

③ 代數證明

對應能力指標 S-9-11



在漫畫中，博士提出問題：「偶數加奇數是奇數還是偶數呢？」，傑克很有自信的說是奇數，還舉了 2 個例子，但是光舉 2 個例子就能算是證明嗎？

奇數和偶數都有無限多個，舉更多的例子也不能證明偶數加奇數一定是奇數，但又舉不出一個「偶數加奇數是偶數」的例子，所以「偶數加奇數得到奇數」是一個猜測，為了說明此猜測是正確的，我們先來看看什麼是偶數和奇數。

「偶數」能被 2 整除，或者說「偶數」都是 2 的倍數，例如： $22=2\times 11$ 、 $24=2\times 12$ 、 $-6=2\times (-3)$ ，所以 22、24、-6 都是偶數，意即當 k 為整數時，所有表示為 $2k$ 形式的數皆為偶數。反之，偶數皆可寫成 $2k$ 的形式。

「奇數」被 2 除都餘 1，例如： $19=2\times 9+1$ 、 $5=2\times 2+1$ 、 $-7=2\times (-4)+1$ ，所以 19、5、-7 都是奇數，意即當 k 為整數時，所有表示為 $2k+1$ 形式的數皆為奇數。反之，奇數皆可寫成 $2k+1$ 的形式。



隨堂練習

1. 假設 a 、 b 為整數，寫出下列何者為奇數、何者為偶數。

(1) $2a+3$ 為 奇 數。

(2) $4b-6$ 為 偶 數。

$$(1) 2a+3 = 2a+2+1 = 2(a+1)+1$$

$$(2) 4b-6 = 2(2b-3)$$

2. 假設 k 、 n 為整數，填入適當的式子，並寫出下列何者為奇數、何者為偶數。

(1) $6k+1 = 2 \times \underline{3k} + 1$ ；所以 $6k+1$ 為 奇 數。

(2) $24n+22 = 2 \times \underline{(12n+11)}$ ；所以 $24n+22$ 為 偶 數。

根據 P148 博士與學生們對話中的猜測，以下來進行證明：

證明

假設 a 是偶數， a 可以寫成 $2m$ ，其中 m 是整數；

b 是奇數， b 可以寫成 $2n+1$ ，其中 n 是整數。

$$a+b = 2m+2n+1$$

$$= 2(m+n)+1$$

因為 $m+n$ 也是整數，所以 $2(m+n)+1$ 是奇數，

因此 $a+b$ 是奇數。



Thinking

已知奇數可以用 $2n+1$ 表示，則 $2n-1$ 是否也是奇數？

$$2n-1 = 2 \times (n-1) + 1,$$

因為 $n-1$ 為整數，

所以 $2n-1$ 為奇數。

例6 奇偶數的判別

搭配習作 P44 基礎題 6 自評 P155 第 4 題

已知 $3^2=9$ ， $5^2=25$ ， $13^2=169$ ，由這三個例子猜測「奇數的平方是奇數」，這個猜測正確嗎？如果正確，請證明它；如果不正確，請舉一個反例。

已知 a 是奇數。

求證 a^2 也是奇數。

證明 $\because a$ 是奇數，設 $a=2n+1$ ， n 是整數。

$$\begin{aligned}\therefore a^2 &= (2n+1)^2 \\ &= (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2n) + 1 \\ \therefore 2n^2 + 2n \text{ 為整數，故 } a^2 \text{ 是奇數。}\end{aligned}$$



隨堂練習

「任一個奇數乘以任一個偶數」你會猜測得到奇數還是偶數呢？
根據結論證明你的猜測是正確的。

已知 a 是奇數， b 是偶數。

求證 $a \times b$ 是 偶數（填偶數或奇數）。

證明 $\because a$ 是奇數， b 是偶數。

$\therefore$ 設 $a=2m+1$ ， $b=2n$ ， m 、 n 皆是整數。

$$\begin{aligned}a \times b &= (2m+1) \times \underline{2n} \\ &= \underline{4mn} + 2n \\ &= 2 \times (\underline{2mn} + n)\end{aligned}$$

$\therefore \underline{2mn} + n$ 是整數，故 $a \times b$ 是偶數。