



1

離散型隨機變數

日常生活中有些事情的結果是無法掌控、也不能事先知道，例如擲骰子會出現什麼點數、丟硬幣會出現哪一面、取球會取到幾號球、……。像這類不能預知結果的現象，我們稱為隨機現象。本單元我們將在機率的基礎上，學習與隨機現象有關的隨機變數、期望值、變異數與標準差。



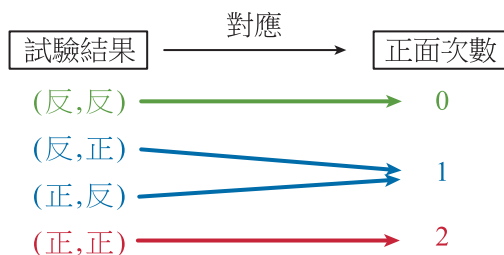
▲圖 1

甲 離散型隨機變數

當一項試驗可在相同的條件下重複進行，每次試驗的可能結果不只一種，且試驗前無法確定哪一種結果會出現時，稱此試驗為**隨機試驗**。例如下列三項試驗都是不只一種結果的隨機試驗。

- (1) 擲一粒骰子，可能出現 1, 2, 3, 4, 5 或 6 點，共有 6 種結果。
- (2) 丟一枚硬幣兩次，可能是 (正, 正)、(正, 反)、(反, 正) 或 (反, 反)，共有 4 種結果。
- (3) 從只裝有紅球與白球的袋中取一球，可能是紅球或白球，共有 2 種結果。

隨機試驗的結果有很多樣式，有些是數值，有些是文字或符號等。為了方便研究，通常會依感興趣的內容，將試驗的結果對應到一些特定的實數值。例如丟一枚硬幣兩次，若感興趣的是正面出現的次數，則會將試驗結果與正面出現的次數對應如下。



像這樣將隨機試驗所有可能發生的結果（即樣本空間）對應到一個實數值的函數關係稱為**隨機變數**，通常以 X 表示。令 X 表示丟一枚硬幣兩次正面出現的次數，那麼 X 的值可為 0, 1, 2，此時

「 $X=0$ 」表示「正面出現 0 次的事件」；

「 $X=1$ 」表示「正面出現 1 次的事件」；

「 $X=2$ 」表示「正面出現 2 次的事件」。

即符號「 $X=x$ 」表示「隨機變數 X 取值為 x 的所有樣本點所成的事件」。

例題 1

袋中裝有大小相同的紅球 2 顆，白球 4 顆。從袋中任取 2 顆球，並令隨機變數 X 表示取得紅球的顆數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 描述 $X=0$ 所表示的事件。

解

樣本空間為

$$S = \{ \text{兩顆白球, 一紅一白, 兩顆紅球} \}。$$

(1) 由樣本空間可知：取得紅球的顆數 X 所有可能的取值為 0, 1, 2。

(2) $X=0$ 所表示的事件為取到 0 顆紅球的事件，即 { 兩顆白球 }。

隨堂練習

從 52 張撲克牌中隨機抽出 5 張牌。令隨機變數 X 表示抽到點數「K」的張數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 描述 $X=1$ 所表示的事件。

對於隨機變數 X ，我們可以計算事件 $X=x$ 發生的機率，並以符號 $P(X=x)$ 表示此機率。以下面的例子來說明。

例題 2

丟一枚均勻硬幣 3 次，並令隨機變數 X 表示正面出現的次數。

- (1) 寫出 X 所有可能的取值。
- (2) 求機率 $P(X=1)$ 及 $P(X=3)$ 的值。

解

用「+」表示出現正面，「-」表示出現反面，則樣本空間為

$$S = \{(+, +, +), (+, +, -), (+, -, +), (-, +, +), \\ (+, -, -), (-, +, -), (-, -, +), (-, -, -)\},$$

其中序對裡面的位置，代表依次出現的結果。

- (1) 由樣本空間可知：正面出現的次數 X 所有可能的取值為 0, 1, 2, 3。
- (2) ① 因為 $X=1$ 表示正面出現 1 次的事件，即

$$\{(+, -, -), (-, +, -), (-, -, +)\},$$

$$\text{所以其機率 } P(X=1) = \frac{3}{8}。$$

- ② 因為 $X=3$ 表示正面出現 3 次的事件，即

$$\{(+, +, +)\},$$

$$\text{所以其機率 } P(X=3) = \frac{1}{8}。$$

隨堂練習

丟一枚均勻硬幣 4 次，並令隨機變數 X 表示正面出現的次數。

- (1) 寫出 X 所有可能的取值。
- (2) 求機率 $P(X=2)$ 與 $P(X=3)$ 的值。

在例題 2 中，我們有 $P(X=1)=\frac{3}{8}$ 與 $P(X=3)=\frac{1}{8}$ ，表示將 X 的取值 1、3 分別對應到機率 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{1}{8}$ ；這種將隨機變數 X 所有可能的取值 x 對應到其機率的函數關係稱為隨機變數 X 的**機率質量函數**，習慣上可以列表如下，並稱此表為**機率分布表**。

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

一般而言，若隨機變數 X 所有可能的取值為 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，且 $P(X=x_i)=p_i$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，則可以列出隨機變數 X 的機率分布表如下。

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

由機率的性質知，機率 $P(X=x_i)=p_i$ 具有下面兩個性質。

$$(1) 0 \leq p_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n。$$

$$(2) p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1。$$

隨機變數 X 也有無限多個取值的情況，例如連續擲一粒骰子，擲到 6 點才停止，此時隨機變數 X 所有可能的取值就是 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ，有無限多個。若隨機變數 X 的取值為 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，且其對應的機率為 $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ，則這些機率具有下面兩個性質。

$$(1) 0 \leq p_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n, \dots。$$

$$(2) p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1。$$

更多隨機變數為無限多個取值的例子，留待單元 2 再行介紹。

練習一道求機率分布表的例題。

例題 3

袋中有大小相同的白球 2 顆、紅球 3 顆，每次從袋中任取一球，取後不放回，直到取到紅球才停止，稱此為一輪操作。已知每顆球被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示一輪操作中所取出的總球數。

(1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。 (2) 求機率 $P(X \leq 2)$ 的值。

解

(1) ① $X=1$ 表示共取出 1 球的事件，即取球顏色為紅，其機率為

$$P(X=1) = \frac{3}{5}。$$

② $X=2$ 表示共取出 2 球的事件，即取球顏色依序為白紅，其機率為

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}。$$

③ $X=3$ 表示共取出 3 球的事件，即取球顏色依序為白白紅，其機率為

$$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{10}。$$

由於白球只有兩顆，因此至多取到第 3 球必可取到紅球，即 $X \leq 3$ 。

綜合以上，可得隨機變數 X 的機率分布表如下。

取出的球數 x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$(2) P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}。$$

隨堂練習

甲、乙兩人各從 1, 2 與 3 三個數字中任選一個數字，可重複選取。已知每個數字被選到的機會均等，並令隨機變數 X 表示甲、乙所選數字的差之絕對值。

(1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。 (2) 求機率 $P(X \geq 1)$ 的值。

在上述例題與隨堂練習中，隨機變數 X 所有可能的取值可以一一列出，像這樣的隨機變數稱為**離散型隨機變數**。

乙 隨機變數的期望值、變異數與標準差

對於隨機變數 X ，常利用一些數值來代表該隨機變數 X 的某些特性，最常用的有「期望值」、「變異數」與「標準差」，此處用來定義期望值的精神與內涵與第二冊所學過的數學期望值是一致的。

(一) 期望值

在第二冊中我們學過：當一試驗有 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 等 n 種結果，且每一種結果發生的機率分別為 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 時，此試驗的期望值

$$E = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_n p_n = \sum_{i=1}^n m_i p_i \circ$$

同樣地，對於隨機變數 X ，將 X 所有可能的取值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，分別乘上相對應發生的機率之總和，就是隨機變數 X 的**期望值**。

期望值

設隨機變數 X 的機率分布表如右。

定義隨機變數 X 的期望值為

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i \circ$$

當隨機變數 X 的取值有無限多個時，

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \circ$$

練習求隨機變數 X 的期望值。

例題 4

已知裝有 100 元、200 元與 300 元的紅包袋各有 1, 2, 1 個，任取 2 個紅包袋，且每個紅包袋被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出兩個紅包袋的總金額，求 X 的期望值。

解

因為 X 表示取出紅包袋的總金額，所以 X 的所有可能取值為 300, 400, 500 (元)，其機率分布表如下。

總金額 x	300	400	500
$P(X=x)$	$\frac{C_1^1 C_1^2}{C_2^4} = \frac{1}{3}$	$\frac{C_1^1 C_1^1 + C_2^2}{C_2^4} = \frac{1}{3}$	$\frac{C_1^1 C_1^2}{C_2^4} = \frac{1}{3}$

故期望值

$$E(X) = 300 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{1}{3} + 500 \times \frac{1}{3} = 400 \text{ (元)}。$$

隨堂練習

盒中有 8 顆巧克力，其中 3 顆的內餡為杏仁，自盒中任取兩顆，且每顆巧克力被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取到杏仁內餡巧克力的顆數，求 X 的期望值。

再做一題與期望值有關的練習。

例題 5

袋中有 100 元代幣 3 枚、50 元代幣 6 枚與 20 元代幣 n 枚。從袋中抽出一枚代幣，且每枚代幣被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示抽出代幣的金額。已知 X 的期望值為 40 元，求 n 的值。

解

因為 X 表示抽出一枚代幣的金額，所以 X 所有可能的取值為 100, 50, 20 (元)，其機率分布表如下。

金額 x	100	50	20
$P(X=x)$	$\frac{3}{3+6+n}$	$\frac{6}{3+6+n}$	$\frac{n}{3+6+n}$

又 X 的期望值為 40 元，即

$$E(X) = 100 \times \frac{3}{n+9} + 50 \times \frac{6}{n+9} + 20 \times \frac{n}{n+9} = 40,$$

整理得 $20n = 240$ ，解得 $n = 12$ 。

隨堂練習

擲一粒公正的骰子一次，當出現 1, 2 或 3 點時，可得 200 元；出現 4 或 5 點時，可得 500 元；出現 6 點時，可得 k 元。設隨機變數 X 表示擲骰子一次所得的金額。已知 X 的期望值為 400 元，求 k 的值。

(二) 變異數與標準差

在第二冊中曾介紹過一組數據的平均數與變異數，我們先複習一下這兩個概念：設 6 個數據為 4, 5, 7, 5, 4, 5，則此 6 個數據的平均數為

$$\mu = \frac{1}{6}(4+5+7+5+4+5)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} (4 \times 2 + 5 \times 3 + 7 \times 1) \\
&= 4 \times \frac{2}{6} + 5 \times \frac{3}{6} + 7 \times \frac{1}{6} = 5。
\end{aligned}$$

觀察這 6 個數據共有三個相異值 4, 5, 7，且其出現的次數分別為 2, 3, 1，此時 $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{6}$ 可以分別視為得到數據 4, 5, 7 的機率。因此，這 6 個數據的平均數 μ

可以視為隨機變數 X 的取值為 4, 5, 7 之期望值 $E(X)$ 。

而上述這 6 個數據的變異數

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{6} ((4-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2) \\
&= \frac{1}{6} ((4-5)^2 \times 2 + (5-5)^2 \times 3 + (7-5)^2 \times 1) \\
&= (4-5)^2 \times \frac{2}{6} + (5-5)^2 \times \frac{3}{6} + (7-5)^2 \times \frac{1}{6} = 1。
\end{aligned}$$

因此，仿照期望值將每一個數值以其發生的機率加權的概念，將離均差平方乘上其對應的機率之總和，稱為隨機變數 X 的**變異數**。定義如下。

變異數與標準差

設隨機變數 X 的機率分布如右表，
且期望值為 $E(X) = \mu$ 。定義隨機變數 X 的變異數為

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i,$$

且 $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ 稱為隨機變數 X 的**標準差**。

當隨機變數 X 的取值有無限多個時，

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i。$$

隨機變數 X 的標準差是用來衡量該變數的值與期望值的離散程度。一般而言，如果標準差較大，則該變數的值與期望值較分散；如果標準差較小，則該變數的值與期望值較接近。

底下來練習求隨機變數的期望值、變異數與標準差。

例題 6

袋中有編號 2, 4, 6, 8 的球各一顆。今從袋中取出一球，且每球被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出球的編號，求 X 的期望值、變異數與標準差。

解

因為 X 表示取出球的編號，所以 X 所有可能的取值為 2, 4, 6, 8，其機率分布表如下。

編號 x	2	4	6	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

故期望值

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{4} = \frac{20}{4} = 5。$$

變異數

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (2-5)^2 \times \frac{1}{4} + (4-5)^2 \times \frac{1}{4} + (6-5)^2 \times \frac{1}{4} + (8-5)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 9 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} = 5。 \end{aligned}$$

標準差 $\sigma(X) = \sqrt{5}$ 。

隨堂練習

摸彩箱中裝有標示 5, 6, 7, 8 折的球分別各有 1, 2, 3, 4 顆。從箱中取出一球，且每球被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出球所代表的折扣數（例如標示 7 折的球所對應的 X 為 7），求 X 的期望值、變異數與標準差。

處理變異數時，有時為了計算上的方便，會將變異數公式改寫如下：

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) p_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2\mu \sum_{i=1}^n x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n p_i.\end{aligned}$$

因為 $\sum_{i=1}^n x_i p_i = \mu$ 且 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ，所以上式可化為

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2,$$

又因為 $\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$ 是隨機變數 X^2 的期望值，以符號 $E(X^2)$ 表示，所以

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

當隨機變數 X 的取值有無限多個時，仿照以上的方式可得

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2.\end{aligned}$$

變異數公式

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

利用上述公式，可以幫我們處理一些計算較複雜的變異數。

例題 7

投擲一粒不公平的骰子，其各點數出現的機率與該點數成正比。設隨機變數 X 表示擲一次骰子所出現的點數，求 X 的期望值與變異數。

解

因為 X 表示擲一次骰子所出現的點數，所以 X 所有可能的取值為 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，又各點數出現的機率比為 $1:2:3:4:5:6$ ，可得其機率分布表如下。

點數 x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

故期望值

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + 3 \times \frac{3}{21} + 4 \times \frac{4}{21} + 5 \times \frac{5}{21} + 6 \times \frac{6}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3};$$

變異數

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \left(1^2 \times \frac{1}{21} + 2^2 \times \frac{2}{21} + 3^2 \times \frac{3}{21} + 4^2 \times \frac{4}{21} + 5^2 \times \frac{5}{21} + 6^2 \times \frac{6}{21} \right) - \left(\frac{13}{3} \right)^2 \\ &= \frac{441}{21} - \frac{169}{9} = \frac{140}{63} = \frac{20}{9}. \end{aligned}$$

隨堂練習

袋中裝有大小相同、編號 $1, 2, 3, 4$ 的球各一顆，自袋中任取兩顆球，且每球被取到的機會均等。隨機變數 X 表示取出兩顆球中的最大編號，求 X 的期望值、變異數與標準差。

(三) 期望值、變異數與標準差的性質

設 X 為隨機變數且其機率分布表如表 (a)。若 $Y = aX + b$ (其中 a, b 為常數)，即將 X 的每個取值乘以 a 再加 b ，則 Y 也會是隨機變數，且每一個 Y 的取值 $y_i = ax_i + b$ 出現的機率也會與 x_i 出現的機率相同，如表 (b)。

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

表 (a)

y	ax_1+b	ax_2+b	$\dots$	ax_n+b
$P(Y=y)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

表 (b)

上述的隨機變數 X 與 Y 有著線性變換 $Y=aX+b$ 的關係，那麼此時兩者的期望值與標準差會有怎樣的關係呢？利用期望值的定義，可得隨機變數 Y 的期望值

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= (ax_1+b)p_1 + (ax_2+b)p_2 + \dots + (ax_n+b)p_n \\
 &= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) + b(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \\
 &= aE(X) + b.
 \end{aligned}$$

同樣方法可推導出 $Y=aX+b$ 的變異數與標準差，請見附錄一。

期望值、變異數與標準差的性質

若 X 為隨機變數且 a, b 為常數，則 $Y=aX+b$ 也會是隨機變數，且滿足

- (1) $E(Y) = aE(X) + b$ 。
- (2) $\text{Var}(Y) = a^2\text{Var}(X)$ 。
- (3) $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$ 。

利用上面的性質，來看下面的例子。

例題 8

同時丟兩枚均勻的硬幣一次，每出現一枚正面可得 200 元，每出現一枚反面可得 100 元。設隨機變數 X 表示正面出現的枚數； Y 表示所得的金額。

- (1) 求 X 的期望值 $E(X)$ 與標準差 $\sigma(X)$ 。
- (2) 已知 X 與 Y 的關係可表示成 $Y=aX+b$ ，求 a, b 的值。
- (3) 利用 (1) 與 (2)，求 Y 的期望值 $E(Y)$ 與標準差 $\sigma(Y)$ 。

解

- (1) 因為 X 表示正面出現的枚數，所以 X 所有可能的取值為 0, 1, 2，其機率分布表如下。

正面出現的枚數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{C_0^2}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{C_1^2}{2^2} = \frac{1}{2}$	$\frac{C_2^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

故期望值

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1。$$

變異數

$$\text{Var}(X) = (0-1)^2 \times \frac{1}{4} + (1-1)^2 \times \frac{1}{2} + (2-1)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}，$$

標準差

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

(2) 因為 X 的取值 0, 1, 2 分別對應到 Y 的取值 200, 300, 400，且

$$Y = aX + b，$$

所以

$$\begin{cases} b = 200 \\ a + b = 300 \\ 2a + b = 400 \end{cases}。$$

解得 $a = 100$, $b = 200$ 。

(3) 由 (1) 的結果與 (2) 的關係式 $Y = 100X + 200$ ，得

$$E(Y) = E(100X + 200) = 100E(X) + 200 = 100 \times 1 + 200 = 300 \text{ (元)}；$$

$$\sigma(Y) = \sigma(100X + 200) = 100\sigma(X) = 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2} \text{ (元)}。$$

隨堂練習

已知隨機變數 X 滿足 $E(-2X+3)=47$, $\text{Var}(-2X+3)=196$ ，求 X 的期望值 $E(X)$ 、變異數 $\text{Var}(X)$ 與標準差 $\sigma(X)$ 。

當隨機變數 X 所有可能的取值為無限多個時，此處介紹的期望值、變異數與標準差的性質亦適用。

1 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

- ☐ (1) 丟一枚均勻硬幣三次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數，則 $P(X=0)=0$ 。
- ☐ (2) 若隨機變數 X 所有可能的取值為 $1, 2$ ，則 $P(X=1)+P(X=2)=1$ 。
- ☐ (3) 若隨機變數 X 的期望值 $E(X)=2$ ，且 $Y=-2X+3$ ，則 $E(Y)=-4$ 。

一、基礎題

- 1 從 $1, 2, 3, 4, 5$ 中任取兩個相異的數字，並令隨機變數 X 表示取到偶數的個數。
 - (1) 寫出 X 所有可能的取值。
 - (2) 描述 $X=0$ 所表示的事件。
- 2 袋中有紅球 4 顆、白球 2 顆。從袋中取出 2 顆球，且每球被取到的機會均等。令隨機變數 X 表示取出的紅球數，回答下列問題。
 - (1) 寫出 X 所有可能的取值。
 - (2) 求機率 $P(X=2)$ 的值。
 - (3) 求機率 $P(X \geq 1)$ 的值。

- 3 甲、乙兩人各從 1 與 2 兩個數字中任選一個數字，並令隨機變數 X 表示甲、乙所選數字的平方和。已知每個數字被選到的機會均等，求機率 $P(X \leq 7)$ 的值。
- 4 擲一粒公正骰子 2 次，令隨機變數 X 為點數 6 出現的次數，求隨機變數 X 的期望值。
- 5 箱中有黃球 2 顆、紅球 5 顆與白球 n 顆。從箱中取出一球，且每球被取到的機會均等。取出球的顏色為黃球、紅球與白球分別可得 500 元、200 元與 0 元，並令隨機變數 X 表示取出一球所得的金額。已知 X 的期望值為 100 元，求 n 的值。
- 6 袋中裝有大小相同的代幣 1 元與 5 元各 2 枚。從袋中任取 2 枚代幣，並令隨機變數 X 表示取 2 枚代幣所得的金額。已知每個代幣被取到的機會均等，求 X 的期望值與標準差。

- 7 某射手準備 3 發子彈射擊一靶面。若命中靶面 1 發，則停止射擊，否則繼續射擊直到子彈用盡。已知該射手打靶的命中率為 $\frac{2}{3}$ ，令隨機變數 X 表示耗用子彈數，求 X 的期望值、變異數與標準差。

- 8 有一粒公正的特製骰子，其六個面分別為 0, 1, 1, 1, 1, 2 點。今投擲此骰子一次，可得到的金額為點數的 3 倍再加 5（元）。設隨機變數 X 表示擲骰子一次所出現的點數； Y 表示擲骰子一次所得到的金額。

- (1) 求 X 的期望值 $E(X)$ 與變異數 $\text{Var}(X)$ 。
- (2) 寫出 X 與 Y 的關係。
- (3) 求 Y 的期望值 $E(Y)$ 與變異數 $\text{Var}(Y)$ 。

二、進階題

- 9 設隨機變數 X 的機率分布表如下。

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{6}$

設 X 的期望值 $E(X) = \frac{4}{3}$ 。

- (1) 求實數 a, b 的值。
- (2) 求隨機變數 X 的變異數 $\text{Var}(X)$ 。

- 10 有 100 元、200 元、500 元的紅包袋各一個。由甲、乙兩人依序各抽取 1 個紅包袋，抽取後不放回，且每個紅包袋被抽取的機會均等。設隨機變數 X 表示甲、乙兩人紅包金額的總和，求 X 的期望值。

- 11 籃球校隊甄選隊員流程如下：參加者先在 A 處投第一球，接著在 B 處投第二球；若這兩球都進球，則停止投籃，否則最後在 B 處投第三球。已知在 A 與 B 兩處每投進一球分別得 3 分與 2 分，且某生在 A 與 B 兩處的命中率分別為 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{2}{3}$ 。設隨機變數 X 表示該生甄選時所得的分數。

- (1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。
- (2) 求機率 $P(X > 3)$ 的值。
- (3) 求 X 的期望值。