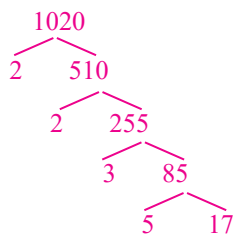


### 關鍵提問

- 利用樹狀圖找出例題 5 的標準分解式。



(不只一種，僅供參考)

### 測 基會試題

- ◆ 90 基測 II 第 15 題

### 教學眉批

- 作質因數分解時，不一定要從最小的質因數開始，若以短除法分解時，應以質數作分解。

這樣將一個大於 1 的正整數完全分解為幾個質因數連乘積的過程，稱為這個正整數的**質因數分解**。在數學上，為了方便溝通起見，約定做完質因數分解後，把較小的質因數寫在前面，較大的寫在後面，遇有相同的質因數連乘時，就以指數形式表示，像這樣的表示方式，稱為這個正整數的**標準分解式**。

例如： $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$2^3 \times 3$  稱為 24 的標準分解式，其中 2 與 3 都是 24 的質因數。

## 例 5 標準分解式

搭配習作 P27 基礎題 5 自評 P95 第 4 題

將 1020 寫成標準分解式，並求出 1020 的相異質因數。

解

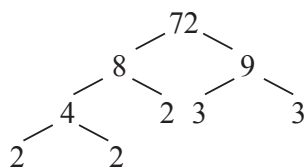
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1020} \\ 2 \overline{) 510} \\ 3 \overline{) 255} \\ 5 \overline{) 85} \\ 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1020 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \\ = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \end{array}$$

所以 1020 的相異質因數有 2、3、5、17。

### 隨堂練習

- 右圖是成俊用樹狀圖將 72 完全分解為質因數乘積的過程，寫出 72 的標準分解式。

$$\begin{aligned} 72 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ &= 2^3 \times 3^2 \end{aligned}$$



- 將 990 寫成標準分解式，並求出 990 的相異質因數。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 990} \\ 3 \overline{) 495} \\ 3 \overline{) 165} \\ 5 \overline{) 55} \\ 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} 990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 \\ = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \end{array}$$

所以 990 的相異質因數有 2、3、5、11。

### 考 會考觀測站 加強演練題 搭配例 5

- 將下列各數寫成標準分解式：

(1) 40

$$40 = 2^3 \times 5$$

(2) 68

$$68 = 2^2 \times 17$$

(3) 81

$$81 = 3^4$$

(4) 120

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

(5) 351

$$351 = 3^3 \times 13$$

(6) 1188

$$1188 = 2^2 \times 3^3 \times 11$$

接下來，我們要學習如何利用標準分解式來判別因數與倍數，做為用標準分解式求最大公因數與最小公倍數的預備。

例如：5 是否為  $5^2$  的因數？ $5^2$  是否為 5 的倍數？

因為  $5^2 = 5 \times 5$  可被 5 整除，

所以 5 是  $5^2$  的因數，

$5^2$  是 5 的倍數。

又如： $5^2$  是否為  $5^3$  的因數？ $5^3$  是否為  $5^2$  的倍數？

因為  $5^3 = 5 \times 5 \times 5$  可被  $5 \times 5 (= 5^2)$  整除，

所以  $5^2$  是  $5^3$  的因數，

$5^3$  是  $5^2$  的倍數。

### 例 6 以標準分解式判別因數與倍數 搭配習作 P27 基礎題 6 自評 P96 第 5 題

判別  $2^3 \times 7$  是否為  $2^2 \times 7$  的倍數。

**解** 因為  $2^3 \times 7 = (2 \times 2 \times 7) \times 2 = (2^2 \times 7) \times 2$ ，

又  $(2^2 \times 7) \times 2$  是  $2^2 \times 7$  的倍數，

所以  $2^3 \times 7$  是  $2^2 \times 7$  的倍數。

#### 隨堂練習

1. 下列哪些是  $2^2 \times 3^2$  的因數？在□中打「✓」。

2

$2^2 \times 3^3$

$2 \times 3 \times 5$

$2 \times 3^2$

2. 下列哪些是  $2^2 \times 3$  的倍數？在□中打「✓」。

$2 \times 3^2$

$2^3 \times 3$

$2^3 \times 3^2$

$2^2 \times 3^2 \times 5$

#### 測 基會試題

◆ 103 會考第 2 題

#### 關鍵提問

承隨堂練習第 1 題，哪一個是  $2^2 \times 3^2$  的倍數？  
 $2^2 \times 3^3$

#### 考 會考觀測站 基礎演練題 搭配例 6

1. 判別  $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$  是否為  $2^3 \times 3 \times 5$  的倍數。  
是。

2. 判別  $2^3 \times 3^2 \times 5$  是否為  $2^3 \times 3 \times 5$  的因數。  
不是。

3. 下列哪些是  $2 \times 3^3$  的倍數？(複選)

(A)  $2^2 \times 3^3$

(B)  $2^3 \times 3^2$

(C)  $2 \times 3^2$

(D)  $2 \times 3^3 \times 5$

(A)、(D)



### 趣味數學

- 有一個正整數，每位數字皆由 0 或 1 組成，且是 225 的倍數，求此正整數最小為多少？

1111111100

- 每支 10 元的冰棒有一根木棒，現在商店作促銷：3 根木棒可以換 1 支冰棒，則 50 元最多可以吃到幾支冰棒？

7 支冰棒

### 1 因數與倍數

如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為任意三個整數，且  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆不為 0，若  $a \div b = c$ ，即  $a = b \times c$ ，則：

- (1)  $b$ 、 $c$  是  $a$  的因數。
- (2)  $a$  是  $b$ 、 $c$  的倍數。

### 2 2、3、4、5、9、11 的倍數判別法

- (1) 2 的倍數：個位數字是 0、2、4、6 或 8。
- (2) 3 的倍數：各位數字和是 3 的倍數。
- (3) 4 的倍數：末兩位數是 4 的倍數。
- (4) 5 的倍數：個位數字是 0、5。
- (5) 9 的倍數：各位數字和是 9 的倍數。
- (6) 11 的倍數：「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0。

### 3 質數與合數

- (1) 一個大於 1 的整數，只有 1 和本身兩個因數，稱此數為質數。
- (2) 一個大於 1 的整數，除了 1 和本身之外，還有其他的因數，稱此數為合數。

**例** 7 是質數，10 是合數。

- (3) 1 不是質數，也不是合數；2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

### 4 質因數

如果  $a$  是  $b$  的因數，而且  $a$  是質數，就稱  $a$  為  $b$  的質因數。

**例** 6 的因數有 1、2、3、6，因為 2、3 是質數，所以 2 與 3 是 6 的質因數。

### 5 質因數分解與標準分解式

- (1) 將一個大於 1 的正整數完全分解為幾個質因數連乘積的過程，稱為這個正整數的質因數分解。
- (2) 一個正整數做質因數分解後，將此數的所有質因數由小而大相乘，且遇有相同的質因數連乘時，就以指數形式表示，像這樣的表示方式稱為這個正整數的標準分解式。  
**例**  $72 = 2^3 \times 3^2$

### 考 100 聯測第 12 題

- (B) 已知世運會、亞運會、奧運會分別於西元 2009 年、2010 年、2012 年舉辦。若這三項運動會均每四年舉辦一次，則這三項運動會均不在下列哪一年舉辦？  
(A) 西元 2070 年      (B) 西元 2071 年      (C) 西元 2072 年      (D) 西元 2073 年



## 2-1 自我評量

課 P84~87 例 1~3

- 1 判別下列各數是否為 2、3、4、5、9 或 11 的倍數，並在表格中打「✓」。

	102	594	4851	28160
2 的倍數	✓	✓		✓
3 的倍數	✓	✓	✓	
4 的倍數				✓
5 的倍數				✓
9 的倍數		✓	✓	
11 的倍數		✓	✓	✓

- 2 將右表中出現的質數圈起來，恰好可形成一個英文字母，此英文字母是 F。

課 P88 課文

59	61	19	29
47	63	14	36
23	2	79	57
17	25	15	93
3	1	91	87

- 3 列出 105 所有的因數，並寫出 105 的質因數。

105 的因數有 1、3、5、7、15、21、35、105。

105 的質因數有 3、5、7。

課 P91 例 4

- 4 將下列各數寫成標準分解式：

課 P92 例 5

(1) 117

$$= 3^2 \times 13$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 117} \\ \underline{39} \\ 13 \end{array}$$

(2) 528

$$= 2^4 \times 3 \times 11$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 528} \\ \underline{264} \\ 2 \overline{) 132} \\ \underline{66} \\ 3 \overline{) 33} \\ 11 \end{array}$$

(3) 56700

$$= 567 \times 100$$

$$= 3^4 \times 7 \times 2^2 \times 5^2$$

$$= 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 567} \\ \underline{189} \\ 3 \overline{) 63} \\ \underline{21} \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \overline{) 100} \\ \underline{50} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$



考 會考觀測站

基礎演練題

搭配自評第 1、4 題

1. 在 1545、663、217492、15642 四個整數中，2 的倍數有  $a$  個，3 的倍數有  $b$  個，5 的倍數有  $c$  個，11 的倍數有  $d$  個，則  $a+b+c+d = \underline{8}$ 。
2. 將下列各數寫成標準分解式：

(1)  $34 \times 147$ 

$$2 \times 3 \times 7^2 \times 17$$

(2) 4641

$$3 \times 7 \times 13 \times 17$$

## 測 基會試題

- ◆ 90 基測 I 第 21 題
- ◆ 91 基測 I 第 25 題
- ◆ 94 基測 I 第 13 題
- ◆ 94 基測 II 第 4 題
- ◆ 94 基測 II 第 31 題
- ◆ 95 基測 I 第 8 題
- ◆ 95 基測 I 第 27 題
- ◆ 95 基測 II 第 13 題
- ◆ 96 基測 I 第 3 題
- ◆ 96 基測 II 第 4 題
- ◆ 96 基測 II 第 29 題
- ◆ 98 基測 I 第 30 題
- ◆ 99 基測 II 第 14 題
- ◆ 100 基測 II 第 14 題
- ◆ 100 聯測第 10 題
- ◆ 100 聯測第 12 題
- ◆ 102 基測第 28 題
- ◆ 107 會考第 4 題
- ◆ 109 會考第 8 題
- ◆ 110 會考非選 2

## 趣味數學

## 質數迷宮：

由起點開始，只有質數的數字才能通過，找出一條抵達終點的路線。

起點	2	13	63
20	17	21	45
34	31	53	47
65	51	91	終點

起點	2	13	63
20	17	21	45
34	31	53	47
65	51	91	終點

## 測 基會試題

- ◆ 92 基測 II 第 8 題
- ◆ 99 基測 I 第 21 題

- 5 (1) 下列哪些數是  $2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^3$  的因數？在□中打「✓」。

$2^2 \times 5$         $2^2 \times 11^3$         $7^2 \times 11$         $2 \times 3 \times 11^2$

- (2) 下列哪些數是 44 的倍數？在□中打「✓」。

$2 \times 11$         $11^4$         $2^2 \times 3 \times 11$         $2^3 \times 11^3$

課 P93 例 6

- 6 桌上有 18 個大小相同的正方體積木，今欲將 18 個積木進行分堆，每堆積木的個數都一樣，不能剩下，試回答下列問題：

- (1) 利用分成的堆數，找出每堆積木的個數，並完成下列表格。

分成堆數	1	2	3	6	9	18
每堆個數	18	9	6	3	2	1

- (2) 承(1)，若每堆至少 2 個，但不能多於 10 個，則可能的分堆方法有哪些？

因每堆至少 2 個，但不能多於 10 個，

所以可能的分堆方法有：①分成 2 堆，每堆 9 個；②分成 3 堆，每堆 6 個；

③分成 6 堆，每堆 3 個；④分成 9 堆，每堆 2 個。

答：每堆 2 或 3 或 6 或 9 個。

## 考 會考觀測站 精熟演練題 搭配自評第 6 題

1. 設  $a$ 、 $b$  為兩個正整數，如果  $a \times b = 96$ ，且  $a - b = 10$ ，求  $a$ 、 $b$  之值。

$a = 16$ 、 $b = 6$ 。

2. 設長方形的長是  $a$ ，寬是  $b$ ，且  $a > b$ 。若其面積為 60，周長為 34，求  $a$ 、 $b$  之值。

$a = 12$ 、 $b = 5$ 。

# 2-2 最大公因數與最小公倍數

## ① 最大公因數

對應能力指標 N-7-2



因為男女不同帳篷，且每個帳篷的人數要一樣，所以每個帳篷內的人數是 12 的因數，也必須是 18 的因數。

12 的因數有 ①、②、③、4、⑥、12，

18 的因數有 ①、②、③、⑥、9、18，

其中 1、2、3、6 是 12 和 18 的**公因數**，而 6 是這些公因數中最大的一個，稱為**最大公因數**，記為  $(12, 18) = 6$ 。因此每個帳篷裡的人數最多有 6 人。

$a$ 、 $b$  為任意兩個正整數，這兩數的最大公因數記為  $(a, b)$ 。若  $(a, b) = 1$ ，則稱  $a$  與  $b$  **互質**。例如： $(15, 28) = 1$ ，則稱 15 和 28 兩數互質。

### 測 基會試題

- ◆ 93 基測 I 第 7 題
- ◆ 95 基測 II 第 6 題

### 關鍵提問

- 互質的兩數一定是質數？試舉例說明。**不一定。** 4、9 互質，但 4、9 皆不是質數。
- 兩相異質數一定互質？試舉例說明。**是**，2、3 互質，13、17 互質。
- 連續兩個整數必互質？試舉例說明。**是**，16、17 互質，8、9 互質。

### 隨堂練習

1. (1) 列出 70 和 84 的因數，再圈出 70 和 84 的公因數，並求出最大公因數。

70 的因數有 ①、②、5、⑦、10、⑭、35、70

84 的因數有 ①、②、3、4、6、⑦、12、⑭、21、28、42、84

最大公因數是 14。

(2) 承上題，判別這些公因數是否為最大公因數的因數？**是**

2. 下列哪些數與 35 互質？在□中打「✓」。

3

5

7

自評 P114 第 1 題

24

### 測 基會試題

- ◆ 90 基測 I 第 11 題

### 考 會考觀測站 加強演練題 搭配課文及隨堂

1. 下列敘述正確的有哪些？(A)、(D)

(A) 兩相異質數一定互質

(B) 連續兩整數不一定互質

(C) 兩數互質，則其中至少有一數是質數

(D) 若  $a$ 、 $b$  互質，則  $a^2$ 、 $b^2$  也互質

2. (1) 列出 120、168 的公因數。

1、2、3、4、6、8、12、24

(2) 求 120、168 的最大公因數。

24