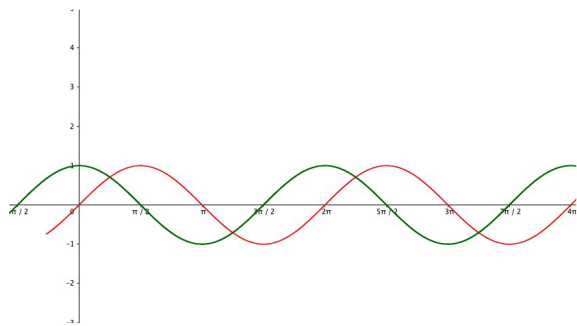


(甲)正餘弦的疊合



因為正弦函數與餘弦函數都可以用來描述波動的週期現象，而兩個週期相同的波會產生共振現象，所以接下來會討論週期相同的正弦與餘弦函數疊合而成的新函數 $y=asinkx+bcoskx$ 之性質。 $[k=1]$

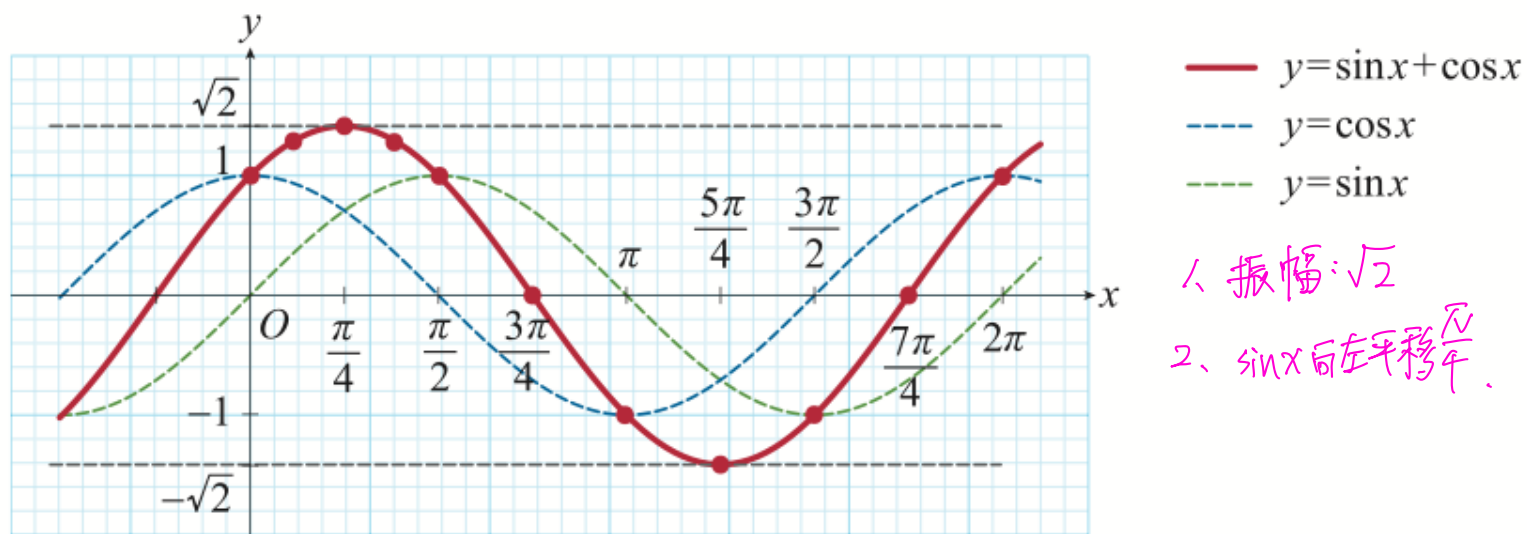
首先我們從最簡單的形式 $y=sinx+cosx$ 開始討論：

函數 $y=sinx+cosx$ 的圖形會是什麼樣子？是否會是有規律的波浪形呢？

先用描點法並列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin x + \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1

畫出 $y=sinx+cosx$ 的圖形如下



從上圖中，可以觀察出 $y=sinx+cosx$ 的圖形基本上與 $y=sinx$ (或 $y=cosx$) 的圖形類似，都是週期等於 2π 的波浪圖形，而且振幅變大了。因此猜測 $y=sinx+cosx$ 應該可以表成 $y=rsin(x+\theta)$ 的形式，用和角公式來驗證我們的猜測。

用和角公式來驗證我們的猜測

$$y = \boxed{r} \sin(x+\theta)$$
$$= r \cdot (\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta)$$

$$\therefore y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (r \cos \theta) \cdot \sin x + r \sin \theta \cdot \cos x$$

根據前面的說明， $y = \sin x + \cos x$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形鉛直伸縮 $\sqrt{2}$ 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位。因此振幅為 $\sqrt{2}$ ，週期為 2π ，這樣的結論符合上面觀察的結果。

$$= \sin x + \cos x \quad \begin{cases} r \cos \theta = 1 \\ r \sin \theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{平方相加} \\ r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1^2 + 1^2 \end{matrix}$$

疊合的方法：

$$\text{step 1: } y = f(x) = a \sin x + b \cos x \quad (a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0)$$
$$= r \sin(x + \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{1^2 + 1^2}}$$
$$\text{代回: } \begin{matrix} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \Rightarrow \theta \in I, \text{ 取 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \cos \theta = a \\ r \sin \theta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{平方相加} \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} \end{matrix}$$

θ 的找法：

$$\text{step 2: when } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \rightarrow \text{判別 } \theta \text{ 象限, 再找出 } \theta \text{ 的值}$$

定理：正餘弦疊合

設 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\text{則 函數 } y = a \sin x + b \cos x \Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$$

$$\text{p.s. } \theta \text{ 滿足 } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ex 1:

$$\begin{aligned} y &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos \theta} \sin x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin \theta} \cos x \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Ex 2:

$$\begin{aligned} y &= \sin x - \cos x \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos \theta} \sin x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin \theta} \cos x \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Ex 3:

$$\begin{aligned} y &= -\sin x + \cos x \\ &= -(\sin x - \cos x) \\ &= -\sqrt{2} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos \theta} \sin x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin \theta} \cos x \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ &= -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Ex 4:

$$\begin{aligned} y &= -\sin x - \cos x \\ &= -(\sin x + \cos x) \\ &= -\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$