3-2 基本尺規作圖

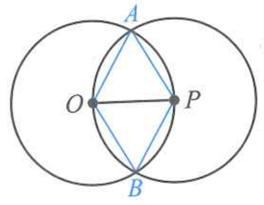
❶ 等線段作圖　❷ 等角作圖　❸ 中垂線作圖　❹ 角平分線作圖

檢測概念

1. 操作尺規工具。
2. 等圓的半徑相等。
3. 正三角形與菱形的判別。

溫故啟思

如右圖，已知圓 O 的圓心為 O 點，半徑為 $\overline{OP}$；圓 P 的圓心為 P 點，半徑亦為 $\overline{OP}$。若兩圓的交點為 A、B，今連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{PA}$、$\overline{PB}$，則：



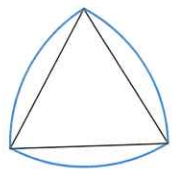
(1) $\overline{OA}$ ＿＝＿ $\overline{OB}$。(填入＞、＝或＜)

(2) $\overline{OA}$ ＿＝＿ $\overline{PA}$。(填入＞、＝或＜)

(3) △AOP 是　☑正三角形　□不等邊三角形。

(4) 四邊形 $AOBP$ 是　□正方形　☑菱形。

❶ 等線段作圖



在數學上，當直尺不使用其刻度，而是只用來繪畫通過兩點的直線或線段，圓規只用來繪畫以某點為圓心，某一線段長為半徑的圓或圓弧，在這種條件下的作圖方式，我們稱為**尺規作圖**。

如今的設計圖稿雖多已採用繪圖軟體處理，但其中很多設計構想仍源自於基礎的尺規作圖概念。例如標榜獨特外型足以徹底清除角落灰塵的掃地機器人，其設計靈感便是來自三段圓弧構成的「勒洛三角形」。

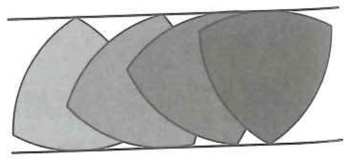
以下我們先介紹線段相等與角度相等的尺規作圖。

教學提醒 ①

因「以某點為圓心，某一線段長為半徑畫弧」可視為「等圓」局部的尺規作圖，故本單元未特別處理課綱手冊 S-8-12 提及「尺規作圖複製已知圓」的操作設計。

註：圓的相關課程出現在九年級。

數養時光機　勒洛三角形



勒洛三角形 (*Reuleaux triangle*) 是由十九世紀德國機械工程師佛朗茲．勒洛 (*Franz Reuleaux*) 以正三角形的頂點為圓心，邊長為半徑繪製成的定寬曲線，可在兩平行線中間滾動，相關的設計應用於萬克引擎 (*Wankel engine*)、方孔鑽頭及掃地機器人等。

學習內容

S-8-12 尺規作圖與幾何推理： 複製已知的線段、圓、角、三角形；能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線；能寫出幾何推理所依據的幾何性質。

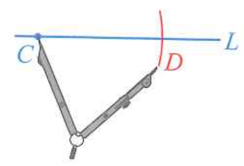
教學補給站

高斯是被公認為有史以來最多產和影響深遠的數學家之一，有「數學王子」之稱。他也發現正十七邊形的尺規作圖法，並給出可用尺規作出的正多邊形的條件，解決歐幾里得一直懸而未決的問題。

我們知道相異兩點可以連成一直線，若再利用圓規畫圓弧的動作，我們可以畫出 $\overline{CD}$ 與已知的 $\overline{AB}$ 長度相等，步驟如下：

(1) 以直尺畫一直線 L，並在 L 上適當取一點 C。

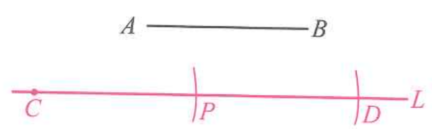
(2) 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 D 點。



則由上述的作圖步驟可知：$\overline{CD}$ 的長度與半徑 $\overline{AB}$ 相等。

隨堂練習

如右圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖畫出 $\overline{CD}$，使得 $\overline{CD}=2\overline{AB}$。



(1) 畫一直線 L，在 L 上取一點 C。

(2) 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 P 點。

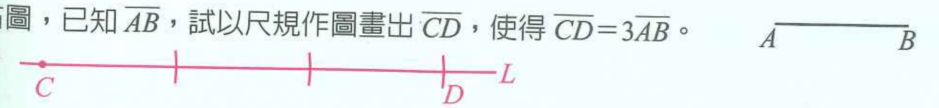
(3) 再以 P 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 D 點，則 $\overline{CD}=2\overline{AB}$ 即為所求。

一般而言，為了要能確認尺規作圖的內容與步驟，需保留所有作圖的痕跡。但有時只由圖示不容易看出步驟的先後順序，故為方便學習，作圖的步驟會輔以文字說明，同學們在作圖時，也可以檢視其作法。

類題演練　配合隨堂練習

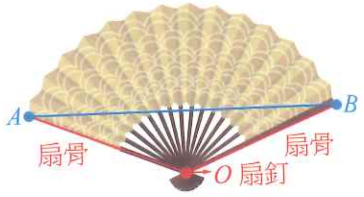
如右圖，已知 $\overline{AB}$，試以尺規作圖畫出 $\overline{CD}$，使得 $\overline{CD}=3\overline{AB}$。

解▶

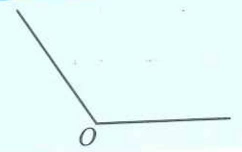


2 等角作圖

當摺扇開合時，我們可以發現當兩側扇骨端點 A、B 之間的距離 $\overline{AB}$ 固定時，在扇釘 O 點的 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 之間夾角 $\angle AOB$ 會隨之固定。利用這個特性，我們可以進行角度相等的作圖。



例 1　等角作圖

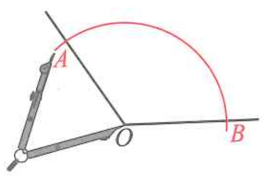


如左圖，已知 $\angle O$，利用尺規作圖畫出一個角，使其角度等於 $\angle O$。

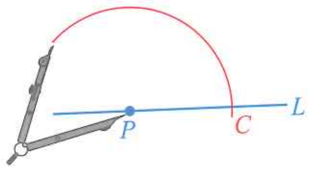
解

(1) 畫一直線 L，並在 L 上取一點 P。

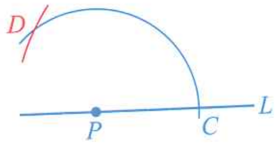
(2) 以 O 點為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交 $\angle O$ 的兩邊於 A、B 兩點。



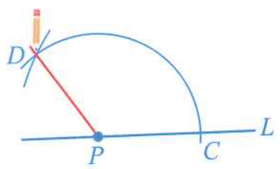
(3) 以 P 點為圓心，$\overline{OB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 C 點。



(4) 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交前弧於 D 點。



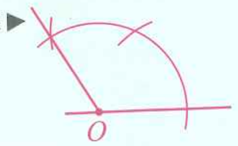
(5) 連接 $\overrightarrow{PD}$，則 $\angle DPC$ 即為所求。

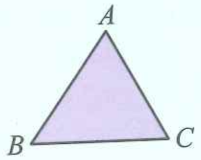


延伸演練

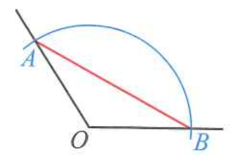
如右圖，已知△ABC，利用尺規作圖作出 $\angle O = \angle A + \angle B$。

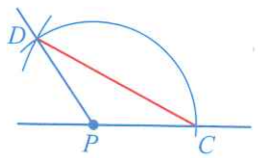
解▶





如同前文扇子兩側的扇骨長相等，在例題 1 的作圖步驟(2)、(3)畫弧時的半徑也相等，即 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{PD}=\overline{PC}$。若連接 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DC}$ 如右圖，則如同扇子兩側扇骨端點間距離固定，在作圖步驟(4)畫弧時的半徑也相同，即 $\overline{AB}=\overline{DC}$。從兩扇骨在扇釘處的夾角會隨之固定，可以了解作出 $\angle O=\angle DPC$ 的作圖方法。





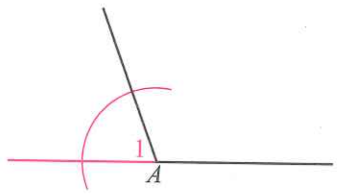
① 教學提醒

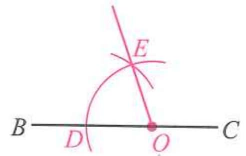
此可視為 3-3 等腰三角形的 SSS 全等作圖。

隨堂練習

如下圖，已知 $\angle A$，利用尺規作圖在 $\overline{BC}$ 上，畫出一個角與 $\angle A$ 互補。

延長 $\angle A$ 的一邊得補角 $\angle 1$ 後，利用例題 1 作法作 $\angle EOD = \angle 1$ 即為所求。

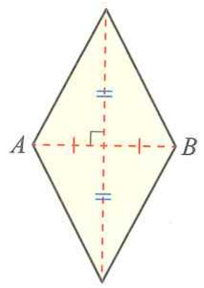




3 中垂線作圖

中垂線（垂直平分線）

七年級時，我們利用摺紙操作（可利用附件 6 操作復習）認識菱形的對角線會互相垂直平分如右圖。那麼如何利用菱形的這個性質來畫中垂線呢？

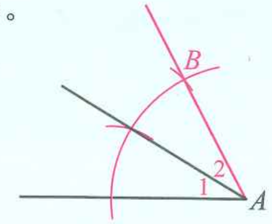


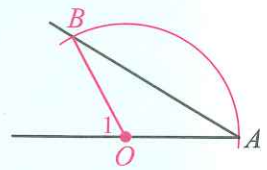
類題演練　**配合隨堂練習**

如右圖，已知 $\angle A$，利用尺規作圖作出一角的度數為 $\angle A$ 的兩倍。

解▶ 作法1：作 $\angle 1=\angle 2=\angle A$，則 $\angle 1+\angle 2$ 即為所求。

作法2：在 $\angle A$ 邊上適當選取 O 點，以 O 點為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫弧，交 $\angle A$ 另一邊於 B 點，連 $\overline{OB}$，則在△OAB 中，$\angle 1=\angle A+\angle B=2\angle A$ 即為所求。





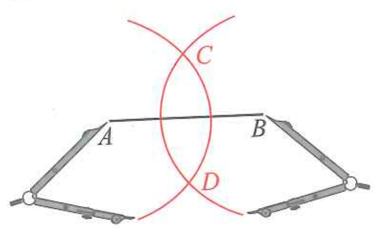
例 2　中垂線作圖

A———B　如左圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖畫出 $\overline{AB}$ 的中垂線。

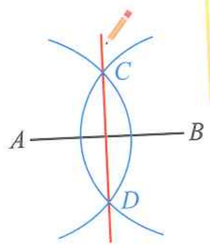
教學提醒 ①

1. 可提醒學生，以 $\overline{AB}$ 的兩端畫弧時，分別以不同的半徑畫弧，會有什麼結果？
答：當半徑大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 時，兩弧會有兩個交點，當半徑小於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 時，兩弧無交點。（學生此處尚無相切認知）。
2. 作 1 次垂直平分線能將線段平分為 1：1，作 2 次則能分為 1：3。

解　(1) 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 C、D 兩點。

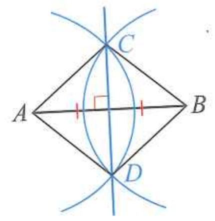


(2) 連接 $\overleftrightarrow{CD}$，則 $\overleftrightarrow{CD}$ 即為所求。



為了使兩弧有兩個交點，所取畫弧半徑需大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長。

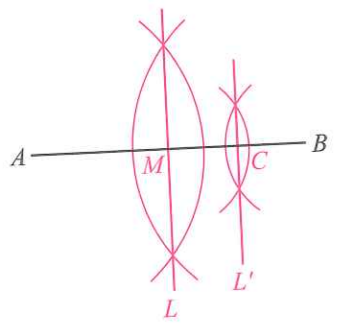
由例題 2 的作圖結果連接 $\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{BD}$，則可發現半徑 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}$，故四邊形 $ADBC$ 為菱形，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 皆為對角線。因為菱形的對角線會互相垂直平分，所以 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線。中垂線作圖不僅可以得到 $\overline{AB}$ 的中垂線，也可以得到 $\overline{AB}$ 的中點，即 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點。



隨堂練習

如左圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找一點 C，使得 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$。

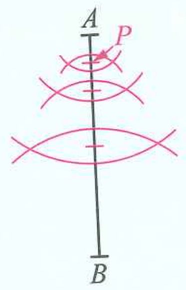
(1) 作 $\overline{AB}$ 的中垂線 L 交 $\overline{AB}$ 於 M 點。
(2) 作 $\overline{BM}$ 的中垂線 L' 交 $\overline{BM}$ 於 C 點，則 C 點即為所求。



202
2/13

類題演練　配合例題 2

如右圖，在 $\overline{AB}$ 上找點 P，滿足 $\overline{AP}:\overline{AB}=1:8$。　解▶



過線外一點作垂線

認識中垂線作圖後，我們也可將此延伸到「過線外一點作垂線」的作圖。

例 3　過線外一點作垂線

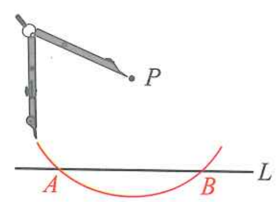
如右圖，已知 P 點在直線 L 外，利用尺規作圖畫出通過 P 點，且與直線 L 垂直的直線。

•P
———L

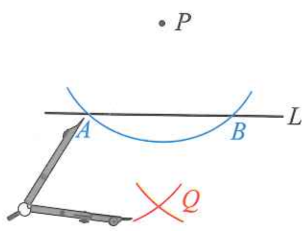
② 教學提醒

此處的適當長是指弧的半徑必須大於 P 到 L 的距離。

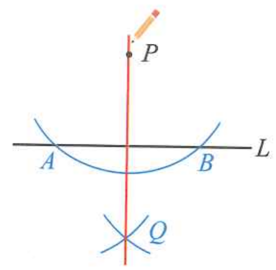
解　(1) 以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點。



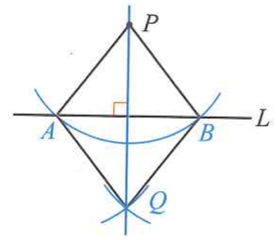
(2) 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 Q 點。



(3) 連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。



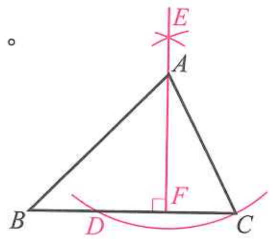
由例題 3 的作圖結果連接 $\overline{AP}$、$\overline{AQ}$、$\overline{BP}$、$\overline{BQ}$，則可發現 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 且 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$，故四邊形 $AQBP$ 為箏形。因為對角線 $\overline{PQ}$ 為箏形 $AQBP$ 的對稱軸，所以 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$，即 $\overleftrightarrow{PQ}\perp L$。



隨堂練習

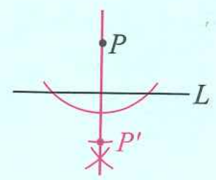
如右圖，已知△ABC，利用尺規作圖畫出通過 A 點的高。

(1) 以 A 點為圓心，$\overline{AC}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。
(2) 分別以 C、D 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{CD}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 E 點。
(3) 連接 $\overleftrightarrow{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F 點，則 $\overline{AF}$ 即為所求。
〔註〕若以 $\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，則交點只有 B 點。



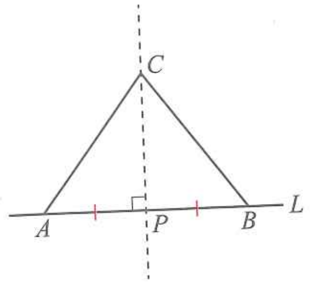
類題演練　配合例題 3

已知直線 L 外一點 P，利用尺規作圖作出 P 點對直線 L 的對稱點 P'。　解▶



過線上一點作垂線

七年級時，認識等腰△ABC 的對稱軸會垂直平分底邊如右圖（可利用附件 7 操作復習）。那麼如何利用等腰三角形的這個性質來畫過線上一點的垂線呢？



例 4 過線上一點作垂線

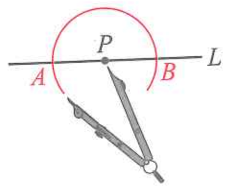
如左圖，已知 P 點在直線 L 上，利用尺規作圖畫出通過 P 點且與直線 L 垂直的直線。

教學提醒 1

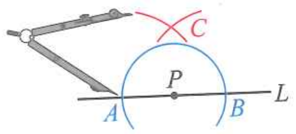
過 L 上 P 點作垂線的尺規作圖亦可視為平角∠P 的角平分線作圖。

解

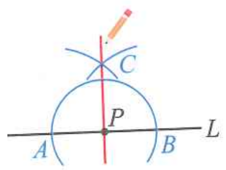
(1) 以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點。



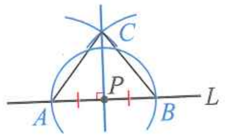
(2) 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 C 點。



(3) 連接 $\overleftrightarrow{PC}$，則 $\overleftrightarrow{PC}$ 即為所求。



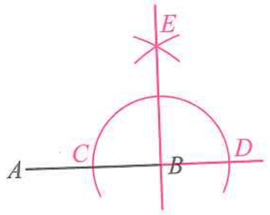
由例題 4 的作圖結果連接 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$，則可發現半徑 $\overline{AC}=\overline{BC}$，故△$ABC$ 為等腰三角形。因為 P 為 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overleftrightarrow{PC}$ 為等腰△ABC 的對稱軸，因此 $\overleftrightarrow{PC}\perp\overline{AB}$，即 $\overleftrightarrow{PC}\perp L$。



隨堂練習

教學提醒 2

此為過線上一點作垂線的應用。



如左圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上畫出過 B 點的垂線。

(1) 延長 $\overline{AB}$，以 B 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 C、D 兩點。

(2) 分別以 C、D 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{CD}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 E 點。

(3) 連接 $\overleftrightarrow{BE}$，則 $\overleftrightarrow{BE}$ 即為所求。

歷屆試題 基礎題

將長方形 $ABCD$ 分為甲、乙、丙、丁四個全等的小長方形，如右圖所示，其中 E、F、G 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GC}=4$，$\overline{AB}=8$。若在此四個小長方形內找一點 H，使得 $\overline{EH}=3$，$\overline{GH}=6$，則 H 在下列哪一個長方形內？

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 丁

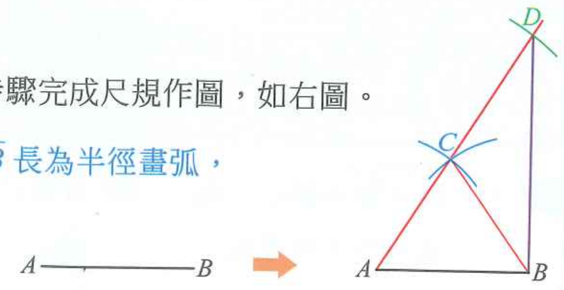
《97.基測(二)》題序第 6 題

解▶(B)。

探索活動

三弧法作垂線

已知 $\overline{AB}$ 如下圖，造南根據以下步驟完成尺規作圖，如右圖。



1 分別以 A、B 點為圓心，以 $\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 C 點。

2 連接 $\overleftrightarrow{AC}$ 及 $\overline{BC}$。

3 以 C 點為圓心，以 $\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 D 點。

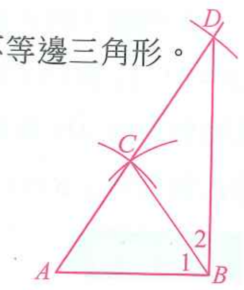
4 連接 $\overline{BD}$。

試回答下列問題：

(1) 由 1 2 可知：△ABC 為 ☑正三角形 ☐不等邊三角形。
算得∠ACB＝ 60 度，∠BCD＝ 120 度。

(2) 由 2 3 4 可知：△BCD 為 ☑等腰三角形 ☐不等邊三角形。
算得∠CBD＝ 30 度。

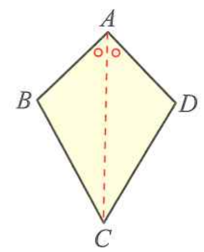
(3) $\overline{BD}$ 是否垂直 $\overline{AB}$？☑是 ☐否。
$\angle ABD=\angle 1+\angle 2=60^\circ+30^\circ=90^\circ$。



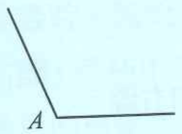
由探索活動的結果，可以知道開頭漫畫中，木工是如何利用三弧法畫出直角。

4 角平分線作圖

七年級時，我們利用摺紙操作（可利用附件 8 操作復習）認識箏形的對角線 $\overline{AC}$ 為其對稱軸如右圖。
此時∠BAC＝∠DAC（對稱角相等），
$\overline{AC}$ 稱為∠BAD 的**角平分線**。
那麼如何利用箏形的這個性質來畫出角平分線呢？



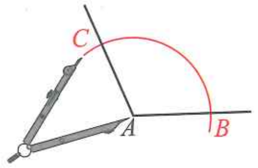
例 5 角平分線作圖



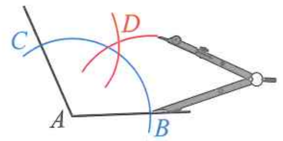
如左圖，已知$\angle A$，利用尺規作圖畫出$\angle A$的角平分線。

解

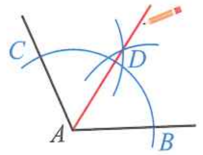
(1) 以 A 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交$\angle A$的兩邊於 B、C 兩點。



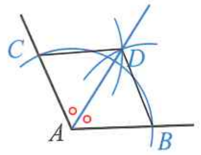
(2) 分別以 B、C 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 D 點。



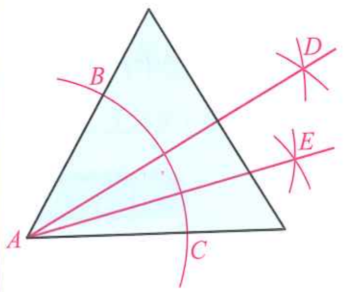
(3) 連接 $\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 即為所求。



由例題 5 的作圖結果連接 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$，則可發現 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{BD}=\overline{CD}$，故四邊形 $ABDC$ 為箏形，此時對角線 $\overline{AD}$ 為箏形 $ABDC$ 的一條對稱軸，因此對稱角$\angle BAD=\angle CAD$，故$\overrightarrow{AD}$平分$\angle BAC$。



隨堂練習



左圖是一個正三角形，利用尺規作圖畫出一個角度為 15°的角。

(1) 以 A 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交$\angle A$的兩邊於 B、C 兩點。

(2) 分別以 B、C 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 D 點，連接 $\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 為$\angle BAC$的角平分線。

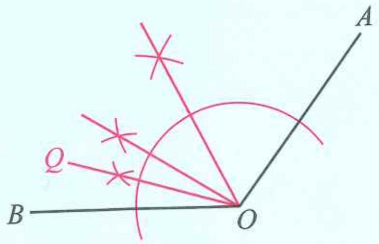
(3) 重複上述步驟作出$\angle DAC$的角平分線 $\overrightarrow{AE}$，則$\angle EAC$即為所求。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 34～35
習題 1～4。

類題演練 配合例題 5

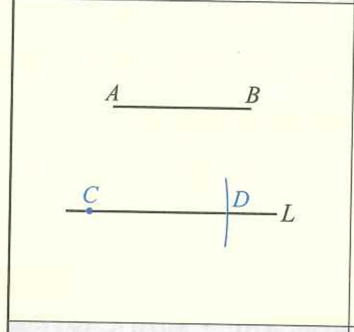
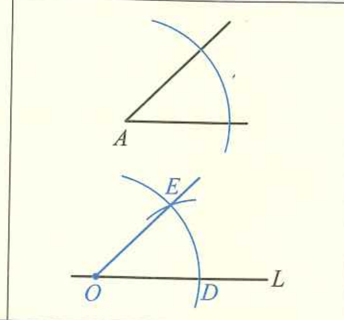
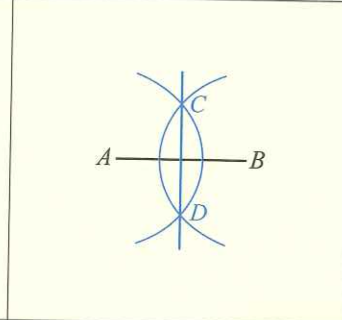
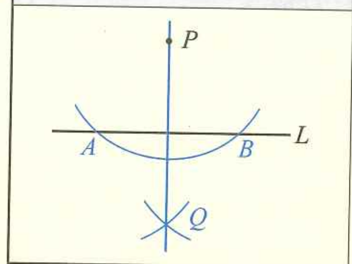
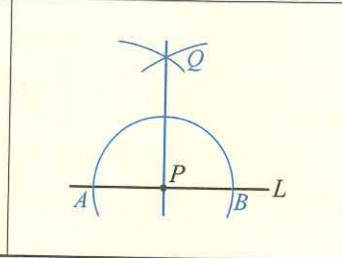
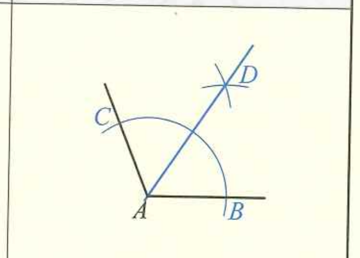
如右圖，在$\angle AOB$內找 $\overrightarrow{OQ}$，滿足$\angle QOB$：$\angle AOB=1$：8。 解▶



3-2 重點整理

1 基本尺規作圖

直尺不使用其刻度，只用來繪畫通過兩點的直線或線段，圓規只用來繪畫以某點為圓心，某一線段長為半徑的圓或圓弧。

等長線段	等角	中垂線
		
過線外一點作垂線	**過線上一點作垂線**	**角平分線**
		

數養時光機

古希臘三大幾何難題是：化圓為方、三等分任意角、倍立方。

在數學家們經過幾世紀的努力，已經證明以上三個問題在尺規作圖的限制下無法作出。但是，希臘數學家面臨這個問題時，並不知道這樣的結果。他們嘗試去解決這三個問題，在尺規作圖的限制之外，另闢蹊徑。