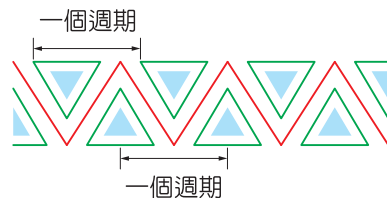


1-2 週期性數學模型

主題一 週期性現象

(配合課本 P.21~P.24)

1. 週期性現象指「周而復始」的規律現象。在美術、工藝或建築上，「重複」更是設計與形成美感的一種常見手法。
2. 函數的週期性就是一種模式的反覆出現。整個模式每重複一次，就稱為一個週期。



例題 1 生活中的週期

配合課本例題 1

有一家義大利麵餐廳推出自由配餐點，它有五種醬料與六種麵體提供客人自由選配。且店家每日會推出一組搭配做特價，若醬料是按照青醬、蛋奶醬、紅醬、咖哩醬、白醬的順序，而麵體是按照螺旋麵、直條麵、貝殼麵、天使麵、筆尖麵、寬扁麵的順序做配對。

- (1) 店家的特價組合最少隔多少天會出現相同的組合？
- (2) 若今天特價組合是「青醬＋天使麵」，則最快幾天後有「咖哩醬＋筆尖麵」的特價組合？

素養題

- 解**
- (1) 因為有 5 種醬料與 6 種麵體，所以店家共有 $5 \times 6 = 30$ 種不同的特價組合
故每隔 30 天會出現相同的特價組合
 - (2) 因為醬料每 5 天會輪流一次
所以 3 天後、8 天後、13 天後、18 天後、……會使用咖哩醬
又麵體是每 6 天會輪流一次
所以 1 天後、7 天後、13 天後、19 天後、……會使用筆尖麵
故最快 13 天後有「咖哩醬＋筆尖麵」的特價組合

類題

某宗教聖地在入門的廣場兩側，由入口處開始筆直地每隔 8 公尺就設立柱子裝飾該教七聖物做展示直到正殿門口。七種聖物分別為碑磬、金銀、瑪瑙、珊瑚、琉璃、琥珀和珍珠，依序輪流不斷地重複。已知在入口處(0 公尺處)為碑磬的柱子，若小芬現在站在離入口處 70 公尺的地方，請問：

- (1) 離她最近的兩個柱子分別展示什麼聖物？
- (2) 若到正殿門口恰好是最後一個柱子，且每種聖物都展示 7 次，則小芬還要走多遠的距離才會到達正殿？

- 解**
- (1) 因為每隔 8 公尺就有一個展示柱，而 $\frac{70}{8} = 8.75$

因此小芬站在入口處數來第 9 個和第 10 個柱子之間
故離她最近的兩個柱子分別展示金銀和瑪瑙

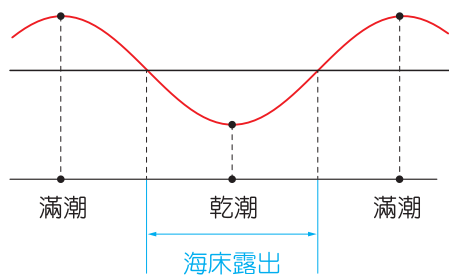
- (2) 因為總共有 49 個柱子，因此廣場的縱深總長為 $48 \times 8 = 384$ 公尺
所以小芬還要走 $384 - 70 = 314$ 公尺

例題 2

自然中的週期

配合課本例題 2

若小甄計畫在 9 月 13 日或 9 月 15 日其中一天的下午 2 點到 3 點至奎壁山摩西分海景點遊玩。已知海床露出期間如圖所示，其中海面上升至最高時稱為滿潮，下降至最低時稱為乾潮。而當地 9 月 12 日到 9 月 17 日間的潮汐表 (24 小時制) 如表。為了安全考量，小甄要在乾潮後的一小時內離開此步道，請問她應該安排在哪一天到此處遊玩比較合適？



日期	滿潮	乾潮
9 月 12 日	10 : 10	16 : 33
9 月 13 日	10 : 51	17 : 09
9 月 14 日	11 : 28	17 : 39
9 月 15 日	12 : 02	18 : 06
9 月 16 日	12 : 36	18 : 32
9 月 17 日	13 : 10	19 : 00

素養題

解 由潮汐表得知滿潮到乾潮約歷時 6 小時
 預估滿潮後的 3 小時為海床開始露出的時間，
 推估 9 月 13 日可參觀的時間為 13 : 51 至 18 : 09
 而 9 月 15 日可參觀的時間為 15 : 02 至 19 : 06
 因此小甄安排 9 月 13 日到該景點遊玩比較合適

類題

承例題 2，若小甄更改在 9 月 14 日上午 8 點到 9 點、上午 10 點到 11 點，或下午 4 點到 5 點其中一時段至此遊玩，試問哪一個時段比較有機會踏上海中步道？

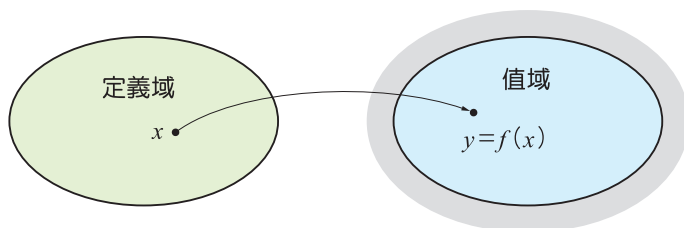
解 由潮汐表得知，9 月 14 日可參觀時間約為 14 : 28 至 18 : 39
 故小甄應安排下午 4 點到 5 點前往遊玩

主題二 正弦函數的圖形

(配合課本 P.24~P.30)

1. 給定一個函數 $f(x)$ ，

- (1) 自變數 x 所有可能值的最大範圍稱為此函數的定義域。
- (2) 函數值 $f(x)$ 所有可能值的最大範圍稱為此函數的值域。
- (3) 函數除了要觀察 x 與 $f(x)$ 的對應關係外，另一重點是觀察 x 值的變化所對應的 $f(x)$ 值的變化。

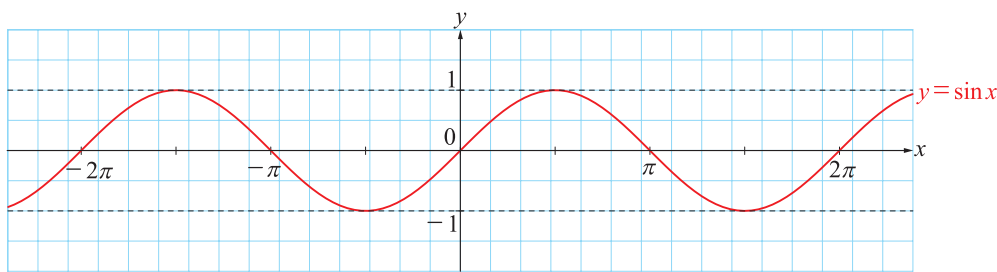


- (4) 一般而言，對於函數 $f(x)$ ，如果存在一個常數 T ，使得定義域內的每個 x 都滿足 $f(x+T)=f(x)$ ，則我們稱 $f(x)$ 為**週期函數**。
- (5) 如果 T 是滿足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正數，則稱 T 為函數 $f(x)$ 之**週期**。

2. 對於任意實數 x ，我們將其視為 x 徑，並求出 $\sin x$ 的值。將 x 與 $\sin x$ 對應起來會得到一個函數的對應關係，稱此為**正弦函數**，並以 $f(x)=\sin x$ 記之。

3. 正弦函數 $f(x)=\sin x$ 的圖形：

- (1) $y=\sin x$ 的圖形：



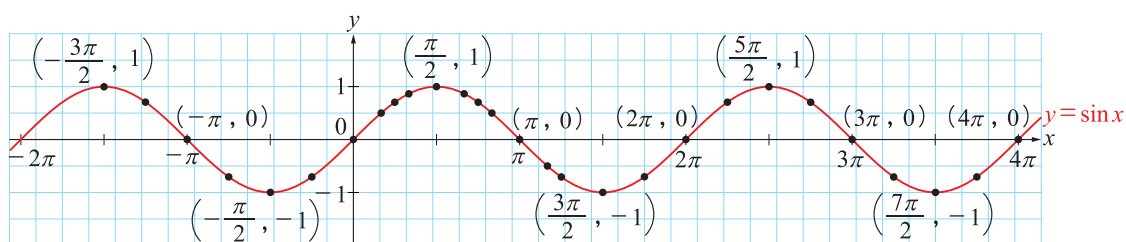
- (2) 繪製正弦函數圖形時，可將角度為軸上角（例如： $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$ ）所對應的點先繪出，再用曲線將這些點連結。
- (3) 最好至少各標示一個波峰與一個波谷的坐標。

說明：

利用計算機可得下表的數值(四捨五入至小數點後第一位，同學可自行檢驗)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	0.5	0.7	0.9	1	0.9	0.7	0.5	0	-0.5	-0.7	-1	-0.7	0

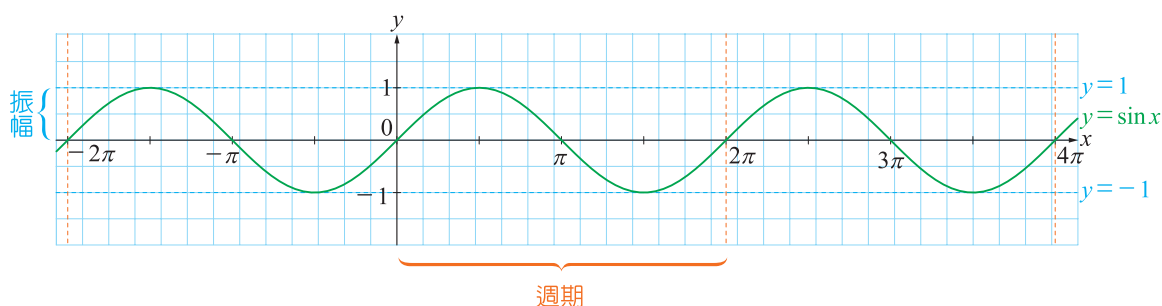
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\sin x$	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7



將 x 值當作橫坐標，所得的函數值 $y=f(x)$ 當作縱坐標，分別將對應的點 (x, y) 標示在坐標平面上，再以平滑曲線將這些點連接起來，就可以得到函數 $f(x)=\sin x$ 的圖形。觀察可知有下列現象

- ① x 的值沒有任何限制。
- ② $\sin x$ 值介於 -1 與 1 之間。
- ③ 圖形在直線 $y=\pm 1$ 之間擺動。
- ④ 正弦函數的圖形每 2π 單位長就會循環一次。

4. 正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形性質：



- (1) 定義域為所有實數，值域為區間 $[-1, 1]$ 。
- (2) 振幅為 1 。
- (3) 週期為 2π 。
- (4) 最高點的地方稱為**波峰**、最低點的地方稱為**波谷**。
- (5) 圖形對稱原點。
- (6) 正弦函數的圖形並不是由許多半圓或弓形所組成。

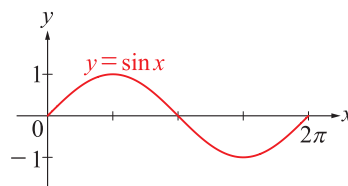
例題 3

正弦函數的圖形

配合課本例題 4

把正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形想像成高高低低的山，則從原點開始順著函數圖形往右走，試回答下列問題：

- (1) 試問走到 $x = 5\pi$ 的時候是上坡還是下坡？
- (2) 承上題，還必須持續再走多遠的上坡或下坡路？



解 (1) 因為正弦函數 $y = \sin x$ 的週期是 2π ，
 所以 $x = 5\pi$ 的情形相當於 $x = 3\pi$ 的情形，
 同理相當於 $x = \pi$ 的情形
 而由正弦函數的圖形知道 $x = \pi$ 的時候是下坡，
 因此 $x = 5\pi$ 的時候也是下坡

- (2) 因為在 $x = \pi$ 到 $x = \frac{3\pi}{2}$ 這一段都是下坡

所以還必須持續走 $\frac{\pi}{2} \left(= \frac{3\pi}{2} - \pi \right)$ 單位的下坡路

Note

由於正弦函數圖形具有週期性的現象。因此，若 θ 在 $[0, 2\pi]$ 內的同界角為 α ，則 $x = \theta$ 時的情形與 $x = \alpha$ 時的情形相同。

類題

把正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形想像成高高低低的山，則從原點開始順著函數圖形往右走，試回答下列問題：

- (1) 試問走到 $x = \frac{25\pi}{4}$ 的時候是上坡還是下坡？
- (2) 承上題，還必須持續再走多遠的上坡或下坡路？

解 (1) 因為 $\frac{25\pi}{4} = 6\pi + \frac{\pi}{4}$

所以 $x = \frac{25\pi}{4}$ 的情形相當於 $x = \frac{\pi}{4}$ 的情形

而由正弦函數的圖形知道 $x = \frac{\pi}{4}$ 的時候是上坡，

因此 $x = \frac{25\pi}{4}$ 的時候也是上坡

- (2) 因為在 $x = \frac{\pi}{4}$ 到 $x = \frac{\pi}{2}$ 這一段都是上坡

所以還必須持續走 $\frac{\pi}{4} \left(= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ 單位的上坡路

主題三 正弦函數圖形的平移與伸縮

(配合課本 P.30~P.38)

1. 正弦函數 $y = \sin x$ 圖形的平移：設 h, k 皆為正數，則

- (1) 函數 $y = \sin x + k$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向上平移 k 個單位長。
- (2) 函數 $y = \sin x - k$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向下平移 k 個單位長。
- (3) 函數 $y = \sin(x + h)$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向左平移 h 個單位長。
- (4) 函數 $y = \sin(x - h)$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 h 個單位長。

2. 正弦函數 $y = \sin x$ 圖形的伸縮：設 $a > 0$ ，則

- (1) 函數 $y = a \sin x$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形上每一點的縱坐標都乘上 a 倍而得。
- (2) 函數 $y = \sin ax$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形上每一點的橫坐標都乘上 $\frac{1}{a}$ 倍而得。

3. 平移不會改變圖形的週期與振幅。**4. 伸縮對週期與振幅的影響：**設 $a > 0$ ，則

- (1) $y = a \sin x$ 的週期不變，振幅變為原來的 a 倍。
- (2) $y = \sin ax$ 的週期變為原來的 $\frac{1}{a}$ 倍（即週期變成 $\frac{2\pi}{a}$ ），振幅不變。

例題 4

正弦函數的平移(一)

配合課本例題 5、6

試利用 $y = \sin x$ 描繪出下列函數的圖形，並回答其定義域、值域、週期、振幅：

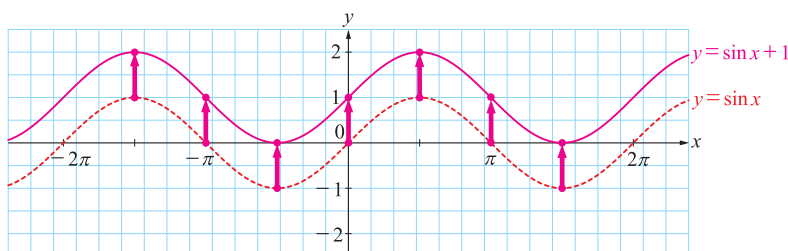
(1) $y = \sin x + 1$ 。

(2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

Note

透過 $[0, 2\pi]$ 軸上角的角度所對應的點，描繪出圖形。再利用週期性現象延伸出兩側的圖形。

解 (1)



$y = \sin x + 1$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形向上平移 1 單位長而得

我們可以先在 $y = \sin x$ 的圖形上標出幾個點(可選最高點、最低點與 x 軸交點)

如 $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, $(-\pi, 0)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ 等

把這些點全部向上平移 1 單位長，

再依 $y = \sin x$ 圖形增加或減少的趨勢

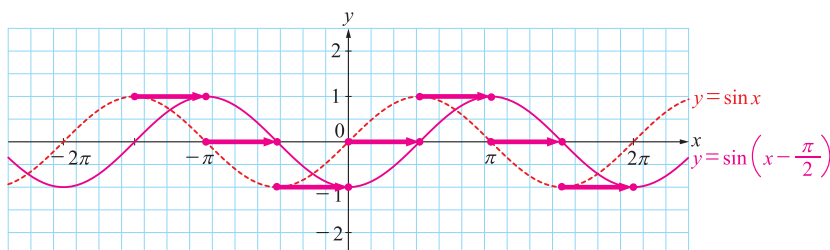
將這些新點用平滑曲線連接起來，

就能得到 $y = \sin x + 1$ 的圖形

$\Rightarrow y = \sin x + 1$ 的週期為 2π ，振幅為 1，

定義域為任意實數，值域為 $[0, 2]$

(2)



$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位長而得

我們仿照第(1)小題，將 $y = \sin x$ 若干關鍵點標出來

把這些點向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位長，再依 $y = \sin x$ 圖形增加或減少的趨勢

將這些新點用平滑曲線連接起來，就能得到 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形

$\Rightarrow y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的週期為 2π ，振幅為 1，

定義域為任意實數，值域為 $[-1, 1]$

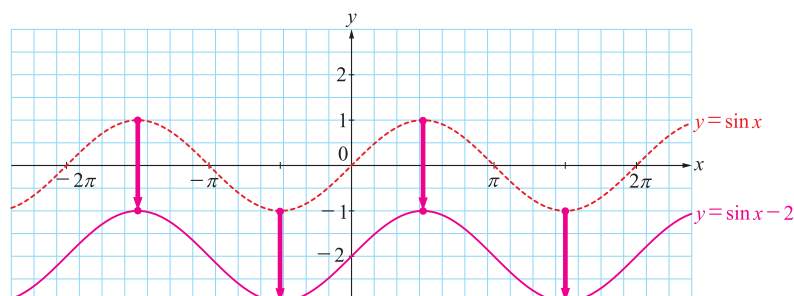
類題

試利用 $y = \sin x$ 描繪出下列函數的圖形，並回答其定義域、值域、週期、振幅：

(1) $y = \sin x - 2$ 。

(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

解 (1)

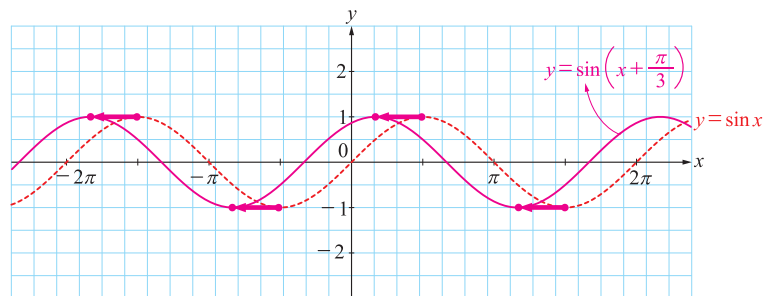


$y = \sin x - 2$ 的圖形為 $y = \sin x$ 往下平移 2 單位，如上圖

所以 $y = \sin x - 2$ 的週期為 2π ，振幅為 1，

定義域為任意實數，值域為 $[-3, -1]$

(2)



$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形為 $y = \sin x$ 往左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，如上圖

所以 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的週期為 2π ，振幅為 1，

定義域為任意實數，值域為 $[-1, 1]$

例題 5

正弦函數的平移(二)

- (1) 試完成下列表格，並以描點方式繪出 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的圖形。
- (2) 承(1)，請說明這個函數圖形與 $y = \sin x$ 的位置關係。
- (3) 承(1)，試求函數的定義域、值域、週期、振幅。

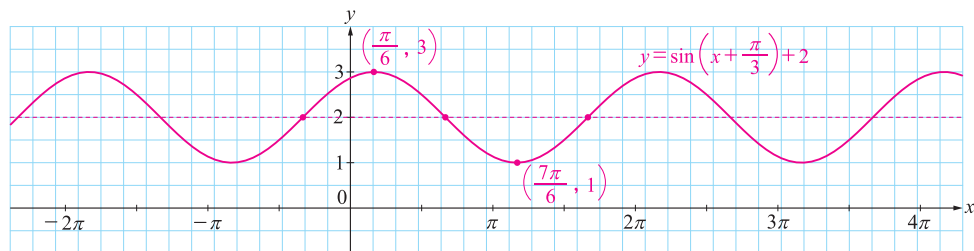
Note

作 $y = \sin x$ 的圖形，將 y 軸移到 $x = -\frac{\pi}{3}$ 的位置再重新標示 y 軸坐標，可得

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形；同理，也可再移動 x 軸，得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的圖形。

解 (1)

$x + \frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$	2	3	2	1	2



在坐標圖形上標出上列的點，並用曲線將其連接，再左右兩側重複圖形，如上圖

- (2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的圖形為 $y = \sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，往上平移 2 單位
- (3) 因為最高點的 y 坐標為 3，最低點的 y 坐標為 1

所以振幅為 $\frac{3-1}{2} = 1$ ，值域為 $[1, 3]$

而圖形每隔 2π 單位的區間會不斷重複

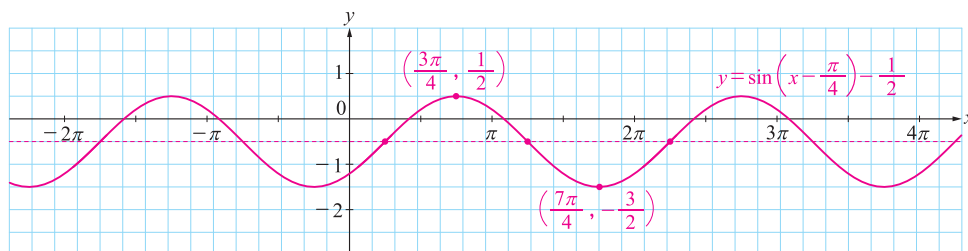
所以定義域為任意實數，週期為 2π

類題

- (1) 試完成下列表格，並以描點方式繪出 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$ 的圖形。
- (2) 承(1)，試求函數的定義域、值域、週期、振幅。

解 (1)

$x - \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$



在坐標圖形上標出上列的點，並用曲線將其連接，
再左右兩側重複圖形，如上圖

- (2) 因為最高點的 y 坐標為 $\frac{1}{2}$ ，最低點的 y 坐標為 $-\frac{3}{2}$

所以振幅為 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) \right) = 1$ ，值域為 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right]$

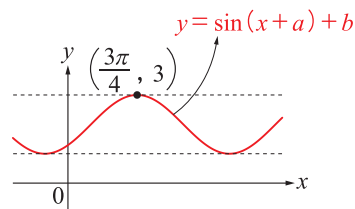
而圖形每隔 2π 單位的區間會不斷重複

所以定義域為任意實數，週期為 2π

例題 6

由圖形觀察平移的量

右圖為 $y = \sin(x + a) + b$ 的部分圖形，其中 $0 < a < 2\pi$ ，
試求 a, b 的值。

解 因為最高點的 y 坐標為 3

所以 $1 + b = 3$ ，得 $b = 2$

又圖形通過 $\left(\frac{3\pi}{4}, 3 \right)$

所以 $3 = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + a\right) + 2 \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4} + a\right) = 1$

又 $0 < a < 2\pi$ ，所以 $\frac{3\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + a < \frac{11\pi}{4}$

因此 $\frac{3\pi}{4} + a = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ，得 $a = \frac{7\pi}{4}$

類題

將 $y = \sin x$ 水平向右平移 3 單位，再鉛直向上平移 4 單位，所得的圖形為 $y = \sin(x+a) + b$ ，其中 a 值介於 $-\pi$ 到 π 之間。試求 a 與 b 的值。

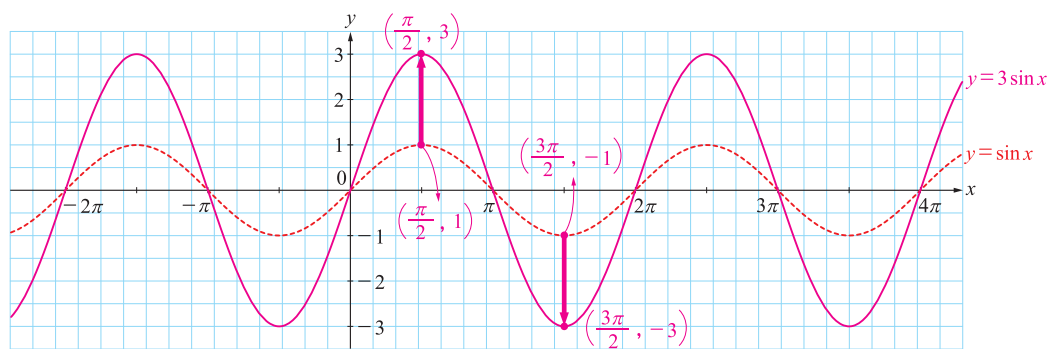
解 將 $y = \sin x$ 水平向右平移 3 單位，再鉛直向上平移 4 單位，
所得的圖形為 $y = \sin(x-3) + 4$ ，
故 $a = -3$ ， $b = 4$

例題 7

正弦函數的伸縮(一)

配合課本例題 7

- (1) 試利用 $y = \sin x$ 描繪出 $y = 3 \sin x$ 的圖形，並回答其週期、振幅、值域。
- (2) 承(1)，試利用 $y = 3 \sin x$ 描繪出 $y = 3 \sin x + 1$ 的圖形，並回答其週期、振幅、值域。

解 (1)

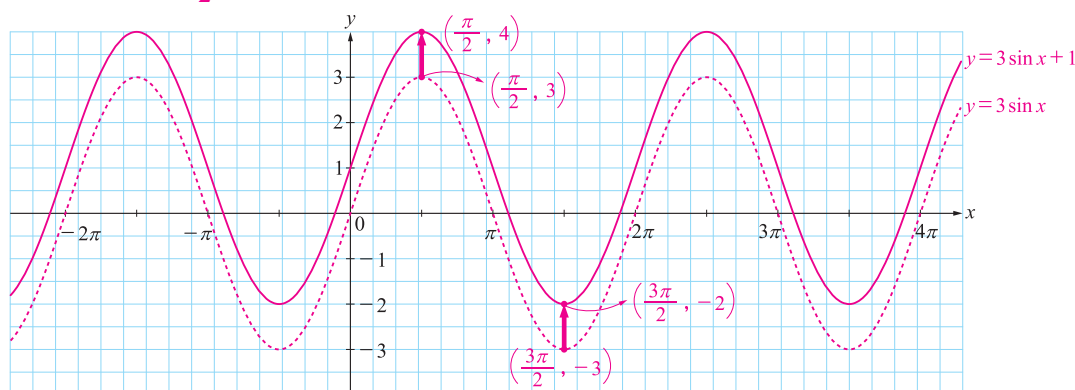
將 $y = \sin x$ 的每一個點的 y 坐標皆乘上 3 倍(可利用軸上角的點做觀察)

可得到 $y = 3 \sin x$ 的圖形

因為最大值為 3，最小值為 -3，

所以振幅為 $\frac{3 - (-3)}{2} = 3$ ，值域為 $[-3, 3]$ ，而週期為 2π

(2)



將 $y = 3 \sin x$ 的每一個點往上平移 1 單位(可利用軸上角的點做觀察)

可得 $y = 3 \sin x + 1$ 的圖形

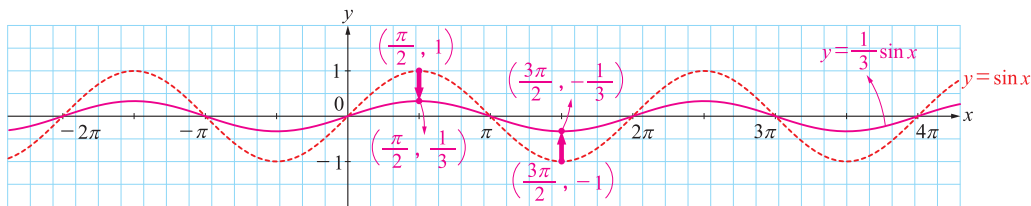
因為最大值為 4，最小值為 -2，

所以振幅為 $\frac{4 - (-2)}{2} = 3$ ，值域為 $[-2, 4]$ ，而週期為 2π

類題

試利用 $y = \sin x$ 的圖形描繪出 $y = \frac{1}{3} \sin x$ 的圖形，並回答其週期與振幅為何？

解



將 $y = \sin x$ 的每一個點的 y 坐標皆乘上 $\frac{1}{3}$ 倍 (可利用軸上角的點做觀察)

可得 $y = \frac{1}{3} \sin x$ 的圖形，因為最大值為 $\frac{1}{3}$ ，最小值為 $-\frac{1}{3}$ ，所以振幅為 $\frac{1}{3}$ ，週期不變，仍為 2π

例題 日

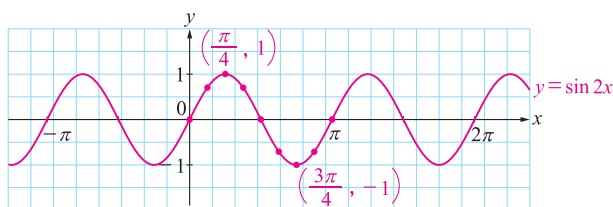
正弦函數的伸縮(二)

配合課本例題 8

- (1) 試完成下列表格，並描繪出函數 $f(x) = \sin 2x$ 的圖形。(已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$)
- (2) 承(1)，函數 $f(x)$ 的圖形可以由 $y = \sin x$ 的圖如何調整而得？
- (3) 承(1)，函數 $f(x)$ 的週期與振幅為何？

解

$2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\sin 2x$	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0



以表格的資料，在坐標上標出點 $(x, \sin 2x)$ ，並用曲線將其連接，再左右兩側重複圖形，如上圖

- (2) 函數 $f(x)$ 的圖形恰為 $y = \sin x$ 的圖形「以 y 軸為中心沿水平方向壓縮為 $\frac{1}{2}$ 倍」而得

也就是將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的 x 坐標都乘上 $\frac{1}{2}$ 倍而得

- (3) $f(x)$ 的週期為 π ，振幅不變，仍為 1

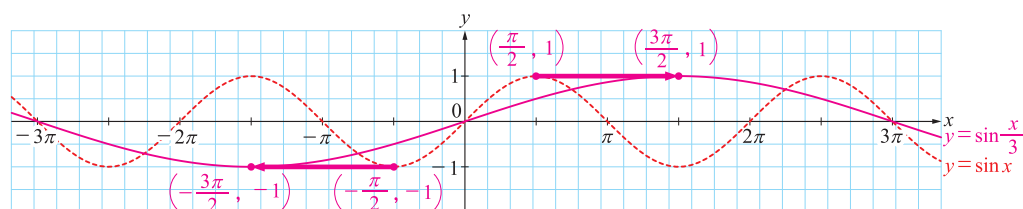
類題

試利用 $y = \sin x$ 的圖形描繪出各函數的圖形，並回答其週期：

(1) $y = \sin \frac{x}{3}$ 。

(2) $y = \sin \pi x$ 。

解 (1)

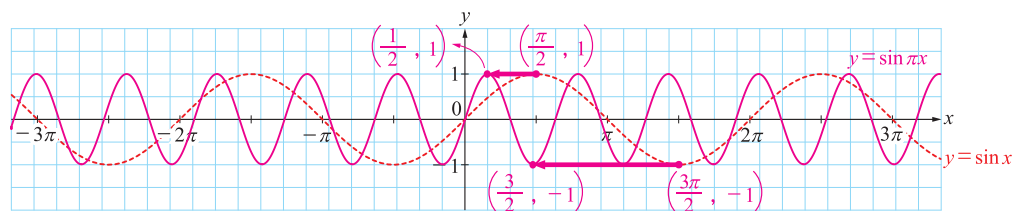


將 $y = \sin x$ 的每一個點的 x 坐標皆乘上 3 倍，可得到 $y = \sin \frac{x}{3}$ 的圖形

即把 $y = \sin x$ 的圖形「以 y 軸為中心沿水平方向伸長為 3 倍」而得

$\Rightarrow y = \sin \frac{x}{3}$ 的週期為 $2\pi \times 3 = 6\pi$

(2)



將 $y = \sin x$ 的每一個點的 x 坐標皆乘上 $\frac{1}{\pi}$ 倍，可得到 $y = \sin \pi x$ 的圖形

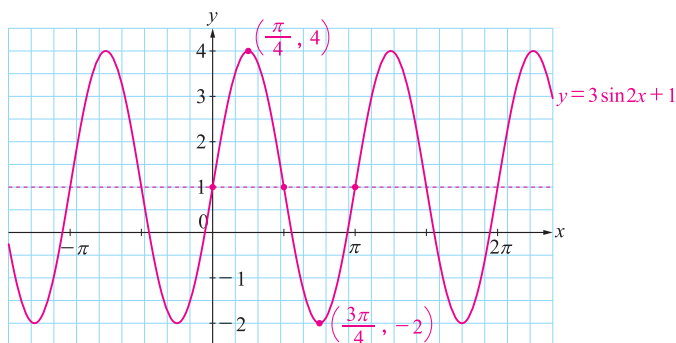
即把 $y = \sin x$ 的圖形「以 y 軸為中心沿水平方向壓縮為 $\frac{1}{\pi}$ 倍」而得

$\Rightarrow y = \sin \pi x$ 的週期為 $2\pi \times \frac{1}{\pi} = 2$

例題 9 正弦函數圖形的伸縮與平移

試繪出 $y = 3 \sin 2x + 1$ 的圖形，並回答其週期與振幅。

解



Note

繪製正弦函數圖形，應畫 2~3 個完整的週期，並標示出一組波峰與波谷的坐標。

當 $2x$ 等於 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 時，對應的點 $(x, 3 \sin 2x + 1)$

分別為 $(0, 1), (\frac{\pi}{4}, 4), (\frac{\pi}{2}, 1), (\frac{3\pi}{4}, -2), (\pi, 1)$ ，

在坐標圖形上標出上列各點，並用曲線將其連接，

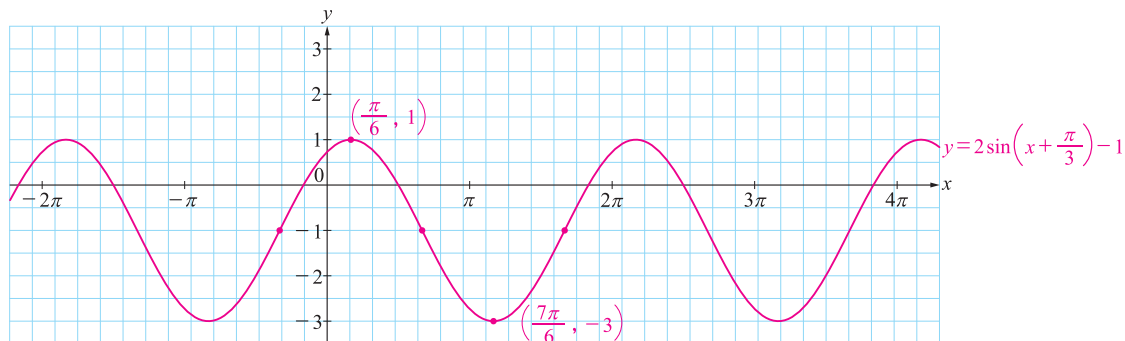
再左右兩側重複圖形，如上圖

$\Rightarrow y = 3 \sin 2x + 1$ 的振幅為 $\frac{4 - (-2)}{2} = 3$ ，週期為 $2 \times (\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \pi$

類題

試畫出 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) - 1$ 的圖形，並回答其週期與振幅。

解



當 $x + \frac{\pi}{3}$ 等於 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 時，對應的點 $(x, 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) - 1)$

分別為 $(-\frac{\pi}{3}, -1), (\frac{\pi}{6}, 1), (\frac{2\pi}{3}, -1), (\frac{7\pi}{6}, -3), (\frac{5\pi}{3}, -1)$ ，

在坐標圖形上標出上列各點，並用曲線將其連接，

再左右兩側重複圖形，如上圖

$\Rightarrow$ 因為最高點的 y 坐標為 1，最低點的 y 坐標為 -3，

所以振幅為 $\frac{1 - (-3)}{2} = 2$ ，週期為 $2 \times (\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 2\pi$

例題 10

由圖形觀察函數的變化方式

配合課本習題 6

右圖為三角函數 $y=3\sin(ax-b)$ 的部分圖形，其中 $a>0$ ，則下列各項敘述何者正確？

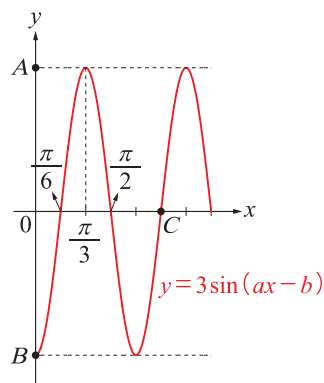
(A) $B(0, -3)$

(B) $b=\frac{\pi}{6}$

(C) $C\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

(D) y 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(E) 其圖形可由 $y=3\sin 3x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 而得 [建國中學]



解 (A) ○：因為波谷的 y 坐標為 -3 ，所以 B 點坐標為 $(0, -3)$

(B) × (C) ○ (D) ○：

由題圖可知週期為 $2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow C$ 點坐標為 $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, 0\right)$ ，即 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

又由伸縮性質知週期為 $\frac{2\pi}{a} \Rightarrow a=3$

將 $\left(\frac{\pi}{3}, 3\right)$ 代入 $y=3\sin(3x-b)$ 得 $3=3\sin(\pi-b) \Rightarrow \sin(\pi-b)=1$

因此 $\pi-b=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b=\frac{\pi}{2}-2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(E) ○： $y=3\sin 3x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得 $y=3\sin\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

故選(A)(C)(D)(E)

類題

設 $a, b, c > 0$ ，若 $y=a\sin bx+c$ 的圖形如右，試求 a, b, c 的值。

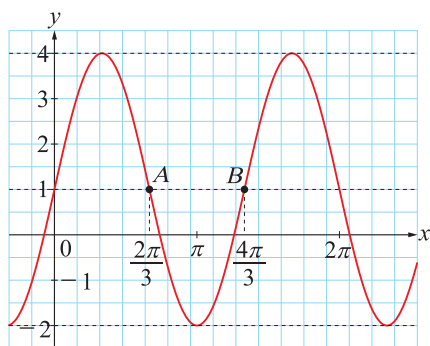
解 因為 $y=a\sin bx+c$ 的最高點的 y 坐標為 4 ，

最低點的 y 坐標為 -2

$$\text{所以 } a = \frac{4 - (-2)}{2} = 3, c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$\text{又觀察圖形週期為 } 2 \times \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{b},$$

$$\text{解得 } b = \frac{3}{2}$$



主題四 正弦波

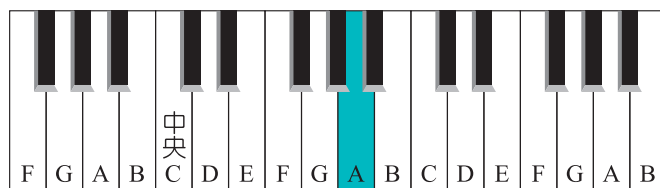
(配合課本 P.38~P.40)

1. 在數學上，將正弦函數做任意的平移與伸縮，所得的函數 $B + A \sin(\omega x + \phi)$ 稱為正弦波，這是用來研究與模擬週期現象的數學模型。
 $\square$ ： B 稱為基線， A 稱為振幅， $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 稱為週期， ϕ 稱為相位角。
2. 聲音是正弦波的一種，是由空氣振動形成聲波而得，常表示為 $A \sin(2\pi fx)$ ，其中物理學上定義，**頻率** f 為週期 T 的倒數（即 $f = \frac{1}{T}$ ），單位為赫茲 Hz（次 / 秒）。
3. 頻率 f 表現為**音高**，振幅 A 表現為聽覺上的**音量**；空氣振動愈快（頻率愈高），音高就愈高。
4. 在音樂理論上，規定 A4（音樂課唱的 la）的音高稱為標準音高。這個純音的聲波函數是 $f(x) = \sin(880\pi x)$ ，其中 x 的單位為秒。
5. 可利用電腦軟體 GeoGebra 發出純音的聲音，例如輸入「`playsound(sin(880\pi x), 0, 2)`」就會發出 A4 音 2 秒鐘。

例題 11 聲 波

配合課本例題 10

在音樂理論上，規定 A4（音樂課唱的 la）的音高稱為標準音高，其聲波函數是 $f(x) = \sin(880\pi x)$ ，其中 x 的單位為秒。試回答下列問題：



- (1) 此函數的週期為何？
- (2) 此函數的頻率為何？
- (3) 設由 A4 往下 5 個半音 E4（即音樂課唱的 mi）的聲波頻率為 A4 的 $\frac{3}{4}$ 倍，則 E4 這個音的聲波函數為何？

素養題

解 (1) 由正弦函數圖形的伸縮可知週期為

$$2\pi \times \frac{1}{880\pi} = \frac{1}{440} \text{ (秒 / 次)}$$

- (2) 因為頻率為週期的倒數，故頻率為 440 赫茲
即標準音高是空氣每秒振動 440 次

- (3) 因為 E4 的頻率為 $440 \times \frac{3}{4} = 330$ 赫茲

所以 E4 的聲波函數是 $f(x) = \sin(2\pi \times 330 \times x) = \sin(660\pi x)$

Note

純音的聲波函數為 $\sin(2\pi fx)$ ，
其中 f 為頻率。

類題

有四個聲音的聲波函數：

$$f_1(x) = 3 \sin(20\pi x), f_2(x) = 50 \sin(40\pi x), f_3(x) = \sin(200\pi x), f_4(x) = 10 \sin(3000\pi x),$$

試回答下列問題：

- (1) 若某一臺鋼琴能發出的聲波頻率是 30Hz 到 3000Hz，則下列哪些是此鋼琴能發出的聲波？(多選)

(A) f_1 (B) f_2 (C) f_3 (D) f_4 (E) 以上皆非

- (2) 音量最大的聲音是哪一個？

解 (1) 設此鋼琴能發出的聲波函數為 $y = \sin kx$

若聲波頻率是 30Hz 到 3000Hz，則週期是 $\frac{1}{30}$ 到 $\frac{1}{3000}$

由正弦函數圖形的伸縮可知 $\frac{1}{3000} \leq \frac{2\pi}{k} \leq \frac{1}{30}$ ，

化簡得 $60\pi \leq k \leq 6000\pi$ ，故選(C)(D)

- (2) 因為振幅愈大，音量愈大

所以音量最大的是 f_2

例題 12

三角函數圖形解方程式

配合課本習題 9

- (1) 在 $0 \leq x \leq 4\pi$ 範圍內，方程式 $\sin x = -\frac{1}{3}$ 這些解的總和為何？

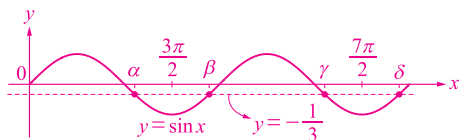
[平鎮高中]

- (2) 方程式 $12 \sin x = x$ 有 _____ 個實數解。

[建國中學]

解

- (1) 在坐標平面上作 $y = \sin x$ 與 $y = -\frac{1}{3}$ 的圖

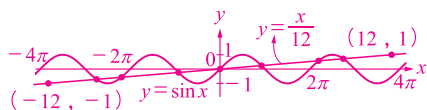


兩圖形相交於 4 點，令其 x 坐標由小至大依序為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

故這些解的總和為 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\pi + 7\pi = 10\pi$

- (2) 在坐標平面上作 $y = \sin x$ 與 $y = \frac{x}{12}$ 的圖



兩圖形有 7 個交點，故方程式 $12 \sin x = x$ 有 7 個實數解

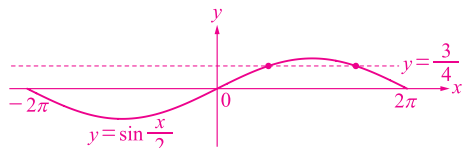
類題

(1) 設 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，則 $4 \sin \frac{x}{2} = 3$ 有幾個實數解？

(2) 方程式 $\sin 4x - \frac{x}{3} = 0$ 有幾個實數解？

解

(1) 在坐標平面上作 $y = \sin \frac{x}{2}$ 與 $y = \frac{3}{4}$ 的圖



兩圖形在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 中恰有 2 個交點

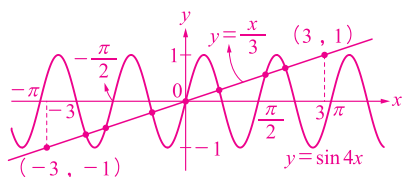
故 $4 \sin \frac{x}{2} = 3$ 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 恰有 2 個實數解

(2) 在坐標平面上作 $y = \sin 4x$ 與 $y = \frac{x}{3}$ 的圖

由於 $y = \frac{x}{3} = \pm 1$ 時， $x = \pm 3$

且 $y = \sin 4x$ 的週期為 $\frac{2\pi}{4}$

所以 $(-\pi, \pi)$ 可畫 4 個週期的圖形



兩圖形有 7 個交點

故方程式 $\sin 4x - \frac{x}{3} = 0$ 有 7 個實數解

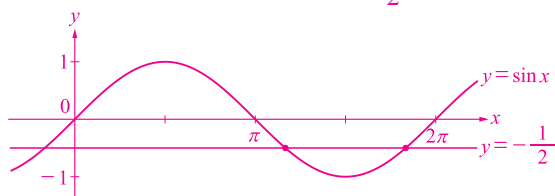
例題 13 三角函數圖形解不等式

配合課本習題 9

- (1) 設 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若 $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ ，則 x 的範圍為何？
- (2) 在 $0 \leq x \leq 4\pi$ 範圍內，不等式 $(\cos x + 5)(2 \sin x + \sqrt{2}) < 0$ 的解為何？

解

- (1) 在坐標平面上作 $y = \sin x$ 與 $y = -\frac{1}{2}$ 的圖



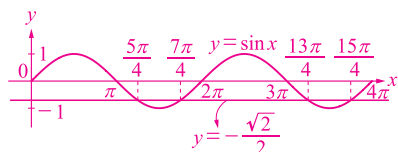
在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時，兩圖形有兩個交點，分別為 $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ ， $\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

滿足不等式 $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ 的解，即滿足 $y = \sin x$ 在 $y = -\frac{1}{2}$ 上方的區域

故不等式 $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ 的解為 $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

- (2) 由於 $-1 \leq \cos x \leq 1$ ，所以 $\cos x + 5$ 恆正
故不等式只需考慮 $2 \sin x + \sqrt{2} < 0$ 的解

在坐標平面上作 $y = \sin x$ 與 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圖



故不等式 $(\cos x + 5)(2 \sin x + \sqrt{2}) < 0$ 的解為 $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ 或 $\frac{13\pi}{4} < x < \frac{15\pi}{4}$

類題

- (1) 設 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，若 $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，則 x 的範圍為何？
- (2) 設 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，若 $4 \sin \frac{x}{2} > 3$ 的解為 $a < x < b$ ，則 $a+b=$ _____。

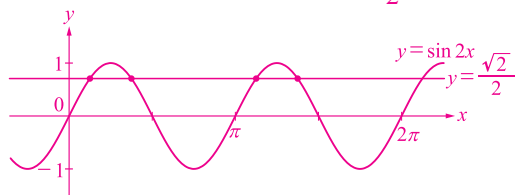
解

- (1) 先考慮 $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，再藉由函數圖形觀察不等式 $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解

因為 $0 \leq 2x \leq 4\pi$ ，所以 $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解為 $2x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$

解得 $x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}$

在坐標平面上作 $y = \sin 2x$ 與 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圖



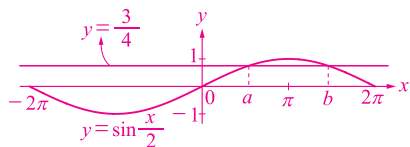
在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時，兩圖形有四個交點，分別為

$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{9\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，

滿足不等式 $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解，即滿足 $y = \sin 2x$ 在 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 上方的區域

故不等式 $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解為 $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$ 或 $\frac{9\pi}{8} \leq x \leq \frac{11\pi}{8}$

- (2) 在坐標平面上作 $y = \sin \frac{x}{2}$ 與 $y = \frac{3}{4}$ 的圖



兩圖形在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 的 2 個交點在 $x = a, b$ 處

因為圖形在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 對稱於 $x = \pi$

故 $a+b=2\pi$

例題 14 曲線擬合

當我們知道某件事物應具有週期性時，因此以具有週期性的正弦函數模型來擬合已知數據，藉此估計。若有一筆觀測資料如下：

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
y	0.60	0.41	0.42	0.24	0.10	0.02	0	0.08	0.23	0.43	0.66	0.85	0.97	1	0.92	0.77

今希望利用正弦函數 $y = a \sin(bx - h) + k$ (其中 $b > 0$) 來描述這筆資料，並希望最高點 $(26, 1)$ 與最低點 $(12, 0)$ 皆落在圖形上。請問：

- (1) 正弦函數 $y = a \sin(bx - h) + k$ 的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 若 $0 < h < 2\pi$ ，試求數對 $(h, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 [丹鳳高中]

解 (1) 因為 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$

所以 y 的最大值為 $a \times 1 + k = 1$ ，最小值為 $a \times (-1) + k = 0$

$$\text{可得 } a = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{2}$$

$x = 12$ 到 $x = 26$ 是 $\frac{1}{2}$ 個週期

$$\text{所以週期為 } \frac{26-12}{\frac{1}{2}} = 28 = \frac{2\pi}{b}, \text{ 故 } b = \frac{\pi}{14}$$

$$(2) (12, 0) \text{ 代入 } y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{14}x - h\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{6\pi}{7} - h\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{6\pi}{7} - h\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{6\pi}{7} - h = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow h = \frac{19\pi}{14} - 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$\because 0 < h < 2\pi \quad \therefore m = 0, \text{ 即 } h = \frac{19\pi}{14}$$

$$\text{故數對 } (h, k) = \left(\frac{19\pi}{14}, \frac{1}{2}\right)$$

類題

已知某海濱浴場海浪的高度 y (單位：公尺) 是時間 t ($0 \leq t \leq 24$ ，單位：時) 的函數，記作 $y=f(t)$ ，下表是某日各時的浪高數據：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	1.5	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	0.5	0.99	1.5

經長期觀測， $y=f(t)$ 的曲線可近似地看成是函數 $y=A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b$ 。依據規定，

當海浪高度不低於 1.25 公尺時才對衝浪愛好者開放，判斷一天內有 _____ 小時的時間可供衝浪者進行運動。 [高雄中學]

解 $0.5 \leq y \leq 1.5$

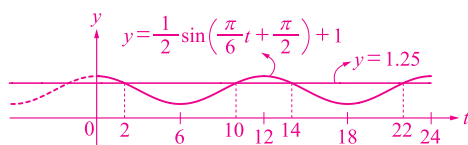
$$0.5 \leq A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b \leq 1.5$$

$$\text{因為 } -1 \leq \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{0.5-b}{A} = -1 \\ \frac{1.5-b}{A} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{週期為 } 12-0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$$

在坐標平面上作 $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 與 $y = 1.25$ 的略圖



$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1.25 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, \frac{5\pi}{6} + 2\pi, \frac{\pi}{6} + 4\pi \Rightarrow t = 2, 10, 14, 22$$

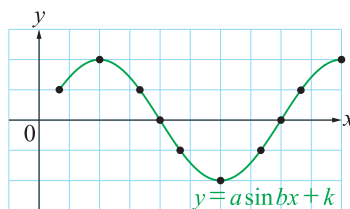
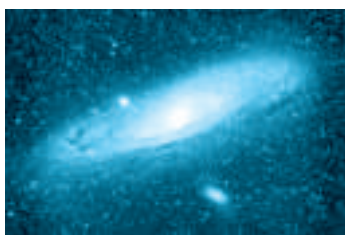
得知 $\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \geq 1.25$ 的解為 $0 \leq t \leq 2$ ， $10 \leq t \leq 14$ ， $22 \leq t \leq 24$

故一天內有 8 小時的時間可供衝浪者進行運動

例題 15

正弦函數的應用(一)

一項美國加州柏克萊大學的計畫：SETI 是「Search for Extra Terrestrial Intelligence」的縮寫，也就是搜尋地外文明的計畫。這是利用全世界參加者的電腦來參與處理來自外太空的訊息，來進行資料分析。假設某一天收到非自然產生的電波訊號，經過分析後，可轉譯得到一串數字訊息。其中某段訊息如下：0.67, 1, 2, 2, 3.33, 1, 4, 0, 4.67, -1, 6, -2, 7.33, -1, 8, 0, 8.67, 1, 10, 2, ……。



若賈聰明將前後兩個數字視為一個點坐標，例如：(0.67, 1), (2, 2), (3.33, 1), ……，將這些點描繪至方格紙中並將這些點連接成右上方的圖形(圖形的格線距離是 1 單位)。賈聰明猜測這些點是正弦函數 $y = a \sin bx + k$ 圖形上的點，且 $a > 0$, $b > 0$, k 為常數。

- (1) 試求此正弦函數 $y = a \sin bx + k$ 的週期 = ? 振幅 = ? $b = ?$
- (2) 若依賈聰明的結果，即這些點是正弦函數 $y = a \sin bx + k$ 圖形上的點。當接收到一個無線電波轉譯成數字為 81，則下一個無線電波轉譯的數字為何？(四捨五入至小數點後第二位)

[明倫高中]

素養題

解 (1) 兩相鄰的波峰、波谷坐標分別為 (2, 2)、(6, -2)

因此，週期為 $2 \times (6 - 2) = 8$ ，振幅為 $\frac{1}{2} [2 - (-2)] = 2$

由伸縮變化知週期為 $\frac{1}{b} \times 2\pi = 8$ ，所以 $b = \frac{\pi}{4}$

(2) 因為 $a = \frac{2}{1} = 2$, $k = \frac{1}{2} [2 + (-2)] = 0$

所以將 $x = 81$ 代入得 $y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 81\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \approx 1.41$

故下一個無線電波轉譯的數字為 1.41

類題

某高中天文社成員欲觀測月球亮面的比例，從某日開始每隔兩個夜晚在同一時間拍攝月球照片，並計算月球亮面比例，他們的觀測資料如下表所示：

開始觀察後的 x 日	0 日	2 日	4 日	6 日	8 日	10 日	12 日	14 日	16 日	18 日	20 日	22 日	24 日	26 日	28 日	30 日
月球亮面比例 (%)	42	24	10	2	0	8	23	43	66	85	97	100	92	97	60	41

假設用正弦函數 $y = a \sin[b(x-h)] + k$ (其中 a, b 為正數, $0 < h < 30$) 來描述這筆觀測資料，且滿足下面兩條件：

- ① 資料點 $(22, 1)$ 和 $(8, 0)$ 落在圖形上。
- ② 資料點 $(22, 1)$ 和 $(8, 0)$ 依次為圖形相鄰的最高點與最低點。

則：

- (1) 此圖形的週期為下列何者？(單選)

(A) 14 (B) 28 (C) 16 (D) 32 (E) 30

- (2) 求序組 $(a, b, h, k) = ?$

[興大附中] 素養題

解 (1) 週期為 $2 \times (22 - 8) = 28$ ，故選(B)

$$(2) \text{ 週期為 } \frac{1}{b} \times 2\pi = 28 \Rightarrow b = \frac{\pi}{14}$$

$$\text{振幅為 } a = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}, \text{ 基準為 } k = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{將 } (22, 1) \text{ 代入得 } 1 = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{14} (22 - h) + \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{14} (22 - h) = 1$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{14} (22 - h) = \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } h = 15$$

$$\text{故序組 } (a, b, h, k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{14}, 15, \frac{1}{2} \right)$$

例題 16 正弦函數的應用(二)

某動物園貓熊館打造一個圓形摩天輪，當摩天輪開始運轉時，在摩天輪的圓仔恰坐在離地最近的位置上， x 分鐘後，圓仔離地的高度 y (單位：公尺) 可表為

$$y = 5 \sin \left(\frac{2\pi}{25} x - \frac{\pi}{2} \right) + 6, \text{ 試問：}$$

- (1) 摩天輪轉一圈需_____分鐘。
- (2) 圓仔離地最高的高度為_____公尺。

解

(1) 轉一圈的時間週期為 $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{25}} = 25$ (分鐘)

(2) 由於 $\sin \left(\frac{2\pi}{25} x - \frac{\pi}{2} \right) \leq 1$

所以圓仔離地最高的高度為 y 的最大值，即為 $5 \times 1 + 6 = 11$ (公尺)

類題

已知電流強度 I (單位：安培) 與時間 t (單位：秒) 的關係可表為 $I = 10 \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$ 。

當 $t = \frac{1}{40}$ 秒時，電流強度 I 為_____安培。

[新北高中]

解

當 $t = \frac{1}{40}$ 秒時，代入得

$$\begin{aligned} I &= 10 \sin \left(100\pi \times \frac{1}{40} + \frac{\pi}{6} \right) = 10 \sin \left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 10 \sin \frac{8\pi}{3} \\ &= 10 \sin \frac{2\pi}{3} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (安培)} \end{aligned}$$