



二次方根與畢氏定理

2-1 二次方根的意義

- 7 上 1-4
指數記法
- 7 上 2-1
標準分解式
- 國小 5 年級
對小數取概數

1. 根號
2. $\sqrt{a^2}$ 的值
3. $\sqrt{a}$ 的近似值
4. 平方根的意義

2-2 根式的運算

- 7 上 1-3
正負數的乘除
- 8 上 1-3
多項式的乘除

- 7 上 1-2
正負數的加減
- 8 上 1-1
乘法公式
- 8 上 1-2
多項式的加減

- 7 上 1-2
數線上兩點間的距離
- 7 下 2-1
直角坐標

1. 根式的表示
2. 根式的乘法
3. 根式的除法
4. 根式的加減
5. 根式的四則運算

- 8 上
 - 4-1 一元二次方程式
 - 4-2 配方法與公式解
- 高中 1 年級
數線與實數
 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明

2-3 畢氏定理

1. 畢氏定理
2. 平面上兩點的距離

- 8 下
 - 3-2 基本的尺規作圖
 - 3-3 三角形的全等性質
- 9 上
 - 1-4 相似三角形的應用與三角比
 - 2-1 點、線、圓
(點與圓的位置關係)

2-2 根式的運算



帶有根號的數也可以作加、減、乘、除的運算，例如： $\sqrt{2} + 3$ 、 $\sqrt{2} - 1$ 、 $(-2) \times \sqrt{2}$ 、 $1 \div \sqrt{2}$ ，像這樣含有根號的式子，我們稱為**根式**。

① 根式的表示

多項式的簡記

$2 \cdot x$ 可寫成 $2x$ 。

$(-\frac{1}{2}) \cdot x$ 可寫成 $-\frac{x}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}x$ 。

$x \div 2$ 可寫成 $\frac{x}{2}$ 或 $\frac{1}{2}x$ 。



根式的簡記

$2 \cdot \sqrt{2}$ 可寫成 $2\sqrt{2}$ 。

$(-\frac{1}{2}) \times \sqrt{2}$ 可寫成 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{2} \div 2$ 可寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 。



根式的簡記

若 $a \neq 0$ 且 b 為正數，則：

$$(1) a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b} \quad (2) \sqrt{b} \div a = \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

整數與根式的乘法 $3 \times 2\sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ，利用同樣的方法，我們可以做整數或分數與根式的運算。



隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $-5 \times 2\sqrt{3}$

(2) $-\frac{4}{3}\sqrt{2} \times (-6)$

(3) $(-4\sqrt{2}) \div 6$

② 根式的乘法

由前面的說明可以得到，若 a 、 b 、 c 為正數或 0 時， $a \times b\sqrt{c} = (a \times b) \times \sqrt{c}$ 。
 那麼 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是否等於 $\sqrt{a \times b}$ 呢？我們利用下面的例子來說明：
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ ，而 $2 = \sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2}$ ，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2}$ 。

那麼 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \times 3} (= \sqrt{6})$ 呢？
 因為 $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})$

$$= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2$$

$$= 2 \times 3$$

而且 $(\sqrt{2 \times 3})^2 = 2 \times 3$

由於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2 \times 3}$ 都是正數，所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ 。事實上，若 $a \geq 0$ ，
 $b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

根式的乘法運算

若 a 、 b 為正數或 0，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 1 根式的乘法運算

求下列各根式的乘積：

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

解 (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

$$= \sqrt{3 \times 7}$$

$$= \sqrt{21}$$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$

$$= \sqrt{6 \times \frac{5}{3}}$$

$$= \sqrt{10}$$

(3) $(-3\sqrt{3}) \times (-2\sqrt{5})$

$$= (-3) \times \sqrt{3} \times (-2) \times \sqrt{5}$$

$$= (-3) \times (-2) \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{15}$$

隨堂練習

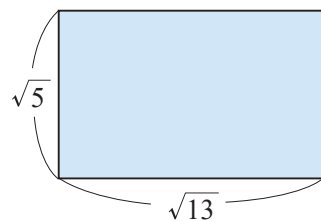
1. 求下列各根式的乘積：

$$(1) \sqrt{5} \times \sqrt{14}$$

$$(2) \sqrt{14} \times \sqrt{\frac{13}{7}}$$

$$(3) (-2\sqrt{3}) \times (4\sqrt{2})$$

2. 如圖，已知長方形的長是 $\sqrt{13}$ 公分，寬是 $\sqrt{5}$ 公分，求此長方形的面積。



例2 比較根式的大小

比較 $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt{3}$ 的大小關係。

解 $3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

$$2\sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$$

因為 $\sqrt{18} > \sqrt{12}$ ，所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

也可以這樣做：

$$(3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 18$$

$$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3}) = 12$$

因為 $18 > 12$ ，所以 $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

隨堂練習

比較 $6\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{3}$ 的大小關係。

③ 根式的除法

前面學過 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ ，那麼 $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$ 是否會等於 $\sqrt{2 \div 3}$ (即 $\sqrt{\frac{2}{3}}$) 呢？
比較下面兩個式子：

$$(1) \sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ 且 } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}。$$

$$(2) \sqrt{2 \div 3} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ 且 } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}。$$

又 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 均為正數，所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ；事實上，若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 3 根式的除法運算

計算下列各式：

$$(1) \sqrt{35} \div \sqrt{7}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

解 (1) $\sqrt{35} \div \sqrt{7}$

$$= \sqrt{35 \div 7}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$(2) \sqrt{\frac{7}{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{7}{2} \div \frac{3}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2} \times \frac{6}{3}} = \sqrt{7}$$

隨堂練習

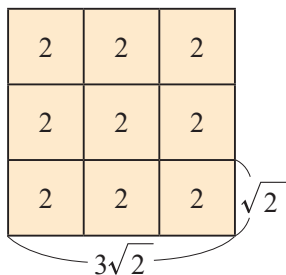
計算下列各式：

$$(1) \sqrt{48} \div \sqrt{8}$$

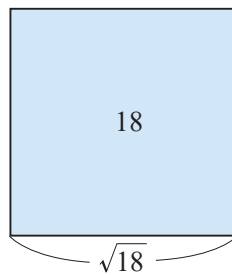
$$(2) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \sqrt{\frac{2}{3}}$$

▶ 最簡根式

下圖是由 9 個面積為 2 的正方形所構成的大正方形，其面積為 18。



因為面積為 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ ，
所以大正方形的邊長為 $3\sqrt{2}$ 。



因為大正方形的面積為 18，
所以其邊長為 $\sqrt{18}$ 。

由上述可以知道 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 。

透過根式的運算，可以得到 $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 。像這種 $r\sqrt{n}$ 形式的根式，其中 r 是整數或分數， n 是正整數，且將 n 化成標準分解式後，每一個質因數的次方都是 1，稱 $r\sqrt{n}$ 為**最簡根式**。例如： $\sqrt{42}$ 、 $3\sqrt{6}$ 、 $\frac{5}{7}\sqrt{21}$ 都是最簡根式。

一個根式有下列任何一種情形時，就不是最簡根式：

(1) 根號內的正整數，化成標準分解式後，有任何一個質因數的次方大於 1。

例如： $\sqrt{75}$ 不是最簡根式。因為 $75 = 3 \times 5^2$ ，質因數 5 的次方為 2。

(2) 根號內有分數或小數。例如： $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt{0.7}$ 都不是最簡根式。

(3) 分母有根式。例如： $\frac{5}{\sqrt{2}}$ 不是最簡根式。

隨堂練習

下列根式中，哪些是最簡根式？

$$3\sqrt{2}、\sqrt{25}、\sqrt{15}、\frac{2}{3}\sqrt{6}、\sqrt{\frac{7}{5}}、\frac{\sqrt{24}}{2}、\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}、\sqrt{5.1}$$



例4 化為最簡根式

自評 P91 第 1 題 (1)(2)

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{2^4 \times 3^3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 5^3}$

(3) $\sqrt{108}$

解 (1) $\sqrt{2^4 \times 3^3}$

$$= \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 3}$$

$$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$

$$= 2^2 \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3}$$

(2) $\sqrt{2^5 \times 5^3}$

$$= \sqrt{2^4 \times 5^2 \times 2 \times 5}$$

$$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{2 \times 5}$$

$$= 2^2 \times 5 \times \sqrt{10}$$

$$= 20\sqrt{10}$$

(3) $\sqrt{108}$

$$= \sqrt{2^2 \times 3^3}$$

$$= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3}$$

$$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$$

$$= 2 \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3}$$

隨堂練習

計算下列各式：

(1) $\sqrt{5^2 \times 3}$

(2) $\sqrt{2^5 \times 3^2}$

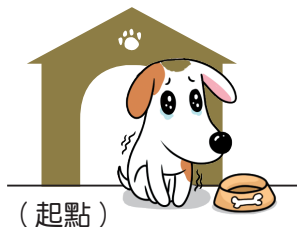
(3) $\sqrt{50}$

數學 FUN 手玩

下圖中有一隻飢餓的狗狗，只要沿著最簡根式，就可以吃到美味的骨頭，試著幫他找出路徑吧！（只能走上、下、左、右，不能走斜的喔！）



最簡根式小遊戲



(起點)

$\sqrt{2}$

$\sqrt{12}$

$\sqrt{18}$

$\sqrt{7}$

$\sqrt{24}$

$\sqrt{20}$

$\sqrt{38}$

$\sqrt{41}$

$\sqrt{42}$

$\sqrt{43}$

$\sqrt{46}$

$\sqrt{47}$

$\sqrt{4}$

$\sqrt{33}$

$\sqrt{35}$

$\sqrt{37}$

$\sqrt{20}$

$\sqrt{50}$

$\sqrt{45}$

$\sqrt{32}$

$\sqrt{51}$

$\sqrt{49}$

$\sqrt{31}$

$\sqrt{16}$

$\sqrt{27}$

$\sqrt{38}$

$\sqrt{61}$

$\sqrt{59}$

$\sqrt{55}$

$\sqrt{53}$

$\sqrt{8}$

$\sqrt{29}$

$\sqrt{28}$

$\sqrt{40}$

$\sqrt{62}$

$\sqrt{60}$

$\sqrt{81}$

$\sqrt{56}$

$\sqrt{72}$

$\sqrt{2}$

$\sqrt{12}$

$\sqrt{18}$

$\sqrt{9}$

$\sqrt{23}$

$\sqrt{44}$

$\sqrt{66}$

$\sqrt{65}$

$\sqrt{96}$

$\sqrt{3}$

$\sqrt{25}$

$\sqrt{32}$

$\sqrt{17}$

$\sqrt{6}$

$\sqrt{48}$

$\sqrt{67}$

$\sqrt{36}$

$\sqrt{88}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{11}$

$\sqrt{19}$

$\sqrt{21}$

$\sqrt{52}$

$\sqrt{79}$

$\sqrt{70}$

$\sqrt{71}$

$\sqrt{77}$

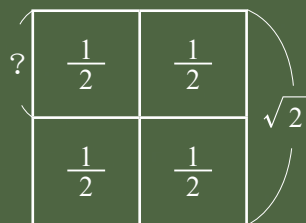
(終點)



根式的有理化

一個面積為 2 的正方形，其邊長為 $\sqrt{2}$ 。

將此正方形分割成四個大小一樣的小正方形，
每個小正方形的邊長是多少？



值日生：妙麗



每個小正方形的邊長是
大正方形的一半，
因此邊長為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



每個小正方形的面積為 $\frac{1}{2}$ ，
因此邊長為 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ，又從根式
的除法運算可得 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

這兩種表示方式，哪一種較容易進行估算呢？

由於 $\sqrt{2}$ 並非有限小數，若用 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 來加以估計：

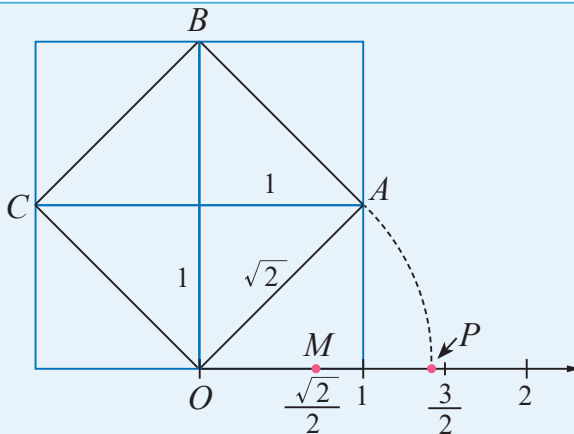
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{1.414}{2} = 0.707 \text{ (容易估算)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{1.414} = ? \text{ (不易估算)}$$

當分母是根式且無計算機使用時，可先將分母化成整數。以 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 為例，透過根式的運算得到 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，像這樣將 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的分母利用擴分或其他方法，使得這個分數的分母沒有根號，這樣的過程稱為**有理化分母**。

補給站 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在數線上的位置

如右圖，在 2-1 曾經學過：當正方形 $OABC$ 面積為 2，其邊長為 $\sqrt{2}$ 。以 O 點為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑畫弧，在數線上標示出 $\sqrt{2}$ 的位置 (P 點) 後，將 $\overline{OP}$ 對摺即可得 $\overline{OP}$ 的中點 M ，此點就是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在數線上的位置。



有理化分母也可將根式化成最簡根式，例如： $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。如果要將 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 化成最簡根式，必須把分母的根式消去，使分母變成一個整數。此時可以利用 $(\sqrt{3})^2 = 3$ ，將 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 的分子和分母同乘以 $\sqrt{3}$ ，即 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ （或 $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ ），而 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 就是 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 的最簡根式。

例5 有理化分母

自評 P91 第 1 題 (3)

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$

(2) $\sqrt{\frac{7}{18}}$

(3) $\sqrt{0.7}$

解 (1) $\frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \xleftarrow{\substack{\text{分子、分母} \\ \text{同乘以 } \sqrt{5}}} = \frac{4 \times \sqrt{5}}{3 \times 5} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$

(2) $\sqrt{\frac{7}{18}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{14}}{6}$

(3) $\sqrt{0.7} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{\frac{7}{12}}$

(4) $\sqrt{1.3}$

例 6 根式的乘除運算與有理化

自評 P91 第 2 題

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{16}}$

(2) $\sqrt{45} \div \sqrt{30}$

(3) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{6}{5}}$

解 (1) $\sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{16}}$

$$= \sqrt{\frac{8}{3} \times \frac{27}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\sqrt{45} \div \sqrt{30}$

$$= \sqrt{45 \div 30}$$

$$= \sqrt{\frac{45}{30}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(3) $\sqrt{\frac{2}{5}} \div \sqrt{\frac{6}{5}}$

$$= \sqrt{\frac{2}{5} \div \frac{6}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

隨堂練習

將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{\frac{7}{8}} \times \sqrt{\frac{14}{3}}$

(2) $\sqrt{2} \div \sqrt{11}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{4}} \div \sqrt{\frac{8}{5}}$

我們也可以利用根式的運算規則計算根式的近似值。

例 7 根式運算規則的應用

自評 P91 第 3 題

已知 $\sqrt{17} \doteq 4.123$ 。利用根式的運算規則，計算下列各數的近似值：

(1) $\sqrt{1700}$

(2) $\sqrt{0.17}$

(3) $\sqrt{6800}$

解

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{1700} &= \sqrt{17 \times 100} \\ &= 10\sqrt{17} \\ &\doteq 10 \times 4.123 \\ &= 41.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{0.17} &= \sqrt{\frac{17}{100}} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{10} \\ &\doteq \frac{4.123}{10} \\ &= 0.4123 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt{6800} &= \sqrt{20^2 \times 17} \\ &= 20\sqrt{17} \\ &\doteq 20 \times 4.123 \\ &= 82.46 \end{aligned}$$

隨堂練習

已知 $\sqrt{2} \doteq 1.414$ 。利用根式的運算規則，計算下列各數的近似值：

(1) $\sqrt{200} \doteq$ _____。

(2) $\sqrt{0.02} \doteq$ _____。

(3) $\sqrt{0.08} \doteq$ _____。

④ 根式的加減

▶ 同類方根

若 a 、 b 為正數，將 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 化為最簡根式後，如果根號內的數相同，則 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 稱為**同類方根**。

例如：(1) $6\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $-\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 是同類方根。

(2) $\sqrt{75}$ 和 $\sqrt{12}$ 化成最簡根式後是 $5\sqrt{3}$ 和 $2\sqrt{3}$ ，所以 $\sqrt{75}$ 和 $\sqrt{12}$ 是同類方根。

(3) $5\sqrt{3}$ 和 $5\sqrt{2}$ 不是同類方根。

如同多項式的加減運算，應合併同類項；計算根式的加減時，應將同類方根合併，不是同類的方根則不能合併。

多項式的同類項合併

$x + 2x$ 可合併成 $3x$



根式的同類方根合併

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ 可合併成 $3\sqrt{2}$

例 8 同類方根的合併

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3}$

解 (1) $7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 7 \times \sqrt{3} - 3 \times \sqrt{3}$ ← $7\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{3}$ 為同類方根，可以合併。

$$= (7 - 3) \times \sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

(2) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$= -4\sqrt{2} + \sqrt{3}$$
 ← $4\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 不為同類方根，不能合併。

**隨堂練習**

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) 3\sqrt{11} - 8\sqrt{11}$$

$$(2) 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$$

計算根式的加減時，通常將各項化為最簡根式後，就可以很清楚地觀察到哪些項是同類方根，再加以合併。

例 9**化簡後再合併同類方根**

自評 P92 第 4 題 (1)(2)

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{108} - 5\sqrt{12} + \sqrt{45}$$

$$(2) \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

解

$$(1) \sqrt{108} - 5\sqrt{12} + \sqrt{45}$$

$$= \sqrt{2^2 \times 3^3} - 5 \times \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 5}$$

$$= 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$$

$$= -4\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$$

$$(2) \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

**隨堂練習**

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) 4\sqrt{12} - 2\sqrt{18} - \sqrt{3}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

5 根式的四則運算

根式也和其他的數一樣，可進行四則運算。

例 10 根式的四則運算

自評 P92 第 4 題 (3)

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) -2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$(2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+1)$$

解 (1) $-2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$$= -2\sqrt{3} \times \sqrt{6} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{18} + 2\sqrt{6}$$

$$= -6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$$

$$(2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+1)$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{18} + \sqrt{3} - \sqrt{12} - \sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$

$$(2)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{3})$$



例 11 根式的四則運算

自評 P92 第 4 題 (4)

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$(2) (3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \div \sqrt{3}$$

解

$$\begin{aligned} (1) & \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \div \frac{1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 12} \\ &= \sqrt{\frac{8}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{24}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \div \sqrt{3} \\ &= \frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6})}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{18}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{3} \\ &= \sqrt{6} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$



隨堂練習

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$(2) (4\sqrt{6} - 2) \div \sqrt{2}$$

在第 1 章所學的乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 中, 當 a 、 b 是根式時也一樣成立。

例 12 利用完全平方公式化簡根式

自評 P92 第 5 題 (1)

利用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展開 $(3+2\sqrt{5})^2$, 並化簡其結果。

解

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2 \times a \times b + b^2 \\
 (3+2\sqrt{5})^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 \\
 &= 9 + 12\sqrt{5} + 20 \\
 &= 29 + 12\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

隨堂練習

利用 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 展開 $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$, 並化簡其結果。

Thinking

- 分別計算 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 和 $(\sqrt{5})^2$, 並運用此結果判別 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 和 $\sqrt{5}$ 是否相等?
- 分別計算 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ 和 $(\sqrt{2})^2$, 並運用此結果判別 $(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ 和 $\sqrt{2}$ 是否相等?



例13 利用平方差公式化簡根式

自評 P92 第 5 題 (2)

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$ ，並化簡其結果。

解

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\
 (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) &= 3^2 - (\sqrt{5})^2 \\
 &= 9 - 5 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$



隨堂練習

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ，並化簡其結果。

如果要將 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 化成最簡根式，必須有理化分母。同樣地，化簡 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 也要有理化分母，此時可利用平方差公式，將 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 乘以 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ，化簡過程如下：

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

有理化的好處是：有些根式乍看之下不能合併，但如果可以化為同類方根，便可以進一步合併，也就是將答案化簡。例如：

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

答案也可表示成 $\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

例 14 利用平方差公式有理化分母

自評 P92 第 6 題

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡下列各式：

$$(1) \frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

思路分析

分母是 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 時，分母、分子同乘以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 。

分母是 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 時，分母、分子同乘以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 。

解 (1) $\frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3 \times (\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2) \times (\sqrt{7}+2)} \leftarrow \text{分母、分子同乘以 } (\sqrt{7}+2)$

$$= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3}$$

$$= \sqrt{7}+2$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) \\ &= (\sqrt{7})^2 - 2^2 \\ &= 7-4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}) \times (\sqrt{6}-\sqrt{5})} \leftarrow \text{分母、分子同乘以 } (\sqrt{6}-\sqrt{5})$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

$$= \sqrt{12}-\sqrt{10}$$

$$= 2\sqrt{3}-\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &= (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 6-5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

隨堂練習

利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 化簡下列各式：

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$



重點回顧

1 根式的乘法運算

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

例 $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7}$ 。

2 根式的除法運算

若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ 。

例 $\sqrt{35} \div \sqrt{7} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{35}{7}} = \sqrt{35 \div 7} = \sqrt{5}$ 。

3 最簡根式

形如 $r\sqrt{n}$ 的根式，若 r 是整數或分數， n 是正整數，且將 n 化成標準分解式後，每一個質因數的次方都是 1，則稱 $r\sqrt{n}$ 為最簡根式。

例 $\sqrt{30}$ 、 $2\sqrt{15}$ 、 $\frac{2}{5}\sqrt{6}$ 都是最簡根式。

4 同類方根

(1) $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 化為最簡根式後，如果根號內的數相同，則 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 稱為同類方根。

例 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ，所以 $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{27}$ 為同類方根。

(2) 根式做加減運算時，同類方根要合併；不是同類方根就無法合併。

例 $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ 。

5 有理化分母

(1) 若 $a > 0$ ，則化簡分母為 $\sqrt{a}$ 的根式時，可以利用擴分將分母、分子同乘以 $\sqrt{a}$ 。

例 $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

(2) 若 $a > 0, b > 0$ ，則化簡分母為 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 、 $\sqrt{a} \pm b$ 或 $a \pm \sqrt{b}$ 的根式時，可以利用平方差公式將分母有理化。

例 $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})} \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 。



2-2 自我評量

1 將下列各式化為最簡根式：

$(1) \sqrt{2^6 \times 3^4}$

課 P78 例 4

$(2) \sqrt{45}$

課 P78 例 4

$(3) \sqrt{\frac{5}{24}}$

課 P80 例 5

2 計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

課 P81 例 6

$(1) \sqrt{18} \times \sqrt{3}$

$(2) \sqrt{\frac{125}{4}} \div \sqrt{\frac{5}{32}}$

$(3) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

3 已知 $\sqrt{87} = a$ ， $\sqrt{870} = b$ ，試用 a 或 b 表示下列各數的值。

課 P82 例 7

$(1) \sqrt{870000} = \underline{\hspace{2cm}}。$

$(2) \sqrt{8.7} = \underline{\hspace{2cm}}。$

4 計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{27}$

課 P84 例 9

(2) $3\sqrt{24} + \sqrt{96} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$

課 P84 例 9

(3) $\sqrt{5}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$

課 P85 例 10

(4) $(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \div \sqrt{6}$

課 P86 例 11

5 利用乘法公式展開下列各式，並化簡其結果：

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$

課 P87 例 12

(2) $(3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$

課 P88 例 13

6 利用乘法公式化簡下列各式：

課 P89 例 14

(1) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - 1}$

(2) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$