

主題2 多邊形

我們在國小已經認識許多圖形，如三角形、四邊形、五邊形、……，這些在平面上的幾何圖形，稱為**平面幾何圖形**。

如圖 5，把平面上的幾個點依序用線段連接起來，像這樣的圖形稱為**多邊形**。這些點都叫作多邊形的頂點，這些線段都叫作邊，相鄰的兩邊夾成一個內角。

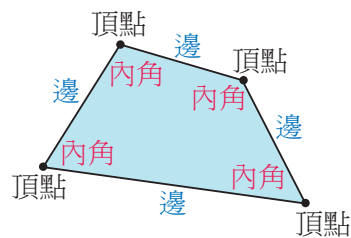


圖 5

習慣上，我們會按照多邊形的邊數來命名，如圖 6。

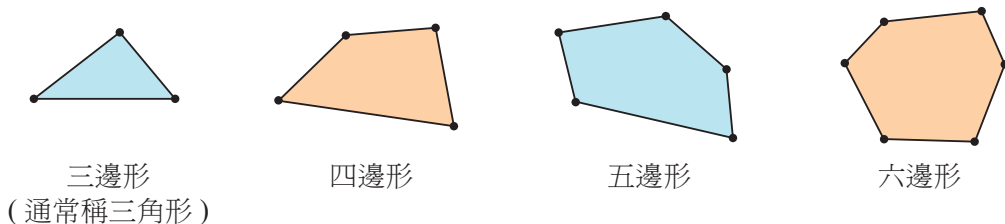


圖 6

如果一個多邊形的所有邊都等長，所有內角也相等，就稱為**正多邊形**，如圖 7。

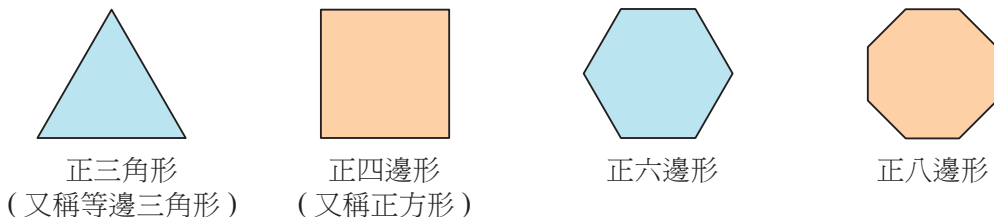


圖 7

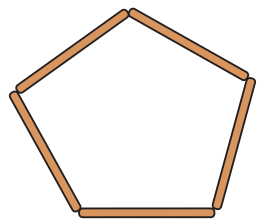
課外探索 P.249

◆七巧板



嫻嫻用五根長度相同的木棍圍出了一個五邊形，如右圖，這個五邊形是正五邊形嗎？為什麼？

五邊形雖然各邊長度相等，但內角的度數並沒有全部相等，所以這不是正五邊形。



重新布題

六邊形有 a 條邊、 b 個頂點、 c 個角，則 $a+b+c=?$

答：18

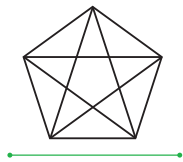
1 對角線性質在討論四邊形時是一個很方便的工具，但在這裡不需要多加闡述，評量時最多問到某個多邊形的對角線數就夠了，而且邊數盡量不要超過 8 邊，最好還要有附圖。在這裡不特別提出 n 多邊形的對角線數 = $\frac{n(n-3)}{2}$ 的公式。

◆ 搭配習作
P.63 第 1 題、
第 2 題

你知道嗎？

將正五邊形的 5 條對角線畫出來，可以形成一個星星的圖案，而這個星星就稱為「五角星 (pentagram)」。

古希臘有個以畢達哥拉斯為首的數學學派，更以外面圍上五邊形的五角星，作為他們學派的標誌。



要標示一個多邊形，可以利用它的頂點。

例如：圖 8 是一個四邊形，我們從任意一個頂點（如頂點 A ）開始，依順時針或逆時針方向，四個頂點依序為 A 、 B 、 C 、 D 或 A 、 D 、 C 、 B ，此四邊形就可標示為四邊形 $ABCD$ 或四邊形 $ADCB$ ，但不能標示為四邊形 $ACBD$ 或四邊形 $ABDC$ 。

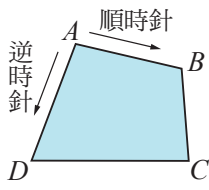


圖 8

同樣的，圖 9 是一個三角形，它的三個頂點分別為 A 、 B 、 C ，可標示為三角形 ABC （以符號 $\triangle ABC$ 標示）或三角形 ACB （以符號 $\triangle ACB$ 標示）。

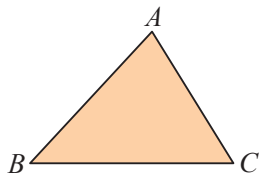


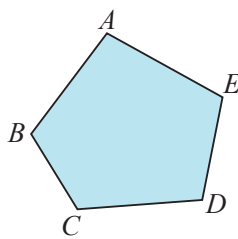
圖 9

隨堂練習

如右圖， A 、 B 、 C 、 D 、 E 為五邊形的五個頂點。下列哪一個標示不可以表示此五邊形？

- (A) 五邊形 $CBAED$
- (B) 五邊形 $DEABC$
- (C) 五邊形 $BECAD$

(C)



一個多邊形中，將兩個不相鄰頂點連接起來的線段稱為對角線，如圖 10， $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 是四邊形 $ABCD$ 的對角線。

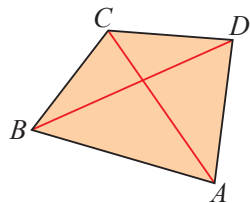
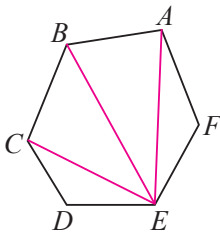


圖 10

隨堂練習

在下圖六邊形 $ABCDEF$ 中，畫出以 E 點為頂點的所有對角線。

如圖所示

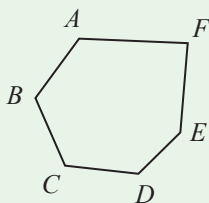


重新布題

如下圖， A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 為六邊形的六個頂點。下列哪一個標示不可以表示此六邊形？

- (A) 六邊形 $EFABCD$
- (B) 六邊形 $BCEADF$
- (C) 六邊形 $CDEFAB$

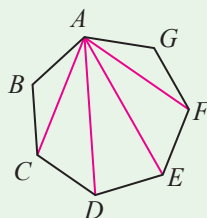
答：(B)



重新布題

在下圖七邊形 $ABCDEFG$ 中，以 A 點為頂點共可畫出幾條對角線？

答：4 條



主題3 垂直平分線與線對稱圖形

✓ 垂直平分線

垂直

當兩條直線（或線段）相交成直角（ 90° ）時，我們稱這兩條直線（或線段）互相垂直，交點就是**垂足**。通常以符號「 $\perp$ 」來標示垂直。如圖 11 中，沿著三角板直角兩邊畫出 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ ，此時 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 互相垂直於 O 點，可記為「 $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ 」，垂足為 O 點。

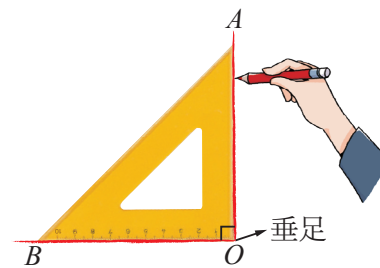


圖 11

如圖 12， A 為直線 L 外一點，可以利用三角板找到一點 B ，使得 $\overline{AB} \perp L$ ，垂足為 B 點。若在 L 上另找一些點（如 C 、 D 、 E ……），可以發現， A 點到 L 上任意一點所連接的各線段中，以 $\overline{AB}$ 為最短，我們稱 $\overline{AB}$ 為 A 點到直線 L 的距離。

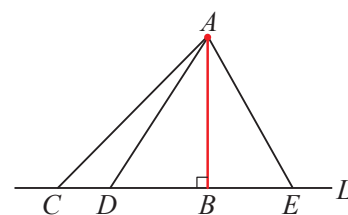
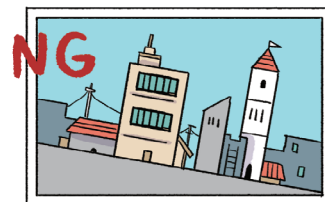
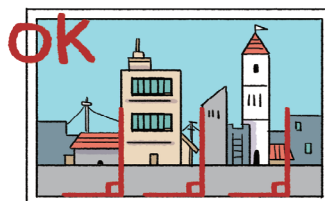
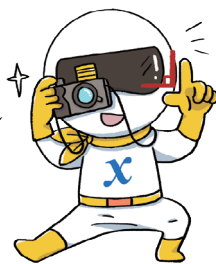


圖 12

攝影時可以利用「垂直」的原則，讓照片的協調度更好！這個技巧稱之為「垂直構圖法」，主要是讓物體與畫面的底線呈現一個垂直，讓畫面有支撐力，在視覺上可以帶來一種和諧與穩定感，讓照片更加美觀。



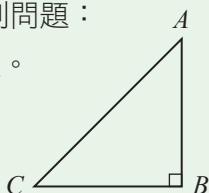
● 重新布題

右圖為一 $\triangle ABC$ ，回答下列問題：

(1) $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 互相垂直。

(2) 垂足為 B 點。

(3) $\angle ABC = 90$ 度。



● 重新布題

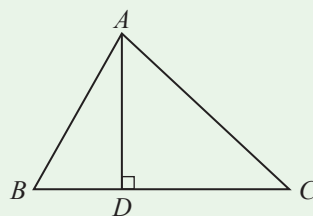
依右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，則下列哪一線段最短？

(A) $\overline{AB}$

(B) $\overline{AC}$

(C) $\overline{AD}$

答：(C)



垂直平分線

如圖 13，已知紙上有一線段 $\overline{AB}$ 。將 $\overline{AB}$ 對摺，使端點 A 、 B 疊合後再展開，設摺痕為 L ，那 L 和 $\overline{AB}$ 有什麼關係呢？

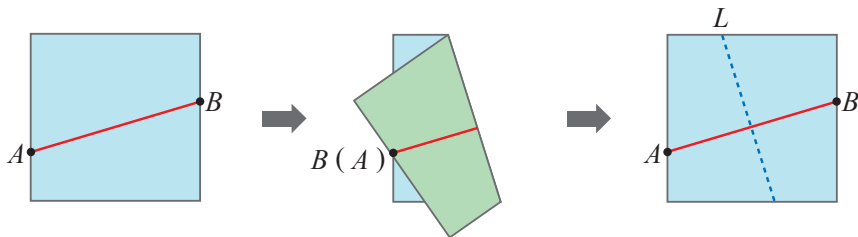


圖 13

① 我們先標示兩個夾角為 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ ，如圖 14。

因為 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 可以疊合，所以 $\angle 1 = \angle 2$ ，

又 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 加起來是一個平角 (180°)，

可知 $\angle 1 = \angle 2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ ，也就是說 $L \perp \overline{AB}$ 。

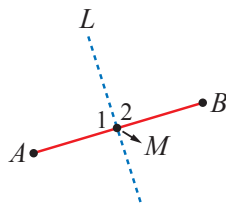


圖 14

② 將 L 與 $\overline{AB}$ 的交點標示為 M ，

因為 $\overline{AM}$ 與 $\overline{BM}$ 會疊合，所以 $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ 。

像這樣， M 是 $\overline{AB}$ 上一點，而且 $\overline{AM} = \overline{BM}$ ，

我們稱 M 點是 $\overline{AB}$ 的**中點**。

而直線 L 通過 $\overline{AB}$ 的中點 M 且與 $\overline{AB}$ 垂直，

我們稱直線 L 為 $\overline{AB}$ 的**垂直平分線**或**中垂線**，如圖 15。

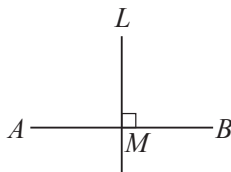


圖 15

隨堂練習

如右圖， $\overline{AB} = 10$ ，且 M 為 $\overline{AB}$ 的中點， N 為 $\overline{AM}$ 的中點，則 $\overline{AN}$ 、 $\overline{BN}$ 的長度各為多少？

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\text{所以 } \overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$$

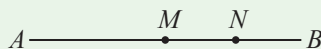
$$\overline{BN} = \overline{AB} - \overline{AN} = 10 - 2.5 = 7.5$$



重新布題

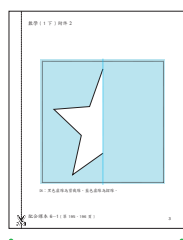
如右圖， $\overline{AB} = 16$ ，且 M 為 $\overline{AB}$ 的中點， N 為 $\overline{BM}$ 的中點，則 $\overline{AN}$ 、 $\overline{BN}$ 的長度各為多少？

答： $\overline{AN} = 12$ ， $\overline{BN} = 4$



1 教師可以多舉一些日常生活中線對稱的圖形，讓學生對線對稱圖形能更加了解。

2 在國小，學生已具備線對稱圖形的概念與找對稱軸及判斷線對稱圖形的能力，國中階段則著重在線對稱多邊形相關性質的討論。 附件 2



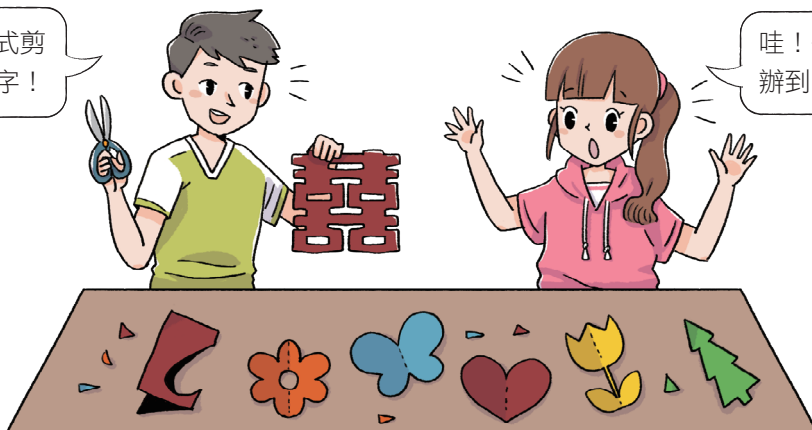
你知道嗎？

許多藝術品、建築物，都巧妙運用對稱來設計。對稱不僅是為了美觀，還有一定的科學道理，像是時鐘鐘面的對稱，可以保證指針移動的均勻性；飛機的對稱，才能使飛機在空中保持平衡。



✓ 線對稱圖形 《可搭配附件 2 操作》

我用對摺的方式剪了一個「囍」字！



哇！你怎麼辦到的？

其實剪紙藝術也蘊含了數學知識，讓我們透過下面的剪紙活動來探討對稱圖形。拿出附件 2，沿藍色虛線將紙張對摺，如圖 16-1，再用剪刀沿著黑色線剪開，再將剪下來的圖形攤開，得到圖 16-2。



圖 16-1

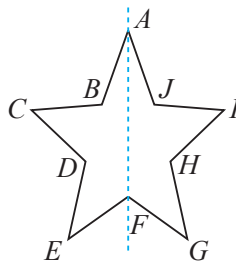


圖 16-2

課外探索 P.249

- ◆ 中國剪紙藝術
- ◆ 生活與自然中的對稱

將一個圖形沿著一條直線對摺，如果直線兩側的部分完全重疊，這樣的圖形稱為**線對稱圖形**，而這條對摺線稱為該圖形的**對稱軸**。圖 16-2 就是線對稱圖形， $\overleftrightarrow{AF}$ 是這個圖形的對稱軸。

以圖 16-2 為例，線對稱圖形中，

對應疊合的點稱為**對稱點**，如 C 點的對稱點是 I 點；

對應疊合的角稱為**對稱角**，如 $\angle C$ 的對稱角是 $\angle I$ ；

對應疊合的線段稱為**對稱線段**，如 $\overline{HG}$ 的對稱線段是 $\overline{DE}$ 。

而 A 點在對稱軸上，其對稱點是自己本身。

因為圖形可以對應疊合，所以 $\angle C = \angle I$ ； $\overline{HG} = \overline{DE}$ 。

事實上，**線對稱圖形中，對稱角相等、對稱線段相等。**

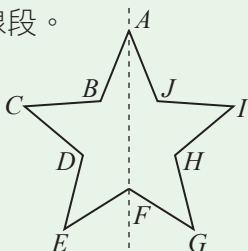


課本概念
認識線對稱圖形

● 重新布題

下圖為線對稱圖形，虛線是其對稱軸，依序找出 $\overline{HG}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{AJ}$ 的對稱線段。

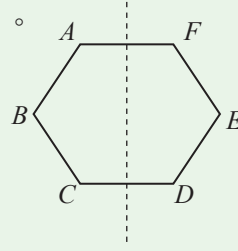
答： $\overline{DE}$ 、 $\overline{GF}$ 、 $\overline{AB}$



● 重新布題

下圖為線對稱圖形，虛線是其對稱軸，依序找出 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的對稱角。

答： $\angle F$ 、 $\angle E$ 、 $\angle C$



隨堂練習

圖 16-2 是以 $\overleftrightarrow{AF}$ 為對稱軸的線對稱圖形，則：

- (1) F 點的對稱點是 F 點，
 D 點的對稱點是 H 點。
- (2) 若 $\angle E = 40^\circ$ ，則 $\angle E$ 的對稱角為 $\angle G$ ，
且度數為 40 度。
- (3) 若 $\overline{AB} = 4$ 公分，則 $\overline{AB}$ 的對稱線段為 $\overline{AJ}$ ，
且長度為 4 公分。

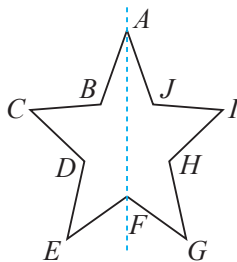


圖 16-2

1 教師可以向學生強調：線對稱圖形的對稱線段等長；對稱角相等；對稱點連線必與對稱軸垂直，且被對稱軸平分。

附件 2



線對稱圖形除了對稱角相等、對稱線段相等之外，還有什麼性質呢？我們來看下面的問題探索。

問題探索 線對稱圖形的性質 《可搭配附件 2 操作》 — 1 —

觀察附件 2 所剪下來的線對稱圖形，如圖 16-3，連接 $\overline{DH}$ ，與對稱軸 $\overleftrightarrow{AF}$ 交於 Q 點，則：

- (1) $\overline{DQ}$ 和 $\overline{HQ}$ 相等嗎？
相等
- (2) $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 都是 90° 嗎？
是
- (3) $\overleftrightarrow{AF}$ 是否為 $\overline{DH}$ 的垂直平分線？
是
- (4) $\overleftrightarrow{AF}$ 是否也為 $\overline{BJ}$ 、 $\overline{EG}$ 的垂直平分線呢？
是

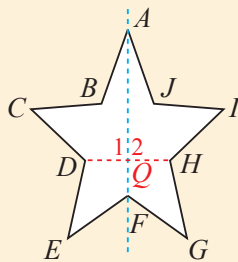


圖 16-3

由問題探索可知，將圖 16-3 的對稱點連接起來的線段，如 $\overline{DH}$ ，會與對稱軸 $\overleftrightarrow{AF}$ 互相垂直，且被對稱軸平分。

Key point

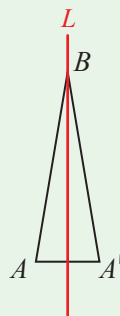
線對稱圖形的性質

線對稱圖形的對稱軸是任意兩對稱點連接線段的垂直平分線。

重新布題

以直線 L 為對稱軸，在直線 L 右側找出 A 點的對稱點 A' ，
若 $\angle A = 80^\circ$ ，則 $\angle A' = ?$

答：80°



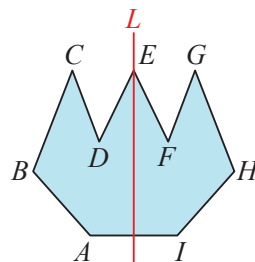
◆搭配習作
P.64 第3題

隨堂練習

右圖是以直線 L 為對稱軸的線對稱圖形，其中 A 、 B 、 C 、 D 的對稱點分別為 I 、 H 、 G 、 F ，則直線 L 不是 下列哪一個線段的垂直平分線？

- (A) $\overline{AI}$ (B) $\overline{CG}$ (C) $\overline{DH}$ (D) $\overline{BH}$

因為對稱軸是任意兩對稱點連接線段的垂直平分線
 A 點和 I 點互為對稱點， B 點和 H 點互為對稱點
 C 點和 G 點互為對稱點， D 點和 F 點互為對稱點
 因此直線 L 是 $\overline{AI}$ 、 $\overline{BH}$ 、 $\overline{CG}$ 、 $\overline{DF}$ 的垂直平分線
 而 D 點與 H 點不是對稱點
 故選(C)



數

學

好

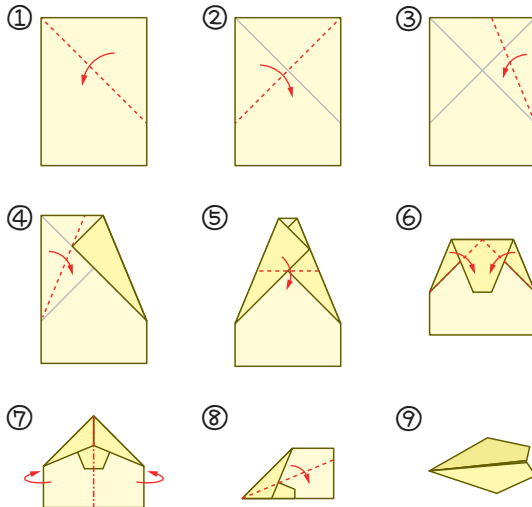
好

玩

金氏世界紀錄飛行最遠的紙飛機「蘇珊娜號」

摺紙飛機是童年時期都玩過的遊戲，世界各地更有許多紙飛機的飛行比賽，而奪得金氏世界紀錄飛行最遠的「蘇珊娜號」，甚至飛了 69.14 公尺之遠！其中有個摺紙的訣竅就是「對稱」，因為左右對稱的摺法，才能讓機身保持平衡、飛得更遠。

下圖是蘇珊娜號的摺紙步驟，拿張 A4 紙一起來試試！



完成了！試試你的「蘇珊娜號」飛多遠吧！

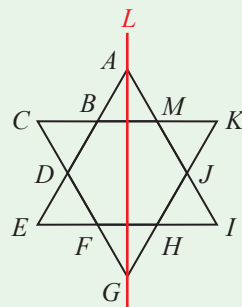


重新布題

右圖是以直線 L 為對稱軸的線對稱圖形，則直線 L 不是 下列哪一個線段的垂直平分線？

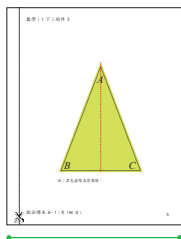
- (A) $\overline{BM}$ (B) $\overline{CK}$ (C) $\overline{FI}$ (D) $\overline{EI}$

答：(C)



等腰三角形是線對稱圖形嗎？它的對稱軸跟垂直平分線有什麼關係呢？我們來看下面的問題探索。

附件 3



問題探索 等腰三角形的對稱軸《可搭配附件 3 操作》

如圖 17， $\triangle ABC$ 是一個等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。取出附件 3，把 C 點摺向 B 點，摺痕如紅色虛線所示，並回答下列問題。

(1) 摺痕是否為 $\overline{BC}$ 的垂直平分線？

是

(2) 摺痕是否會通過 A 點？

是

(3) $\triangle ABC$ 是否為線對稱圖形？

是

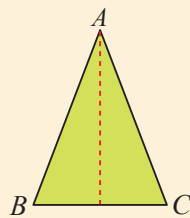
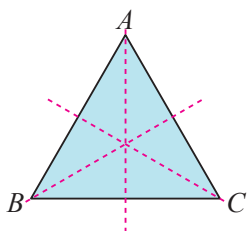


圖 17

由問題探索可知，等腰三角形是線對稱圖形，底邊的垂直平分線是其對稱軸，且會通過三角形的頂點。

隨堂練習

如下圖， $\triangle ABC$ 是正三角形，則它是否為線對稱圖形？如果是，請畫出它所有的對稱軸。



因為 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，所以 $\triangle ABC$ 是線對稱圖形
 $\overline{BC}$ 的垂直平分線是其對稱軸

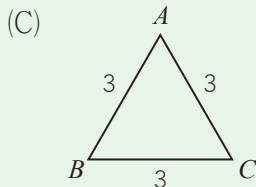
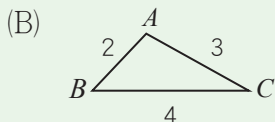
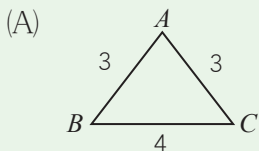
同理， $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的垂直平分線也是其對稱軸

因此 $\triangle ABC$ 三邊的垂直平分線皆為此圖形的對稱軸

要判斷一個圖形是否為線對稱圖形，則要試著找出這個圖形的對稱軸。我們來看下面的例題。

重新布題

若將下面各圖中的 B 點摺向 C 點重合，何者的摺線不會通過 A 點？



答：(B)