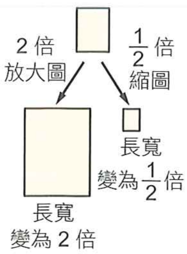
1-3 縮放與相似

1 縮放圖形　　2 相似多邊形
3 相似三角形判別性質

主題 1 縮放圖形

學習時光機

我們在小學曾學過放大圖和縮圖：



在國小我們曾經利用影印機或其他方法，將一個圖形進行放大或縮小（簡稱縮放），**圖形經過縮放後可能大小不一樣，但形狀是維持不變的**。

如圖 1，如果用手電筒（光源）照射一個圖形，在牆上會產生它的一個影子，圖形與影子就是縮放的關係。此時手電筒（光源）、圖形上的點和影子上的對應點會在同一條直線上。

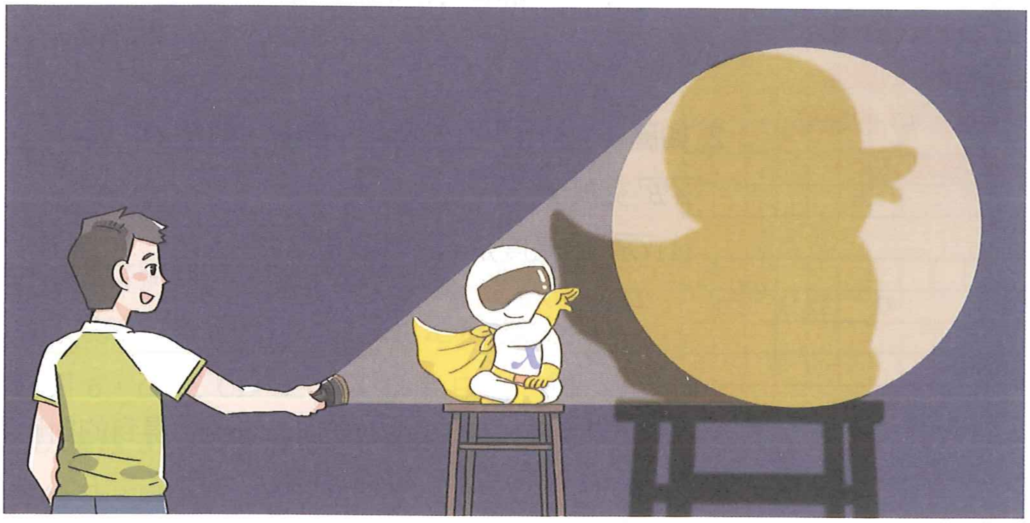


圖 1

如果在平面上固定一點 O，再任意取一點 A，我們可以在 $\overrightarrow{OA}$ 上找到一點 A'，使得 $\overline{OA'}=3\overline{OA}$，如圖 2。

我們說 A' 是以 O 為中心，將 A 與 O 的距離縮放為 3 倍的對應點，而 $\overline{OA'}：\overline{OA}$ 的比值 3 就稱為縮放倍率。

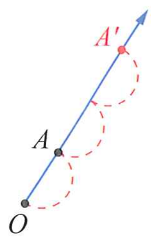


圖 2

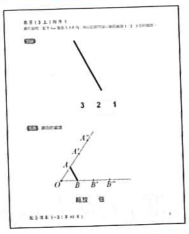
學習內容

S-9-1 相似形：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。

S-9-2 三角形的相似性質：三角形的相似判定（AA、SAS、SSS）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（～）。

線段的縮放

附件 1



[1]學生可搭配附件操作，更容易理解線段的縮放。

[2]先討論由線段兩端點縮放後的圖形與原圖形的關係。再確認 $\overline{AB}$ 的縮放圖形就是 $\overline{A'B'}$。

問題探索 線段的縮放《可搭配附件 1 操作》[1][2]

已知 O、A、B 為平面上三點：

1. 如圖 3，以 O 為中心，分別將 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 縮放 2 倍後，得到對應點 A' 與 B'，連接 $\overline{AB}$ 與 $\overline{A'B'}$。

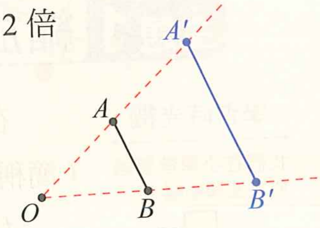


圖 3

(1) $\overline{OA}:\overline{OA'}$ 與 $\overline{OB}:\overline{OB'}$ 是否相等？

是，都是 $1:2$

(2) $\overline{A'B'}$ 與 $\overline{AB}$ 是否平行？

是，$\because \overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}=1:2$，$\therefore \overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$

(3) $\overline{A'B'}$ 的長度是 $\overline{AB}$ 的幾倍？

2 倍

2. 如圖 4，在 $\overline{AB}$ 上任意找一點 P，連接 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overline{A'B'}$ 交於 P' 點。

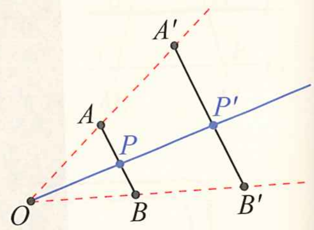


圖 4

(1) $\overline{OP'}$ 的長度是 $\overline{OP}$ 的幾倍？

2 倍，$\because \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$，又 $\overline{OA}:\overline{OA'}=1:2$

$\therefore \overline{OP}:\overline{OP'}=1:2$

(2) 以 O 為中心，將 $\overline{OP}$ 縮放 2 倍後，得到的對應點是 P' 嗎？

是，由(1)可知 $\overline{OP'}:\overline{OP}$ 的比值為 2

即 P' 是以 O 為中心，將 $\overline{OP}$ 縮放 2 倍得到的對應點

3. 如圖 5，$\overline{A'B'}$ 上任一點 Q'，連接 $\overrightarrow{OQ'}$，與 $\overline{AB}$ 交於 Q 點，那麼以 O 為中心，將 $\overline{OQ}$ 縮放幾倍後，得到的對應點是 Q'？

2 倍

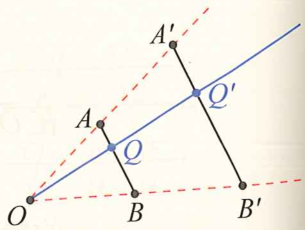


圖 5

由前面問題探索可知：

(1) 若以 O 為中心，則在 $\overline{AB}$ 上任找一點 P，將 $\overline{OP}$ 縮放 2 倍後，得到的對應點都會落在 $\overline{A'B'}$ 上。

(2) 若以 O 為中心，則對於 $\overline{A'B'}$ 上任一點 Q'，都可以在 $\overline{AB}$ 上找到一點 Q，使得 $\overline{OQ'}=2\overline{OQ}$。

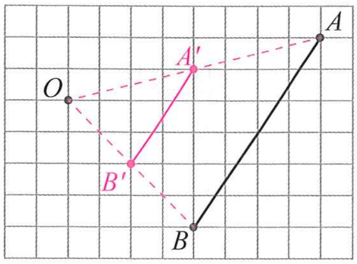
此時 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後的圖形就是 $\overline{A'B'}$，且 $\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$，$\overline{A'B'}=2\overline{AB}$。

當要畫一條線段經過縮放後的圖形，只要將此線段兩端點與縮放中心的距離進行縮放，再將兩個對應點連接成線段，就得到縮放後的圖形。

隨堂練習

畫出以 O 為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的圖形。

$\overline{A'B'}$ 即為所求



而當縮放中心恰好在線段上，要畫出此線段縮放後的圖形，方法也是一樣的。如圖 6，O 在 $\overline{CD}$ 上，以 O 為中心，將 $\overline{CD}$ 縮放 3 倍的圖形也是一條線段，且與原線段在同一直線上，即 $\overline{C'D'}$。

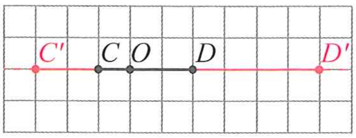


圖 6

Key point

線段的縮放

1. 線段經過縮放後形成的圖形仍然是線段。
2. 縮放後的線段與原線段平行(或兩線段在同一直線上)。
3. 縮放 r 倍後的線段長度為原來的 r 倍。

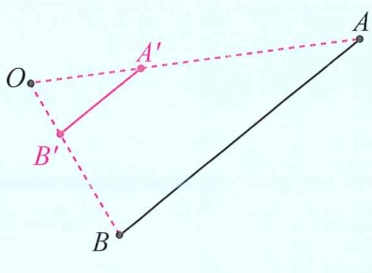
同樣的，**射線**經過縮放後形成的圖形仍然是射線，且縮放後的射線與原來的射線平行(或兩射線在同一直線上)；**直線**經過縮放後形成的圖形仍然是直線，且縮放後的直線與原來的直線平行(或兩直線重合)。[3]

[3] 關於線段的縮放我們會進一步討論長度的變化，但射線與直線的縮放則不需要。

重新布題

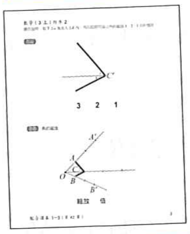
畫出以 O 為中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 $\frac{1}{3}$ 倍後的圖形。

答：$\overline{A'B'}$ 即為所求



角的縮放

附件 2



1 學生可搭配附件操作，更容易理解角的縮放。

2 角的兩邊可看成兩條射線，因此可延續前一頁射線的縮放來觀察角的縮放。

問題探索 角的縮放《可搭配附件 2 操作》

如圖 7，已知$\angle ACB$ 及內部一點 O。以 O 為中心，分別將 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 縮放 3 倍後，得到對應點 A'、B'、C'，連接 $\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{C'B'}$。

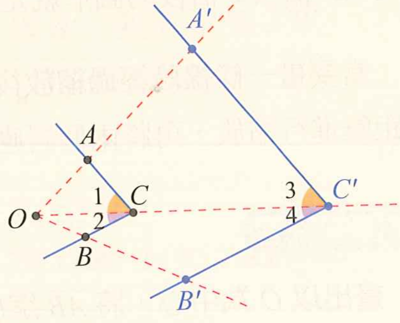


圖 7

1. $\angle ACB$ 與$\angle A'C'B'$ 的兩邊會互相平行嗎？

   射線縮放後會互相平行

   $\therefore \overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{C'A'}$，$\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{C'B'}$

2. $\angle 1$ 與$\angle 3$ 度數相同嗎？

   $\because \overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{C'A'}$

   $\therefore \angle 1 = \angle 3$（同位角相等）

3. $\angle 2$ 與$\angle 4$ 度數相同嗎？

   $\because \overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{C'B'}$

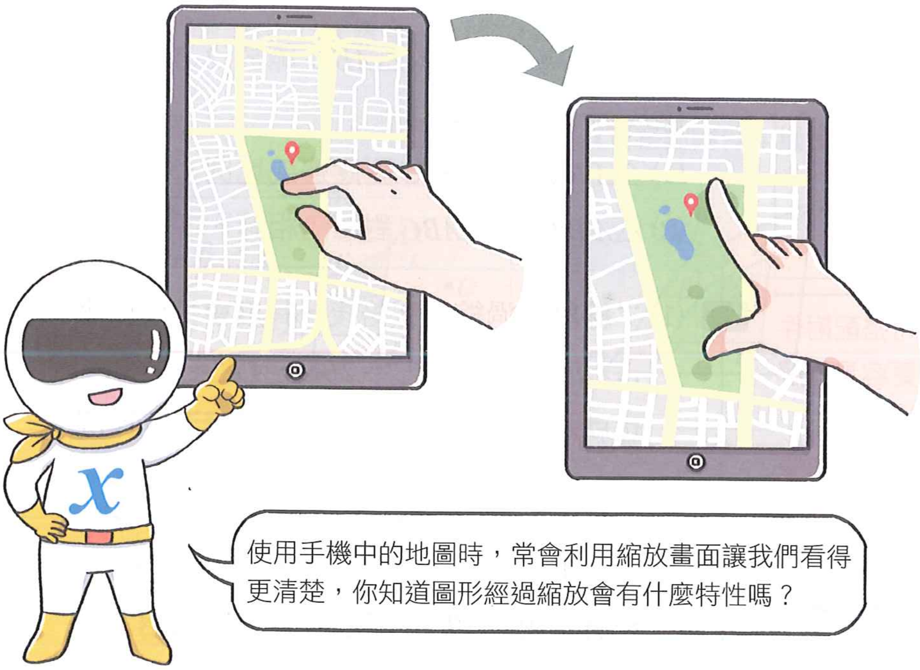
   $\therefore \angle 2 = \angle 4$（同位角相等）

4. $\angle A'C'B'$ 與$\angle ACB$ 度數相同嗎？

   $\angle A'C'B' = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 = \angle ACB$

由上面問題探索可知，$\angle ACB$ 縮放 3 倍後的圖形就是$\angle A'C'B'$，且$\angle A'C'B' = \angle ACB$。事實上，**一個角經過縮放後，角的度數不變**。

多邊形的縮放



將一個平面圖形上所有的點與縮放中心的距離經過同一縮放倍率縮放後，所得到的對應點形成的圖形，就稱為原來圖形的縮放圖形。因為線段經過縮放之後仍然是線段，所以要畫一個多邊形的縮放圖形，只要先將多邊形的各頂點與縮放中心的距離縮放後，再將對應點用線段連接，就是它的縮放圖形。

如圖 8，以 O 為中心，要畫出 $\triangle ABC$ 縮放 2 倍後的圖形，只要先將 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 以 O 為中心縮放 2 倍後，分別得到對應點 D、E、F，再以線段連接，則 $\triangle DEF$ 就是 $\triangle ABC$ 縮放 2 倍後的圖形。

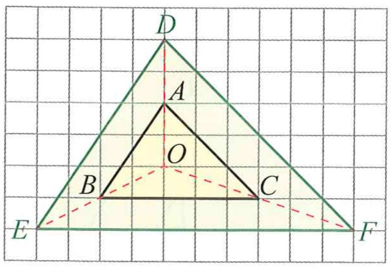
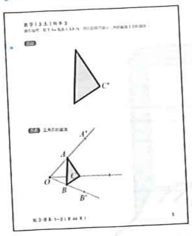


圖 8

例 1　三角形縮放後與原圖形間的關係《可搭配附件 3 操作》 學習內容 S-9-1

附件 3



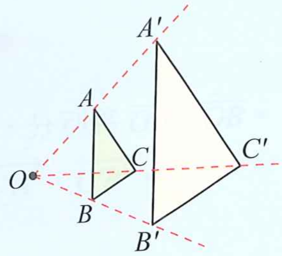
1 學生可搭配附件操作，更容易理解三角形的縮放。

2 透過舉例，讓學生了解圖形縮放 n 倍後，長度變為 n 倍，但角度不變。

如右圖，O 為△ABC 外部一點。若△$A'B'C'$ 是以 O 為中心，將△ABC 縮放 2 倍後的縮放圖形。試說明：

(1) △$A'B'C'$ 與△ABC 對應邊成比例。

(2) △$A'B'C'$ 與△ABC 對應角相等。



說明　(1) ∵線段經過縮放 2 倍後，長度會變成原來的 2 倍，

∴$\overline{A'B'}=2\overline{AB}$，$\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，$\overline{A'C'}=2\overline{AC}$，

也就是說△$A'B'C'$ 與△ABC 對應邊成比例。

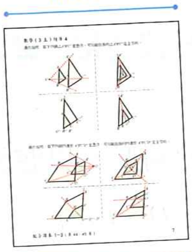
(2) ∵角度經過縮放後，其對應的度數不變，

∴$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$，$\angle C'=\angle C$，

也就是說△$A'B'C'$ 與△ABC 對應角相等。

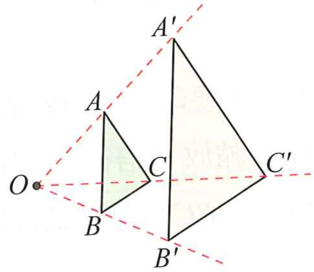
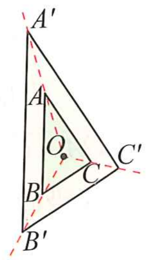
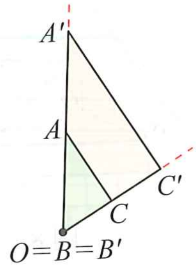
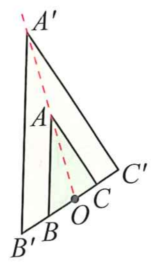
3 事實上，不管縮放中心是在三角形外部、內部、頂點或是邊上，縮放後的三角形與原來三角形對應邊成比例且對應角相等，如表 1 所示。

附件 4



3 透過舉例，讓學生了解中心可以在圖形外部、內部、頂點或邊上。

表 1　《可搭配附件 4 操作》

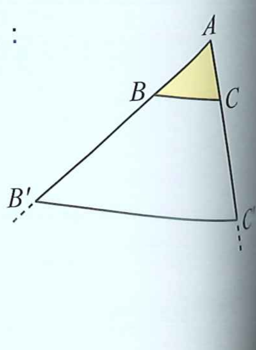
中心在三角形外部	中心在三角形內部
	
中心在頂點上	中心在邊上
	

重新布題

如右圖，若△$AB'C'$ 是以 A 為中心，將△ABC 縮放 3 倍後的縮放圖形。試說明：

(1) △$AB'C'$ 與△ABC 對應邊成比例。

(2) △$AB'C'$ 與△ABC 對應角相等。



以 O 為中心，將四邊形 $ABCD$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後得到四邊形 $A'B'C'D'$，可得四邊形 $A'B'C'D'$ 與四邊形 $ABCD$ 的對應邊成比例且對應角相等。如表 2，這四個圖中，雖然中心位置不同，但縮放後的四邊形 $A'B'C'D'$ 是全等的。

附件 4

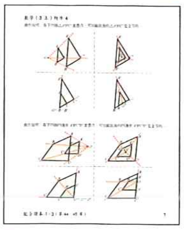
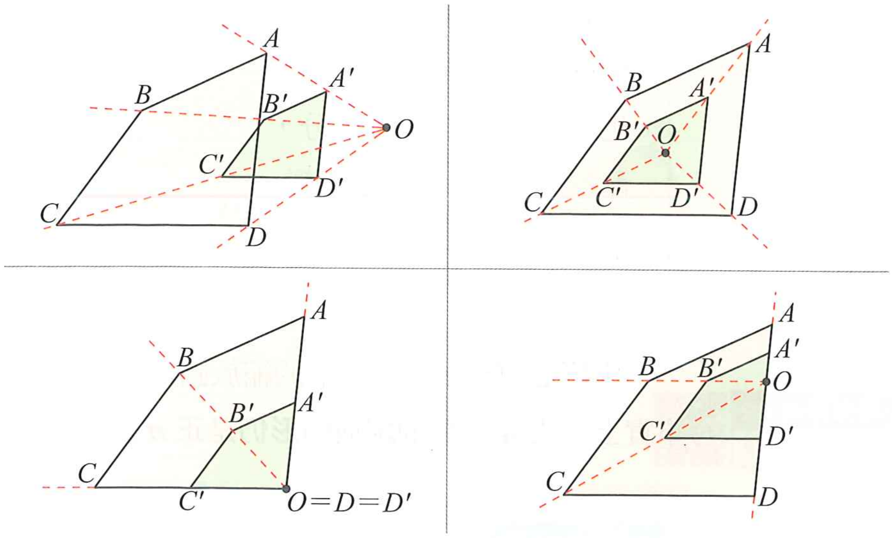


表 2　《可搭配附件 4 操作》



4 最後說明圖形縮放後與原圖形的關係，並作為相似重要的先備知識。

事實上，不管中心在哪裡，一個多邊形縮放 r 倍後，對應邊長都是原圖形的 r 倍，且對應角的度數與原圖形相等。也就是說，**不管中心在哪裡，將一個多邊形縮放 r 倍後所得的縮放圖形都會全等**。因此在討論多邊形縮放時，如果沒有必要，我們不會特別提及中心位置。

Key point

縮放圖形

平面上一個 n 邊形經過縮放後的縮放圖形仍為 n 邊形，且會與原圖形對應邊成比例、對應角相等。

答：(1) ∵線段經過縮放 3 倍後，長度會變成原來的 3 倍

∴$\overline{AB'}=3\overline{AB}$，$\overline{B'C'}=3\overline{BC}$，$\overline{AC'}=3\overline{AC}$

也就是說△$AB'C'$ 與△ABC 對應邊成比例

(2) ∵角度經過縮放後，其對應的度數不變

∴$\angle A=\angle A$，$\angle B'=\angle B$，$\angle C'=\angle C$

也就是說△$AB'C'$ 與△ABC 對應角相等