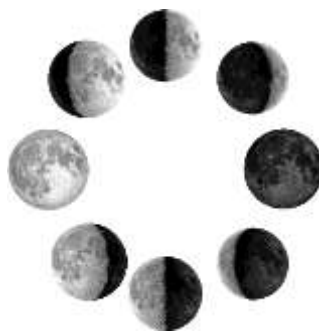


2 三角函數的圖形

月有陰晴圓缺，每天看到的月亮都不太一樣，而且是有規律、週期性地循環。如果長期觀察月亮，並以時間（天）為 x 軸、可看見的月亮表面積比例（%）為 y 軸（例如若某日可看見的月亮表面積比例為 $0.7 = 70\%$ ，則呈現於 y 軸上 70 的位置），在坐標平面上繪圖，所得到的圖形將會是與正弦函數相關的圖形。

本單元將逐一介紹正弦、餘弦與正切函數的圖形，並探討它們的特性。



▲圖 1

甲 正弦與餘弦函數的圖形

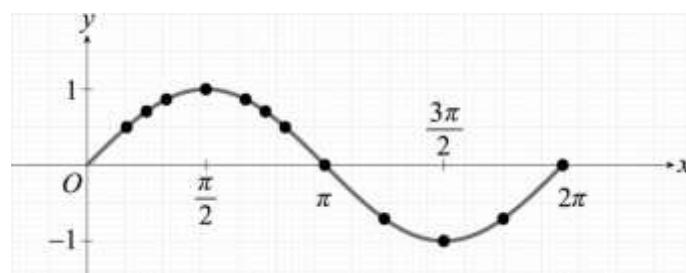
在各三角比都有定義的情形下，給定一個廣義角 x ， $\sin x$ 、 $\cos x$ 與 $\tan x$ 的值都隨之唯一確定；因此它們都是 x 的函數，依序稱為正弦函數，餘弦函數與正切函數。接下來我們先介紹正弦與餘弦函數的圖形，並藉此討論它們的特性。

(一) 正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形

描繪函數圖形最直接的方法就是描點法。首先對某些特殊的 x 值（徑）求出其對應的函數值 $y = \sin x$ ，列表如下。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

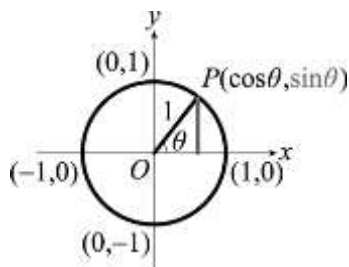
接著，利用計算機算出上表中 x, y 的（近似）值，再將點 (x, y) 逐一標示於坐標平面上。如果描點數夠多，並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形（如圖 2 所示）。



▲圖 2

除此之外，也可以利用單位圓來描繪正弦函數的圖形。

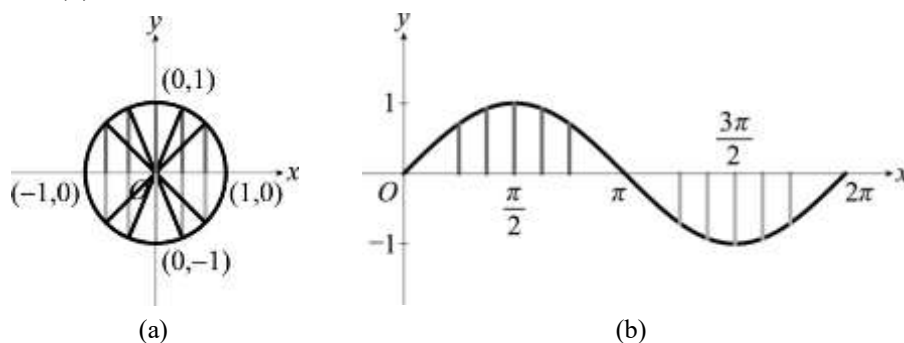
首先，在坐標平面上，以原點 O 為圓心，作一單位圓，再以 x 軸正向為始邊，作一廣義角 θ ，如圖 3 所示。因為廣義角 θ 的終邊與單位圓交於 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ，所以 $\sin\theta$ 是 P 點的 y 坐標。



▲圖 3

接著，當 θ 由 0 逐漸增加到 2π 時， P 點會繞單位圓一圈，此時 P 點的 y 坐標（即 $\sin\theta$ 值）的變化情形可用圖 4(a) 中的線段顏色（紅色表正，綠色表負）與長短（ $\sin\theta$ 的絕對值愈大，長度愈長）來表示。

最後，利用這些 P 點的 y 坐標，就可描繪出函數 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形，如圖 4(b) 所示。

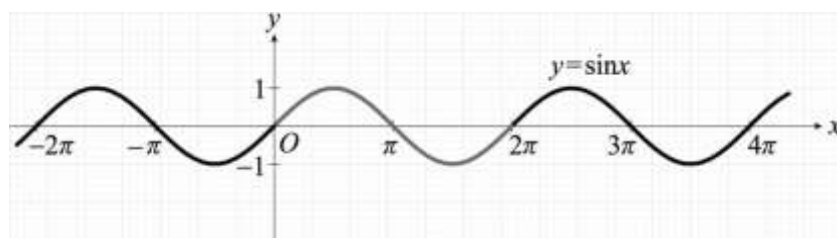


▲圖 4

無論從描點或是用單位圓的方式，都可觀察正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形有以下的現象：

- (1) 當 x 從 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時， $y = \sin x$ 的值從 0 增加到 1 。
- (2) 當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時， $y = \sin x$ 的值從 1 減少到 0 。
- (3) 當 x 從 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時， $y = \sin x$ 的值從 0 減少到 -1 。
- (4) 當 x 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時， $y = \sin x$ 的值從 -1 增加到 0 。

由同界角的換算公式 $\sin(2\pi + x) = \sin x$ 可知：當變數 x 的值增加 2π 時，正弦函數的值會重複的出現；因此， $y = \sin x$ 在 $2\pi \leq x \leq 4\pi$ 上的圖形與在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的圖形完全相同，其餘範圍以此類推。也就是說，只要把 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上所畫的圖形複製並逐次向右及向左平移 2π 單位，就可得到 $y = \sin x$ 的全部圖形（如圖 5 所示）。



▲圖 5

像這樣圖形會重複出現的函數，我們稱函數 $y = \sin x$ 為週期函數。又 $y = \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內的圖形沒有重複，且將其複製並向右及向左平移 2π 單位的倍數可得 $y = \sin x$ 的全部圖形，我們稱 2π 是函數 $y = \sin x$ 的週期。

在函數關係中， x 取值的範圍稱作該函數的定義域，而其對應值 y 的範圍稱作該函數的值域。由圖 5 觀察發現：正弦函數的定義域為全體實數 \mathbb{R} ，且值域在 -1 與 1 之間（含端點）。

接著再討論正弦函數 $y = \sin x$ 的特性：

- (1) 定義域：因為對任意實數 x ， $\sin x$ 都有定義，所以其定義域為全體實數 \mathbb{R} 。
- (2) 值域：因為正弦函數的值涵蓋每個在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為

$$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}。$$

- (3)週 期：由圖形知其週期為 2π 。
- (4)振 幅：從圖 5 中發現正弦函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為 1；此時稱正弦函數 $y = \sin x$ 的振幅為 1。
- (5)對稱性：由換算公式 $\sin(-x) = -\sin x$ 知其圖形對稱於原點。從圖 5 中發現， $y = \sin x$ 的圖形會對稱於所有通過波峰或波谷的鉛直線（如直線 $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ）。

值得一提的是：當自變數 x 的單位為時間時，頻率表示時間內事件重複發生的次數，即週期的倒數，常用的單位為赫茲。

隨堂練習

對於正弦函數 $y = \sin x$ 的敘述，選出所有正確的選項。

- (1) $y = \sin x$ 的最大值是 1
- (2) $y = \sin x$ 的最小值是 0
- (3) $y = \sin x$ 的週期是 2π
- (4) $y = \sin x$ 的圖形對稱於 y 軸。

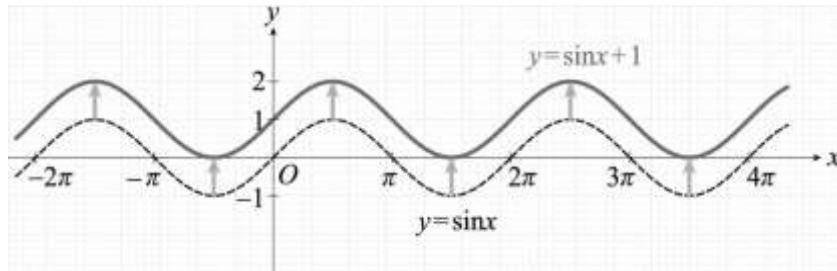
藉助 $y = \sin x$ 的圖形及圖形平移的概念，可以畫出與 $y = \sin x$ 相關的函數之圖形。

例題 1

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

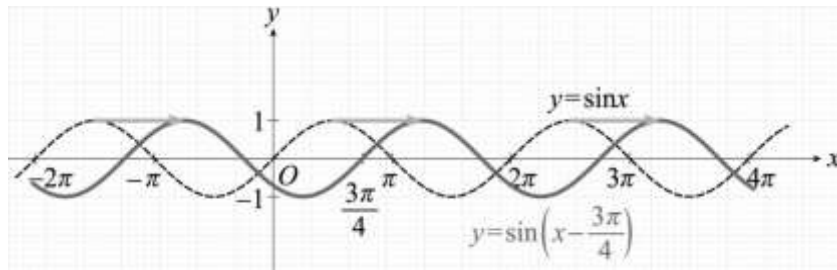
(1) $y = \sin x + 1$ 。 (2) $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 。

解 (1) 因為對每一個 x , $y = \sin x + 1$ 的值總是比 $y = \sin x$ 多 1，所以 $y = \sin x + 1$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形向上平移 1 單位得到，如下圖所示。



故函數 $y = \sin x + 1$ 的週期是 2π ，最大值為 2，最小值為 0。

(2) 觀察 $x = \frac{3\pi}{4}$ 代入 $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的值與 $x = 0$ 代入 $y = \sin x$ 的值相等；事實上，將 $x = t + \frac{3\pi}{4}$ 代入 $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的值與 $x = t$ 代入 $y = \sin x$ 的值相等；因此 $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位得到，如下圖所示。

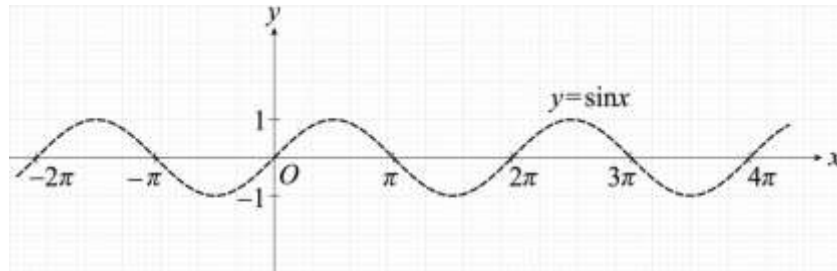


故函數 $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ 的週期是 2π ，最大值為 1，最小值為 -1。

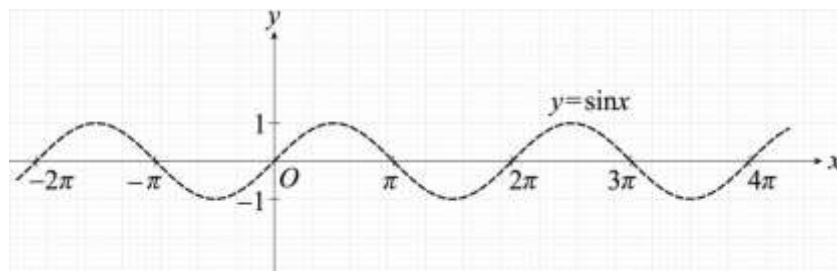
隨堂練習

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

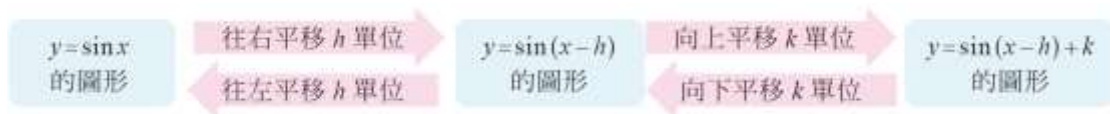
(1) $y = \sin x - 1$ 。



(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。



關於正弦函數圖形平移的概念，我們以流程圖表示如下。



例如：函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，向上平移 2 單位得到。

利用以上的流程圖來練習正弦函數圖形的平移。

例題 2

試問 $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ 的圖形如何由 $y = \sin x$ 的圖形平移得到？選出所有正確的選項。

- (1) 往左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位 (2) 往右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位
(3) 往左平移 $\frac{5\pi}{4}$ 單位 (4) 往右平移 $\frac{5\pi}{4}$ 單位。
-

解 因為

$$y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

所以 $y = \sin\left(x - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 的圖形可由

$$y = \sin x \text{ 的圖形往右平移 } -\frac{3\pi}{4} \text{ 單位得到，}$$

也就是說，其圖形可由

$$y = \sin x \text{ 的圖形往左平移 } \frac{3\pi}{4} \text{ 單位得到。}$$

又因為同界角的三角比會相等，即

$$y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\left(x - \frac{5\pi}{4}\right),$$

所以 $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ 的圖形也可由

$$y = \sin x \text{ 的圖形往右平移 } \frac{5\pi}{4} \text{ 單位得到。}$$

故選(1)(4)。

隨堂練習

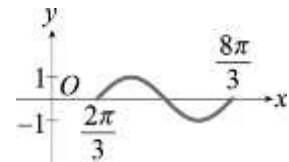
試問 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的圖形如何由 $y = \sin x$ 的圖形平移得到？選出所有正確的選項。

- (1) 往左平移 $\frac{\pi}{5}$ 單位 (2) 往右平移 $\frac{\pi}{5}$ 單位
(3) 往左平移 $\frac{9\pi}{5}$ 單位 (4) 往右平移 $\frac{9\pi}{5}$ 單位。

來練習從圖形判斷函數的平移。

例題 3

已知右圖為 $y = \sin(x - h)$ 一個週期的圖形，其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。

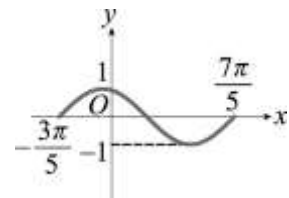


解 因為 $y = \sin(x - h)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 h 單位得到，所以從題目的圖形可知：

$$h = \frac{2\pi}{3}。$$

隨堂練習

已知右圖為 $y = \sin(x + h)$ 一個週期的圖形，其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 h 的值。



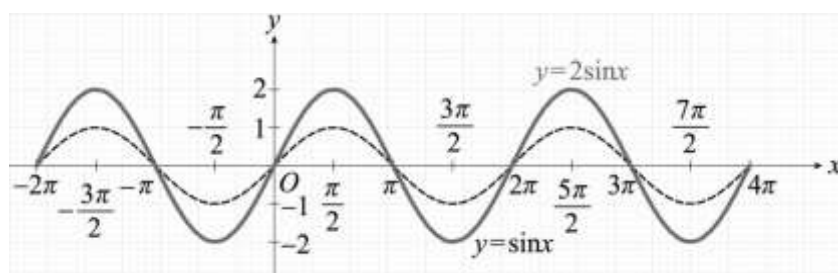
藉助 $y = \sin x$ 的圖形及圖形伸縮的概念，來畫出與 $y = \sin x$ 相關的函數之圖形。

例題 4

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

- (1) $y = 2\sin x$ 。 (2) $y = \sin 2x$ 。

解 (1) 因為對每一個 x , $y = 2\sin x$ 的值總是 $y = \sin x$ 的 2 倍，所以 $y = 2\sin x$ 圖形振幅為 $y = \sin x$ 圖形振幅的 2 倍，如下圖所示。

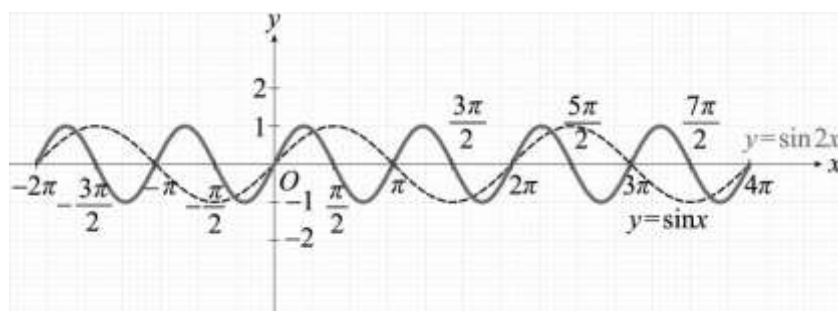


故函數 $y = 2\sin x$ 的週期是 2π ，最大值為 2，最小值為 -2。

- (2) 觀察 $x = \frac{\pi}{4}$ 代入 $y = \sin 2x$ 的值與 $x = \frac{\pi}{2}$ 代入 $y = \sin x$ 的值相等；事實上，

將 $x = \frac{t}{2}$ 代入 $y = \sin 2x$ 的值與 $x = t$ 代入 $y = \sin x$ 的值相等；因此 $y = \sin 2x$

的週期只有 $y = \sin x$ 的 $\frac{1}{2}$ ，如下圖所示。

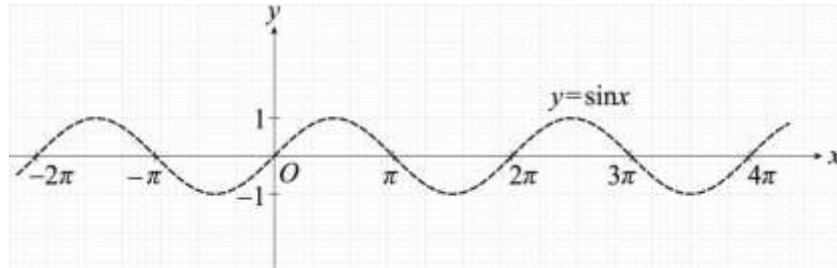


故函數 $y = \sin 2x$ 的週期是 π ，最大值為 1，最小值為 -1。

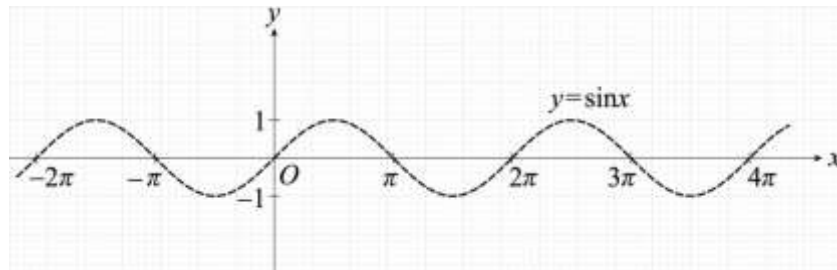
隨堂練習

利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y = \frac{1}{2} \sin x$ 。



(2) $y = \sin \frac{x}{2}$ 。



關於正弦函數圖形伸縮的概念，我們以流程圖表示如下：



例如：函數 $y = 3\sin 2x$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形鉛直伸縮為原來的 3 倍（振幅變為 3），水平伸縮為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍（週期變為 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ）後得到。

利用以上的流程圖來練習正弦函數圖形的伸縮。

例題 5

求 $y = 4 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ 的週期、最大值及最小值。

解 根據圖形伸縮的概念，得函數 $y = 4 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ 的

$$\text{振幅為 } 4, \text{ 週期為 } \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi。$$

故最大值為 4，最小值為 -4。

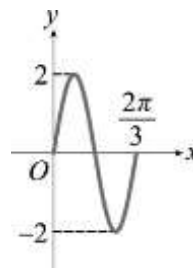
隨堂練習

已知 $y = \sin bx$ 的週期為 3π ，其中 $b > 0$ ，求 b 的值。

來練習從圖形判斷函數的伸縮。

例題 6

已知右圖為 $y = a \sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $a > 0, b > 0$ ，求 a 與 b 的值。



解 根據圖形伸縮的概念，得函數 $y = a \sin bx$ 的

$$\text{振幅為 } a, \text{ 週期為 } \frac{2\pi}{b}；$$

又由圖形可知：函數 $y = a \sin bx$ 的

$$\text{振幅為 } 2, \text{ 週期為 } \frac{2\pi}{3}。$$

故得 $a = 2, b = 3$ 。

隨堂練習

已知右圖為 $y = \sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $b > 0$ ，求 b 的值。

