

1-3 多項式的乘除運算

1 多項式的乘法運算

2 多項式的除法運算

3 綜合應用

主題 1 多項式的乘法運算

我們在 1-2 節學過多項式的加減運算，接著來看多項式的乘除運算。

因為文字符號可以代表數，所以數的乘法運算規則也同樣適用於文字符號：

(1) 連續幾個 x 相乘時，可用指數形式來簡記。

例如： $x \cdot x = x^2$

$$x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

(2) 乘法有交換律和結合律，所以文字符號和數字相乘時，也可任意調換順序相乘。

例如： $4x \cdot x = 4 \cdot x \cdot x = 4 \cdot x^2 = 4x^2$

$$2x \cdot 3x^2 = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3 = 6x^3$$

學習時光機

若 $a \neq 0$ ，且 m 、 n 為正整數或 0，則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

1. 單項式的乘法

在計算單項式乘以單項式時，是將係數與文字符號分開相乘，然後把係數寫在文字符號前面。

例 1 單項式 \times 單項式 學習內容 A-8-3

計算下列各式。

$$(1) 6x \cdot \frac{1}{2}x$$

$$(2) (-5x) \cdot 2x^2$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) 6x \cdot \frac{1}{2}x &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \\ &= 3 \cdot x^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (-5x) \cdot 2x^2 &= (-5) \cdot 2 \cdot x \cdot x^2 \\ &= (-10) \cdot x^3 \\ &= -10x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \left(\frac{1}{2}x\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \\ &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式。

$$\begin{aligned} (1) (-7x) \cdot 5x \\ = -35x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (-5x)^2 \\ = 25x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{1}{2}x \cdot \left(-\frac{4}{5}x^2\right) \\ = -\frac{2}{5}x^3 \end{aligned}$$

2. 多項式的乘法

若要計算一個單項式與多項式的乘積，可利用分配律的規則來計算。

例 2 單項式×多項式 學習內容 A-8-3

計算下列各式。

$$(1) 3x(x+2)$$

解 (1) $3x(x+2)$

$$\begin{aligned} &= 3x \cdot x + 3x \cdot 2 \\ &= 3x^2 + 6x \end{aligned}$$

$$(2) (4x-3)(-2x)$$

(2) $(4x-3)(-2x)$

$$\begin{aligned} &= 4x \cdot (-2x) - 3 \cdot (-2x) \\ &= -8x^2 + 6x \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式。

$$(1) -2x(5x+2)$$

$$= -10x^2 - 4x$$

$$(2) (-2x+3)(-3x)$$

$$= 6x^2 - 9x$$

接著，我們再來看看多項式相乘。根據分配律可以得知：

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

同類項合併

另外，我們也可以用直式乘法的方式來計算。

〈方法一〉 由最高次項開始計算

$$\begin{array}{r} x+2 \\ \uparrow \times \uparrow \\ \times) x+3 \\ \hline x^2+2x \\ +3x+6 \\ \hline x^2+5x+6 \end{array}$$

〈方法二〉 由常數項開始計算

$$\begin{array}{r} x+2 \\ \uparrow \times \uparrow \\ \times) +3 \\ \hline +3x+6 \\ +2x \\ \hline x^2+5x+6 \end{array}$$

無論使用上面哪一種直式乘法， $(x+2)(x+3)$ 的計算結果都是 x^2+5x+6 。

例 3 多項式×多項式學習內容 A-8-3

計算 $(x^2-x+1)(x+2)$ 。

解 1 橫式：

$$(x^2-x+1)(x+2)$$

$$=x^3+2x^2-x^2-2x+x+2$$

$$=x^3+x^2-x+2$$

解 2 直式：

〈方法一〉 由最高次項開始計算

$$\begin{array}{r} x^2-x+1 \\ \times) x+2 \\ \hline x^3-x^2+x \\ 2x^2-2x+2 \\ \hline x^3+x^2-x+2 \end{array}$$

〈方法二〉 由常數項開始計算

$$\begin{array}{r} x^2-x+1 \\ \times) x+2 \\ \hline 2x^2-2x+2 \\ x^3-x^2+x \\ \hline x^3+x^2-x+2 \end{array}$$

隨堂練習

計算下列各式。

(1) $(x+2)(-2x+1)$

$$= -2x^2+x-4x+2$$

$$= -2x^2-3x+2$$

(2) $(x-1)(x^2+x+1)$

$$= x^3+x^2+x-x^2-x-1$$

$$= x^3-1$$

由以上可知，一次式與一次式的乘積為二次式；

而一次式與二次式的乘積為三次式。

在做直式的多項式乘法時，如果有缺項的部分，要補上 0。

例 4 有缺項的多項式乘法學習內容 A-8-3

計算 $(5x^2-4)(-2x+3)$ 。

解 1 橫式：

$$(5x^2-4)(-2x+3)$$

$$= -10x^3 + 15x^2 + 8x - 12$$

解 2 直式：

〈方法一〉由最高次項開始計算

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 0x - 4 \\ \times) - 2x + 3 \\ \hline -10x^3 + 0x^2 + 8x \\ 15x^2 + 0x - 12 \\ \hline -10x^3 + 15x^2 + 8x - 12 \end{array}$$

〈方法二〉由常數項開始計算

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 0x - 4 \\ \times) - 2x + 3 \\ \hline 15x^2 + 0x - 12 \\ -10x^3 + 0x^2 + 8x \\ \hline -10x^3 + 15x^2 + 8x - 12 \end{array}$$

隨堂練習

計算 $(3x^2+2)(-4x-1)$ 。

$$\begin{aligned} &(3x^2+2)(-4x-1) \\ &= -12x^3 - 3x^2 - 8x - 2 \end{aligned}$$



數學好好玩 解謎說故事

解謎遊戲又稱「益智遊戲」，主要是要解開遊戲內一連串既定的問題，來獲得謎底。請翻到書末 P.[3]「解謎說故事」，根據既定的算式，並利用所學的多項式四則運算之概念，一起來解開故事的謎底吧！

例 5 利用乘法公式做多項式的乘法 **學習內容 A-8-3**

利用乘法公式計算下列各式。

(1) $(3x+4)^2$

(2) $(2x-5)^2$

(3) $(4x+7)(4x-7)$

解 (1) 將 $3x$ 看成 a 、 4 看成 b ，利用和的平方公式計算：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

(2) 將 $2x$ 看成 a 、 5 看成 b ，利用差的平方公式計算：

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

(3) 將 $4x$ 看成 a 、 7 看成 b ，利用平方差公式計算：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$(4x+7)(4x-7) = (4x)^2 - 7^2 = 16x^2 - 49$$

隨堂練習

利用乘法公式計算下列各式。

(1) $(4x+3)^2$

$$= (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2$$

$$= 16x^2 + 24x + 9$$

(2) $(5-2x)^2$

$$= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2x + (2x)^2$$

$$= 25 - 20x + 4x^2$$

$$(或 4x^2 - 20x + 25)$$

(3) $(2y+9)(2y-9)$

$$= (2y)^2 - 9^2$$

$$= 4y^2 - 81$$

由例 5(2)和隨堂練習(2)的結果，發現 $(2x-5)^2 = (5-2x)^2$ 。事實上，對任意兩個多項式 A 、 B 而言， $(B-A)^2 = [- (A-B)]^2 = (A-B)^2$ 。

主題 2 多項式的除法運算

我們學了多項式的乘法之後，接著來看看多項式的除法。

我們知道 $3x \cdot 2x = 6x^2$ ，因此當 $\square \cdot 2x = 6x^2$ 時，

可知 $\square = (6x^2) \div (2x) = 3x$ 。

$$\text{也可以這麼看 } (6x^2) \div (2x) = \frac{6x^2}{2x} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{x}} = 3x。$$

學習時光機

若 $a \neq 0$ ，且 $m、n$ 為正整數或 $0(m \geq n)$ ，則 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

1. 單項式的除法

在計算單項式除以單項式時，是將係數與文字符號分開相除，然後把係數寫在文字符號前面。

隨堂練習

計算下列各式。

(1) $(15x^2) \div (3x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{15x^2}{3x} \\ &= \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{x}} \\ &= 5x \end{aligned}$$

(2) $(-4x^3) \div (2x)$

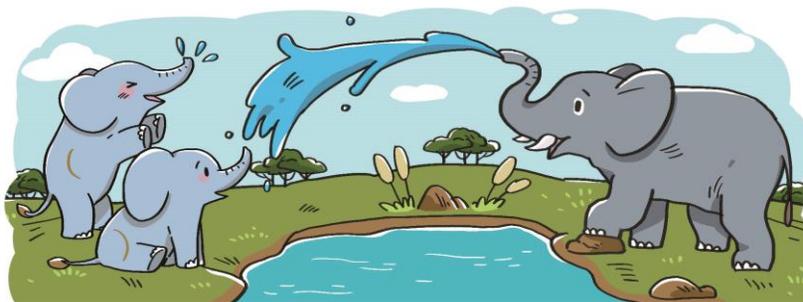
$$\begin{aligned} &= \frac{-4x^3}{2x} \\ &= \frac{\overset{2}{\cancel{-4}} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{x}} \\ &= -2x^2 \end{aligned}$$

(3) $(14x^2) \div (-4x^2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{14x^2}{-4x^2} \\ &= \frac{\overset{7}{\cancel{14}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\underset{2}{\cancel{-4}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} \\ &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

此外，如果單項式的係數是正的，我們會將括號省略。

例如： $(6x^2) \div (3x)$ 會寫成 $6x^2 \div 3x$ 。



2. 多項式的除法

前面所提到的都是單項式的除法，那多項式的除法要如何計算呢？
讓我們來看 $(x^2 + 2x) \div x$ 是怎麼算出來的。

x 要乘上多少才會等於 x^2 ?

$$x \cdot \square = x^2$$

$$\square = x^2 \div x = x$$

x 要乘上多少才會等於 $2x$?

$$x \cdot \square = 2x$$

$$\square = 2x \div x = 2$$

\rightarrow

$$\begin{array}{r} x \\ x \overline{) x^2 + 2x} \\ \underline{x^2} \\ 2x \end{array} \quad \leftarrow x \cdot x$$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x \overline{) x^2 + 2x} \\ \underline{x^2} \\ 2x \leftarrow (x^2 + 2x) - x^2 \\ \underline{2x} \leftarrow x \cdot 2 \\ 0 \end{array}$$

所以 $(x^2 + 2x) \div x = (x + 2)$ ，也可以把這個式子寫成
 $(x^2 + 2x) \div x = (x + 2) \cdots 0$ 。

如同數的除法，在前面的除法過程中，
 $x^2 + 2x$ 為被除式， x 為除式， $x + 2$ 為商式， 0 為餘式。

$$\begin{array}{r} \text{商式} \\ x + 2 \\ x \overline{) x^2 + 2x} \text{被除式} \\ \underline{x^2} \\ 2x \\ \underline{2x} \\ 0 \text{餘式} \end{array}$$

當餘式為 0 時，我們說除式可以整除被除式，所以 x 可以整除 $x^2 + 2x$ 。

在多項式除法中，除法要做到餘式的次數比除式的次數小或餘式為 0 ，才算完成。
此外，如同多項式的直式加減法與乘法運算，在做多項式的除法時，需將多項式按降冪排列。我們來看下面的例題。

例 6 多項式 \div 單項式 **學習內容 A-8-3**

求 $(4x^2 + 8x - 2)$ 除以 $4x$ 的商式與餘式。

解

$$\begin{array}{r} x \qquad \leftarrow 4x^2 \div 4x \\ 4x \overline{) 4x^2 + 8x - 2} \\ \underline{4x^2} \qquad \leftarrow 4x \cdot x \\ 8x - 2 \end{array} \quad \leftarrow 8x - 2 \text{ 的次數沒有比除式 } 4x \text{ 的次數小，所以要繼續計算}$$



$$\begin{array}{r} x + 2 \qquad \leftarrow 8x \div 4x \\ 4x \overline{) 4x^2 + 8x - 2} \\ \underline{4x^2} \\ 8x - 2 \\ \underline{8x} \qquad \leftarrow 4x \cdot 2 \\ -2 \end{array} \quad \leftarrow -2 \text{ 的次數比除式 } 4x \text{ 的次數小，結束計算}$$

得 $(4x^2 + 8x - 2)$ 除以 $4x$ 的商式為 $x + 2$ ，餘式為 -2 。

隨堂練習

求下列各多項式除法的商式與餘式。

(1) $(5x^2 + 10x) \div 5x$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ 5x \overline{) 5x^2 + 10x} \\ \underline{5x^2} \\ 10x \\ \underline{10x} \\ 0 \end{array}$$

商式為 $x + 2$ ，餘式為 0

(2) $(-6x^2 + 4x - 5) \div 2x$

$$\begin{array}{r} -3x + 2 \\ 2x \overline{) -6x^2 + 4x - 5} \\ \underline{-6x^2} \\ 4x - 5 \\ \underline{4x} \\ -5 \end{array}$$

商式為 $-3x + 2$ ，餘式為 -5

多項式相除時，先依降冪排列，如果有缺項的部分，要補上 0。

例 7 多項式÷多項式(除式為一次式)學習內容 A-8-3

求下列各多項式除法的商式與餘式。

(1) $(2x^2 - x - 6) \div (x - 2)$

(2) $(3x^2 + 5) \div (x - 4)$

解 (1)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} 2x^2 \div x \\ 2x + 3 \end{array} \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \begin{array}{l} 3x \div x \\ 3x - 6 \end{array} \\
 x-2 \overline{) 2x^2 - x - 6} \\
 \underline{2x^2 - 4x} \quad \leftarrow (x-2) \cdot 2x \\
 3x - 6 \\
 \underline{3x - 6} \quad \leftarrow (x-2) \cdot 3 \\
 0
 \end{array}$$

得 $(2x^2 - x - 6) \div (x - 2)$ 的商式為 $2x + 3$ ，餘式為 0。

(2) 將 $3x^2 + 5$ 寫成 $3x^2 + 0x + 5$ ，

$$\begin{array}{r}
 3x + 12 \\
 x-4 \overline{) 3x^2 + 0x + 5} \\
 \underline{3x^2 - 12x} \\
 12x + 5 \\
 \underline{12x - 48} \\
 53
 \end{array}$$

得 $(3x^2 + 5) \div (x - 4)$ 的商式為 $3x + 12$ ，餘式為 53。

隨堂練習

求下列各多項式除法的商式與餘式。

(1) $(2x^2 - x - 6) \div (2x + 3)$

(2) $(3x^2 - 1) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r}
 x - 2 \\
 2x+3 \overline{) 2x^2 - x - 6} \\
 \underline{2x^2 + 3x} \\
 -4x - 6 \\
 \underline{-4x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

商式為 $x - 2$ ，餘式為 0

將 $3x^2 - 1$ 寫成 $3x^2 + 0x - 1$

$$\begin{array}{r}
 3x + 3 \\
 x-1 \overline{) 3x^2 + 0x - 1} \\
 \underline{3x^2 - 3x} \\
 3x - 1 \\
 \underline{3x - 3} \\
 2
 \end{array}$$

商式為 $3x + 3$ ，餘式為 2

例 8 多項式÷多項式(除式為二次式)學習內容 A-8-3

求下列各多項式除法的商式與餘式。

(1) $(3x^2 - 8x + 2) \div (3x^2 - 9x + 1)$

(2) $(2x^2 + 4x - 5) \div (3x^2 - 4x)$

解 (1)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3x^2 - 9x + 1 \overline{) 3x^2 - 8x + 2} \\ \underline{3x^2 - 9x + 1} \\ x + 1 \end{array}$$

得 $(3x^2 - 8x + 2) \div (3x^2 - 9x + 1)$ 的商式為 1，餘式為 $x + 1$ 。

(2)

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \\ 3x^2 - 4x + 0 \overline{) 2x^2 + 4x - 5} \\ \underline{2x^2 - \frac{8}{3}x + 0} \\ -\frac{20}{3}x - 5 \end{array}$$

得 $(2x^2 + 4x - 5) \div (3x^2 - 4x)$ 的商式為 $\frac{2}{3}$ ，餘式為 $\frac{20}{3}x - 5$ 。

隨堂練習

求下列各多項式除法的商式與餘式。

(1) $(4x^2 - 2x + 1) \div (3x^2 + 2x + 1)$

(2) $(9x^2 + 14x) \div (5 + x^2 - 4x)$

$$\begin{array}{r} \frac{4}{3} \\ 3x^2 + 2x + 1 \overline{) 4x^2 - 2x + 1} \\ \underline{4x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}} \\ \frac{14}{3}x - \frac{1}{3} \end{array}$$

商式為 $\frac{4}{3}$ ，餘式為 $-\frac{14}{3}x - \frac{1}{3}$

$5 + x^2 - 4x$ 按降幂排列為 $x^2 - 4x + 5$

$$\begin{array}{r} 9 \\ x^2 - 4x + 5 \overline{) 9x^2 + 14x + 0} \\ \underline{9x^2 - 36x + 45} \\ 50x - 45 \end{array}$$

商式為 9，餘式為 $50x - 45$

在整數除法中， $38 \div 5$ 的商數為 7，餘數為 3，可以寫成

$$\begin{array}{ccccccc} 38 & = & 7 & \times & 5 & + & 3 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{被除數} & = & \text{商數} \times \text{除數} & + & \text{餘數} \end{array}$$

同樣的，在多項式除法中，

$(x^2 + 2x + 6) \div (x - 2)$ 的商式為 $x + 4$ ，餘式為 14，也可以寫成

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 + 2x + 6 & = & (x + 4)(x - 2) & + & 14 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{被除式} & = & \text{商式} \times \text{除式} & + & \text{餘式} \end{array}$$

來表示被除式、除式、商式及餘式的關係。

例 9 被除式 = 商式 × 除式 + 餘式 **學習內容 A-8-3**

如果一個多項式 A 除以 $x + 2$ 的商式為 $3x^2 + 1$ ，餘式為 4，試求此多項式 A 。

解 由被除式 = 商式 × 除式 + 餘式，

$$\begin{aligned} \text{得此多項式 } A &= (3x^2 + 1)(x + 2) + 4 \\ &= 3x^3 + 6x^2 + x + 2 + 4 \\ &= 3x^3 + 6x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

隨堂練習

如果一個多項式 B 除以 $3x^2 - 1$ 的商式為 $2x + 5$ ，餘式為 $x + 2$ ，試求此多項式 B 。

由被除式 = 商式 × 除式 + 餘式

$$\begin{aligned} \text{得此多項式 } B &= (2x + 5)(3x^2 - 1) + (x + 2) \\ &= 6x^3 - 2x + 15x^2 - 5 + x + 2 \\ &= 6x^3 + 15x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

例 10 被除式 = 商式 × 除式 + 餘式 **學習內容 A-8-3**

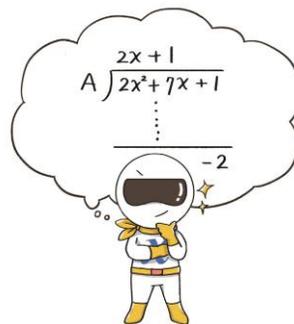
已知 $2x^2 + 7x + 1$ 除以另一個多項式 A 後，得到商式為 $2x + 1$ ，餘式為 -2 ，試求此多項式 A 。

解 由被除式 = 商式 × 除式 + 餘式，

可知除式 = (被除式 - 餘式) ÷ 商式，

$$\begin{aligned} \text{即此多項式 } A &= [(2x^2 + 7x + 1) - (-2)] \div (2x + 1) \\ &= [2x^2 + 7x + 3] \div (2x + 1) \\ &= x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ 2x + 1 \overline{) 2x^2 + 7x + 3} \\ \underline{2x^2 + x} \\ 6x + 3 \\ \underline{6x + 3} \\ 0 \end{array}$$



隨堂練習

已知 $8x^2 + 2x - 15$ 除以另一個多項式 B 後，得到商式為 $4x + 7$ ，餘式為 6 ，試求此多項式 B 。

由被除式 = 商式 × 除式 + 餘式

可知除式 = (被除式 - 餘式) ÷ 商式

$$\begin{aligned} \text{即此多項式 } B &= [(8x^2 + 2x - 15) - 6] \div (4x + 7) \\ &= [8x^2 + 2x - 21] \div (4x + 7) \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ 4x + 7 \overline{) 8x^2 + 2x - 21} \\ \underline{8x^2 + 14x} \\ -12x - 21 \\ \underline{-12x - 21} \\ 0 \end{array}$$

主題 3 綜合應用

多項式的四則運算規則與數的四則運算規則相同，都是按照由左到右、先乘除後加減、括號內先算的規則。我們來看下面的例題。

例 11 多項式的四則運算學習內容 A-8-3

計算下列各式。

$$(1)(x+2)^2+(2x+1)$$

$$(2)5(2x+1)^2-3(x+1)(x+3)$$

解 (1) $(x+2)^2+(2x+1)$

$$=(x^2+4x+4)+2x+1$$

$$=x^2+6x+5$$

$$(2)5(2x+1)^2-3(x+1)(x+3)$$

$$=5(4x^2+4x+1)-3(x^2+4x+3)$$

$$=20x^2+20x+5-3x^2-12x-9$$

$$=17x^2+8x-4$$



隨堂練習

計算下列各式。

$$(1)1-5(x-2)^2+2(x-1)$$

$$=1-5(x^2-4x+4)+2x-2$$

$$=1-5x^2+20x-20+2x-2$$

$$=-5x^2+22x-21$$

$$(2)(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)$$

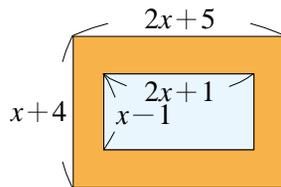
$$=(x^2+3x+2)-(x^2+7x+12)$$

$$=x^2+3x+2-x^2-7x-12$$

$$=-4x-10$$

例 12 多項式的應用 **學習內容 A-8-3**

右圖中，大長方形的長為 $2x+5$ 、寬為 $x+4$ ，小長方形的長為 $2x+1$ 、寬為 $x-1$ 。試以 x 的多項式表示橘色部分的周長與面積。



解 橘色部分的周長

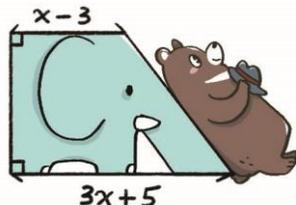
$$\begin{aligned} &= [(2x+5)+(x+4)] \times 2 + [(2x+1)+(x-1)] \times 2 \\ &= [3x+9] \times 2 + 3x \times 2 \\ &= 6x+18+6x \\ &= 12x+18 \end{aligned}$$

橘色部分的面積

$$\begin{aligned} &= (2x+5)(x+4) - (2x+1)(x-1) \\ &= (2x^2+13x+20) - (2x^2-x-1) \\ &= 2x^2+13x+20-2x^2+x+1 \\ &= 14x+21 \end{aligned}$$

隨堂練習

右圖是大象造型的梯形溜滑梯，若溜滑梯的上底為 $x-3$ 、下底為 $3x+5$ 、面積為 $2x^2+5x+2$ ，試以 x 的多項式表示此溜滑梯的高。



梯形面積 = (上底 + 下底) × 高 ÷ 2

高 = 梯形面積 × 2 ÷ (上底 + 下底)

$$\begin{aligned} &= (2x^2+5x+2) \times 2 \div [(x-3)+(3x+5)] \\ &= (4x^2+10x+4) \div [4x+2] \\ &= x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ 4x+2 \overline{) 4x^2+10x+4} \\ \underline{4x^2+2x} \\ 8x+4 \\ \underline{8x+4} \\ 0 \end{array}$$

重點整理

1 多項式的乘法運算

- (1) 單項式乘以單項式時，是將係數與文字符號分開相乘，然後把係數寫在文字符號前面。
- (2) 多項式乘以多項式，可利用分配律的規則來計算。
- (3) 在直式運算中，若遇到缺項的部分，要補上 0。

2 整除

在做多項式的除法運算時，當餘式為 0，我們稱除式可以整除被除式。

例 $(x^2 + 2x) \div x$ 的商式為 $x + 2$ ，餘式為 0，即 x 可以整除 $x^2 + 2x$ 。

3 多項式的除法運算

在做多項式的除法運算時，

- (1) 除法要做到餘式的次數比除式的次數小或餘式為 0，才算完成。
- (2) 在直式運算中，若遇到缺項，該項係數要補 0。
- (3) 被除式 = 商式 \times 除式 + 餘式。

例 $(4x^2 - 15) \div (x + 2)$ 的商式為 $4x - 8$ ，餘式為 1，

$$\begin{array}{r} 4x - 8 \\ x + 2 \overline{) 4x^2 + 0x - 15} \\ \underline{4x^2 + 8x} \\ -8x - 15 \\ \underline{-8x - 16} \\ 1 \end{array}$$

1 ← 次數比除式的次數小

也可以寫成 $4x^2 - 15 = (4x - 8)(x + 2) + 1$ 。

自我評量

1. 計算下列各式。

(1) $(x-2)(x+3)$

$$=x^2+3x-2x-6$$

$$=x^2+x-6$$

P.36 例 3

(2) $(3x-5)^2$

$$=(3x)^2-2 \cdot 3x \cdot 5+5^2$$

$$=9x^2-30x+25$$

P.38 例 5

2. 求下列各多項式除法的商式與餘式。

(1) $(2x^2-x-3) \div (x+4)$

P.42 例 7

$$\begin{array}{r} 2x-9 \\ x+4 \overline{) 2x^2-x-3} \\ \underline{2x^2+8x} \\ -9x-3 \\ \underline{-9x-36} \\ 33 \end{array}$$

商式為 $2x-9$ ，餘式為 33

(2) $(8x^2+4) \div (x^2+1)$

P.43 例 8

$$\begin{array}{r} 8 \\ x^2+0x+1 \overline{) 8x^2+0x+4} \\ \underline{8x^2+0x+8} \\ -4 \end{array}$$

商式為 8，餘式為 -4

3. 已知 $10x^2+39x+m$ 能被 $5x+2$ 整除，則 m 為多少？

P.40 內文

$$\begin{array}{r} 2x+7 \\ 5x+2 \overline{) 10x^2+39x+m} \\ \underline{10x^2+4x} \\ 35x+m \\ \underline{35x+14} \\ m-14 \end{array}$$

因為是整除，所以 $m-14=0$

即 $m=14$

4. 若一個多項式 A 除以 $x+1$ 的商式為 $2x+1$ ，餘式為 -2 ，試求此多項式 A 。

P.44 例 9

由被除式 = 商式 \times 除式 + 餘式

得此多項式 $A = (2x+1)(x+1) + (-2)$

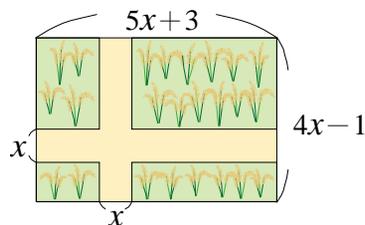
$$=2x^2+2x+x+1-2$$

$$=2x^2+3x-1$$

5. 計算 $(3x-1)^2-(2x+1)(2x-1)$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (9x^2 - 6x + 1) - (4x^2 - 1) \\ &= 9x^2 - 6x + 1 - 4x^2 + 1 \\ &= 5x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

6. 阿農分到一大塊長方形田地，田地中縱向、橫向各被開闢一條寬為 x 公尺的小路，其餘作為稻田耕作，如圖所示。若測量得知田地長為 $5x+3$ 公尺，寬為 $4x-1$ 公尺，則阿農能耕作的稻田面積有多少平方公尺？(以 x 的多項式表示)



可將四塊稻田編號為甲、乙、丙、丁(如圖 1)

再想像將乙、丙、丁三塊稻田往左、上移(如圖 2)

則阿農能耕作的稻田面積

$$\begin{aligned} &= [(5x+3)-x][(4x-1)-x] \\ &= (4x+3)(3x-1) \\ &= 12x^2 + 5x - 3 \text{ (平方公尺)} \end{aligned}$$



圖 1

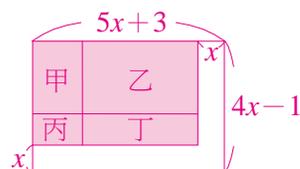


圖 2

P.47 例 12

挑錯題

以下是小妍和小翊計算「 $(3x^2-1) \div (3x-1)$ 的商式與餘式」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出錯誤的部分，並寫出正確的解法。

正確解法如下：

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3} \\ 3x-1 \overline{) 3x^2 + 0x - 1} \\ \underline{3x^2 - x} \\ x - 1 \\ - \frac{1}{3} \\ \hline - \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{商式為 } x + \frac{1}{3}$$

$$\text{餘式為 } -\frac{2}{3}$$

小妍：

$$\begin{array}{r} x \\ 3x-1 \overline{) 3x^2 + 0x - 1} \\ \underline{3x^2 - x} \\ x - 1 \end{array}$$

商式為 x ，餘式為 $x-1$

小翊：

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{3} \\ 3x-1 \overline{) 3x^2 + 0x - 1} \\ \underline{3x^2 - x} \\ x - 1 \\ - \frac{1}{3} \\ \hline - \frac{4}{3} \end{array}$$

商式為 $x + \frac{1}{3}$ ，餘式為 $-\frac{4}{3}$

一題多解

已知 $(2x+3)(ax+b)$ 乘開化簡後是 $2x^2+5x+3$ ，求 a 、 b 之值。



利用分配律乘開再比較係數

$$\begin{aligned}(2x+3)(ax+b) &= 2ax^2 + 2bx + 3ax + 3b \\ &= 2ax^2 + (2b+3a)x + 3b\end{aligned}$$

當兩多項式相等時，其同類項係數相等，

$$\text{與 } 2x^2 + 5x + 3 \text{ 比較係數可得 } \begin{cases} 2a=2 \\ 3b=3 \end{cases},$$

即 $a=1$ 、 $b=1$ 。



利用多項式的除法

$$(2x+3)(ax+b) = 2x^2 + 5x + 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

因此 $ax+b$ 可看成是 $(2x^2+5x+3) \div (2x+3)$ 的商式，

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 2x+3 \overline{) 2x^2+5x+3} \\ \underline{2x^2+3x} \\ 2x+3 \\ \underline{2x+3} \\ 0 \end{array}$$

由 $(2x^2+5x+3) \div (2x+3) = x+1$ ，

可得 $2x^2+5x+3 = (2x+3)(x+1)$ ，

與 $\textcircled{1}$ 式比較可得 $a=1$ 、 $b=1$ 。