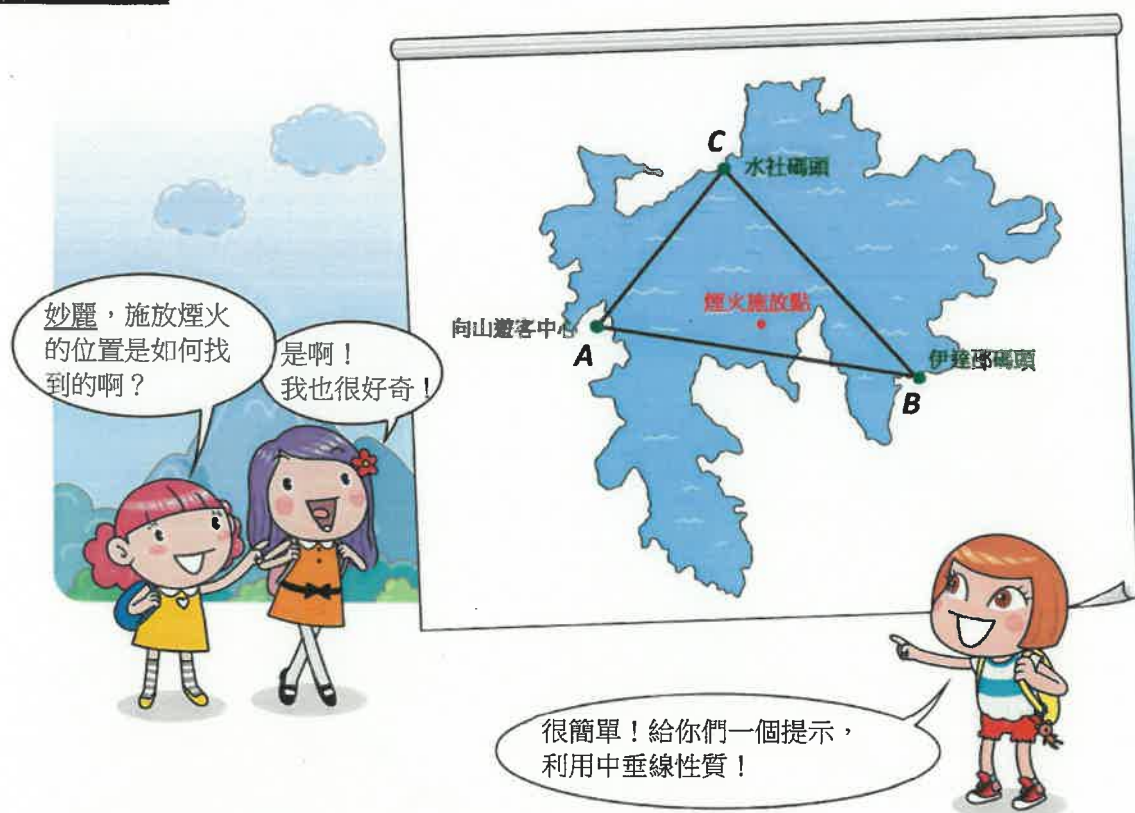
是

3-2 三角形的外心、內心與重心

	外心	內心	重心
圖形			
定義	三角形 <u>三邊的中垂線</u> 交於一點，此交點稱為外心。	三角形 <u>三角的角平分線</u> 交於一點，此交點稱為內心。	三角形 <u>三內角的三條中線</u> 交於一點，此交點稱為重心。
特性	外心到 <u>三頂點</u> 等距離	內心到 <u>△三邊</u> 等距離	重心到 <u>頂點</u> 的距離等於重心到 <u>中點</u> 的 <u>2</u> 倍
延伸性質	<p>1. 外心的位置</p> <p>銳角三角形：在 <u>三角形內部</u></p> <p>直角三角形：在 <u>三角形的斜邊中點</u></p> <p>鈍角三角形：在 <u>三角形外部</u></p>	<p>1. $\triangle AIB : \triangle BIC : \triangle CIA = AB : BC : AC$</p> <p>2. 內切圓半徑 r、周長 (s) 與面積的關係</p> <p>$\triangle \text{面積} = \frac{1}{2}rs$</p>	<p>1. 重心到三頂點與重心到三邊中點的長度比</p> <p>$AG : GD = 2 : 1$</p>
	<p>2. 角度(用外接圓推)</p> <p>★若 $\angle A$ 為銳角 則 $\angle BOC = 160^\circ$</p>	<p>3. 直角△內切圓半徑算法</p> <p>$r = \text{兩股合}-\text{斜邊}$</p>	<p>2. 三角形的重心與面積</p> <p>(1) $\triangle ABD = \triangle ACD = \frac{1}{2} \triangle ABC$</p> <p>(2) $\triangle ABG = \triangle BCG = \triangle ACG = \frac{1}{3} \triangle ABC$</p> <p>(3) $\triangle GAF = \triangle GBF = \triangle GBD = \triangle GCD = \triangle GCE = \triangle GEA = \frac{1}{6} \triangle ABC$</p>
	<p>★若 $\angle A$ 為鈍角 則 $\angle BOC = 360^\circ - 2\angle A$</p>	<p>4. 角度</p> <p>$\angle BIC = 90 + \frac{1}{2}\angle A$</p>	

3-2 三角形的心—外心(學習單)

日月潭風景管理處計畫以遊艇行駛到湖中施放煙火。若以向山遊客中心 (A 點)、伊達邵碼頭 (B 點) 及水社碼頭 (C 點) 為人潮的據點，且這三個地方的民眾看到煙火的距離都一樣。



多元文化教育議題融入數學領域

日月潭位在台灣中部的南投縣，於民國八十九年一月正式升格為「日月潭國家風景區」，以日月潭中的山水美景及邵族文化特色為主題，打造成國際級的度假勝地。日月潭是全台灣最大的天然內陸湖泊，海拔高度七百六十公尺，周圍層層山巒環繞，湖面碧波粼粼，晨曦與夕陽景致更是迷人，壯麗景色美不勝收，「雙潭秋月」更為台灣早期的八景之一。現今還可乘坐遊艇環遊湖中，潭裡更蘊藏多種美味的鮮魚，日月潭國家風景區也不定期舉辦各項觀光活動，增添多元化的觀光資源。「**2022 日月潭花火音樂嘉年華**」的活動日期是 10/07 (五) ~ 11/19 (六)，活動內容豐富有花火音樂會、路跑、自行車、婚禮、紅茶文化等。

向山遊客中心展場包含「悠遊水沙連-產業館」、「日昇月恆-藝廊」、「潭情日月-自然人文館」及「多媒體影音播放室」，分別展出當地的產業、工藝和旅遊資源，其中「產業館」網羅了大日月潭地區的陶藝、紙藝、工藝、酒類、紅茶及農特產等特色產業，並提供產業資訊；「藝廊」以潭區附近工藝名家作品展為主題；「自然人文館」以影音導覽認識日月潭自然人文與歷史。

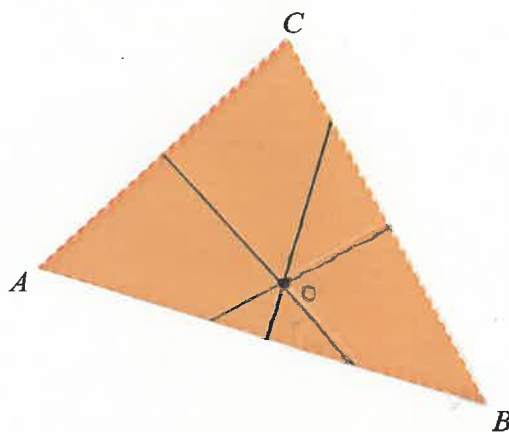
水社碼頭和伊達邵碼頭有多元文化的美食，含邵族風味餐、臺灣小吃、華人合菜及西方異國美食等。

【探索活動】三角形的外心

請同學將附件的三個三角形裁好，以摺紙方式回答下列問題：

1. (1) 依課本 P.150 銳角三角形 ABC 中，

A 點為向山遊客中心，B 點為伊達碼頭及 C 點是水社碼頭，分別摺出 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中垂線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？ *Yes*

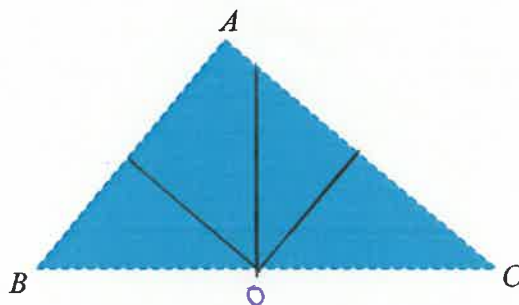


(2) 依中垂線性質：線段的中垂線上任

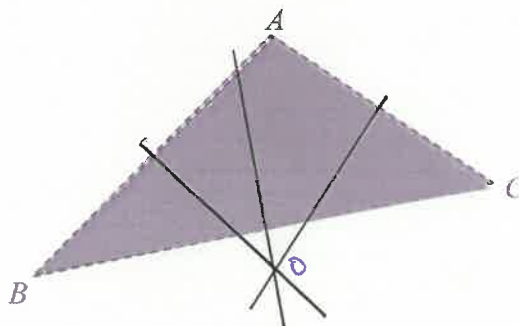
一點，到此線段的兩端點等距。

即三條中垂線交於 O 點，此 O 點稱為外心，外心到三頂點的距離相等。請同學觀察此 O 點是否為施放煙火的地點？ *Yes*

2. 分別摺出直角三角形 ABC 中， $\angle A$ 是直角。 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中垂線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？ *Yes*



3. 分別摺出鈍角三角形 ABC 中， \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的中垂線，再將此三角形貼在右圖中，並畫出摺痕的直線，觀察此三線是否交於一點？ *Yes*



4. 在上面的三個圖中，假設三條中垂線交於 O 點，以 O 為圓心， \overline{OA} 為半徑畫圓，則此圓是否會通過 B、C 兩點？ *Yes*