1-4 指數記法與科學記號

1 整數的乘方　　2 10 的次方

3 科學記號

主題 1 整數的乘方

我們知道當相同的數連加多次時，可以用乘法簡記，例如：「5＋5＋5＋5＋5＋5」表示共 6 個 5 連加，我們可以簡記為「5×6」。而當相同的數連乘多次時，我們稱為**乘方**，簡記方式如下表：

意義	乘方	簡記	讀法
2 個 5 連乘	5×5	5^2	五的二次方 (或五的平方)
3 個 5 連乘	$5\times5\times5$	5^3	五的三次方 (或五的立方)
4 個 5 連乘	$5\times5\times5\times5$	5^4	五的四次方
⋮	⋮	⋮	⋮

上表的簡記中，被連乘的數字 5 稱為**底數** (或簡稱**底**)，5 右上方字體較小的數 2、3、4、……稱為**指數**，表示連乘的次數。同樣的，

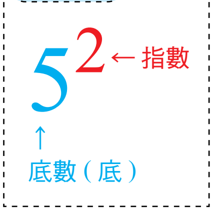
$(-2)\times(-2)\times(-2)$ 記為 $(-2)^3$；

$a\times a$ 記為 a^2；

$a\times a\times a$ 記為 a^3；

$\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}}$ 記為 a^n，讀作「a 的 n 次方」。

Hint



以下為幾個特別的情形：

1. **指數為 1：**當指數為 1 時，指數 1 通常省略不寫。
   例如：3^1 習慣上寫成 3，$(-2)^1$ 習慣上寫成 -2。
2. **0 的乘方：**當底數為 0 時，不管幾個 0 相乘，其值都是 0，
   即 $0\times0\times\cdots\times0=0$。我們可以知道 **$n$ 為正整數時，$0^n=0$**。
3. **1 的乘方：**當底數為 1 時，不管幾個 1 相乘，其值都是 1，
   即 $1\times1\times\cdots\times1=1$。我們可以知道 **$n$ 為正整數時，$1^n=1$**。

Key point

底數與指數

若 a 為整數，則 $\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}}$ 可簡記成指數的形式 a^n，讀作 a 的 n 次方，其中 a 稱為底數，n 稱為指數。

a^n ← 指數

↑

底數（底）

隨堂練習

以指數的形式簡記下列各式。

(1) $8\times8\times8\times8\times8=$__________。

(2) $(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)=$__________。

有些計算機上會有 x^2 或 x^y 的按鍵，分別代表一個數的平方或次方。（操作方式可參閱書末 P.[7]～[8]「計算機教學」）

例 1 指數為偶數的乘方計算

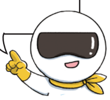
計算下列各式的值。

(1) 9^2　　(2) $(-2)^4$　　(3) -2^4

9 x^2 和

9 × 9

的結果是一樣的唷！



解 (1) $9^2=9\times9=81$

(2) $(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=16$

(3) $-2^4=-(2^4)=-(2\times2\times2\times2)=-16$

Hint

$(-2)^4$ 與 -2^4 的意義不同，且值也不同。

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) 3^2　　(2) $(-3)^2$　　(3) -3^2

例 2　指數為奇數的乘方計算

計算下列各式的值。

(1) 7^3　　(2) $(-6)^3$　　(3) -6^3

解

(1) $7^3=7\times7\times7=343$

(2) $(-6)^3=(-6)\times(-6)\times(-6)=-216$

(3) $-6^3=-(6^3)=-(6\times6\times6)=-216$

7 x^y 3 和 7 × 7 × 7 的結果是一樣的唷！

Hint

$(-6)^3$ 與 -6^3 的意義不同，但值相同。

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) 2^5　　(2) $(-2)^5$　　(3) -2^5

動動腦

1. 若 n 為偶數，則 $(-1)^n$ 等於多少？

2. 若 n 為奇數，則 $(-1)^n$ 等於多少？

由前面的討論，我們可以發現：

Key point

負數的乘方

負數的偶數次方是正數；負數的奇數次方是負數。

數學好好玩　連乘訣

學完乘方的簡記後，你可以翻到書末 *P*.[3]「連乘訣」，利用所學的概念，一起挑戰解謎吧！

在進行含有乘方的四則運算時，乘方的部分要先計算。

例 3　含乘方的四則運算

計算下列各式的值。

(1) $(-5^2)\div5-3^3$　　(2) $8-2^3\times[10+(-4^2)]$

解

(1) $(-5^2)\div5-3^3$

$=(-25)\div5-27$

$=(-5)-27$

$=-32$

(2) $8-2^3\times[10+(-4^2)]$

$=8-8\times[10+(-16)]$

$=8-8\times(-6)$

$=8+48$

$=56$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $[-(-3)^2+3]\div6$　　(2) $(-100)-(-75)\div(-5)^2$

數學好好玩　將紙對摺幾次，厚度才會比 101 大樓高呢？

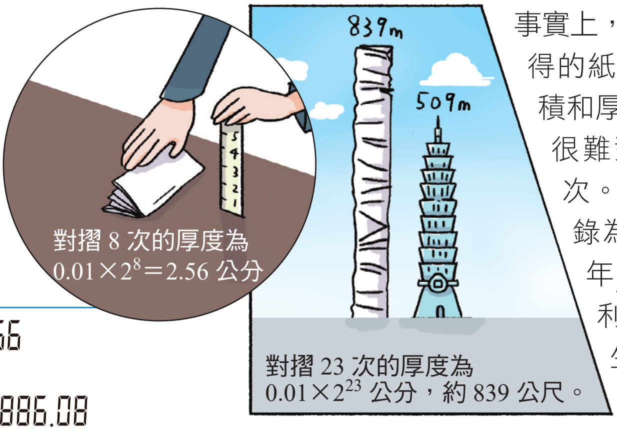
假設一張紙的厚度為 0.01 公分，我們知道每將紙對摺一次，厚度就會變為原來的 2 倍，你認為對摺幾次後，紙的厚度會比 101 大樓還高？

計算機操作

0.01 × 2 x^y 8 = 2.56

⋮　⋮　⋮

0.01 × 2 x^y 23 = 83886.08



對摺 8 次的厚度為 $0.01\times2^8=2.56$ 公分

對摺 23 次的厚度為 0.01×2^{23} 公分，約 839 公尺。

事實上，我們隨手取得的紙張受限於面積和厚度的關係，很難對摺超過 8 次。目前世界紀錄為西元 2011 年美國中學生利用超長的衛生紙對摺了 13 次。

主題 2 10 的次方

觀察下表中的數值變化與指數的關係。

數值	10000	$\overset{10倍}{\underset{\frac{1}{10}倍}{\leftrightarrows}}$ 1000	$\overset{10倍}{\underset{\frac{1}{10}倍}{\leftrightarrows}}$ 100	$\overset{10倍}{\underset{\frac{1}{10}倍}{\leftrightarrows}}$ 10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
10 的次方	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
指數	4	$\overset{+1}{\underset{-1}{\leftrightarrows}}$ 3	$\overset{+1}{\underset{-1}{\leftrightarrows}}$ 2	$\overset{+1}{\underset{-1}{\leftrightarrows}}$ 1	0	-1	-2	-3

當以 10 為底數，指數為正整數時：

若數值變為 10 倍，則指數增加 1；若數值變為 $\frac{1}{10}$ 倍，則指數減少 1。

這樣的關係在指數為 0 或負整數時也會成立：

10 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 1，我們可記為「10^0」；

1 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 $\frac{1}{10}$，我們可記為「10^{-1}」；

$\frac{1}{10}$ 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 $\frac{1}{100}$，也就是 $\frac{1}{10^2}$，我們可記為「10^{-2}」；

$\frac{1}{100}$ 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 $\frac{1}{1000}$，也就是 $\frac{1}{10^3}$，我們可記為「10^{-3}」；依此類推。

當 n 為正整數時，$\frac{1}{10^n}$ 可記為 10^{-n}，而 $10^0=1$。

隨堂練習

1. 分別以分數和小數表示 10^{-7}。

2. 在括號內填入適當的數。

$$0.000001=\frac{1}{(\qquad\qquad)}=\frac{1}{10^{(\quad)}}=10^{(\quad)}$$

主題 3 科學記號

在科學領域中，我們常會遇到很大或很小的正數，例如：地球的質量約 5970000000000000000000 公噸、電子顯微鏡則可以觀察到 0.00000014 公尺大小的細胞，像這樣很大或很小的數，我們很難閱讀，也很容易把 0 的個數寫錯，所以在科學上通常將它們寫成 5.97×10^{21} 公噸和 1.4×10^{-7} 公尺，這種記數的方式稱為**科學記號**。

Key point

科學記號表示法

將一個正數表示成 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\leq a<10$，且 n 為整數，則 $a\times10^{n}$ 就是這個正數的科學記號表示法。

例 4　以科學記號表示數

以科學記號表示下列各數。

(1) 930000000　(2) 0.00000431　(3) $\dfrac{8}{100000}$

解 (1) $930000000=9.3\times\underbrace{100000000}_{8\text{ 個 }0}=9.3\times10^{8}$

(2) $0.00000431=4.31\times0.\underbrace{000001}_{6\text{ 位}}=4.31\times10^{-6}$

(3) $\dfrac{8}{\underbrace{100000}_{5\text{ 個 }0}}=\dfrac{8}{10^{5}}=8\times\dfrac{1}{10^{5}}=8\times10^{-5}$

Hint

930000000.
❽❼❻❺❹❸❷❶

0.00000431
❶❷❸❹❺❻

隨堂練習

以科學記號表示下列各數。

(1) 3100000000　(2) 0.000000729　(3) $\dfrac{5}{100000000}$

在科學上，除了以科學記號來表示很大或很小的數之外，我們也制定一些特定的單位，讓記錄或使用更加容易，以下是一些常見的長度單位：

長度單位	簡記	單位換算
公里	km	$1\ km=1000\ m=10^{3}\ m$
毫米	mm	$1\ mm=0.001\ m=10^{-3}\ m$
微米	μm	$1\ \mu m=0.000001\ m=10^{-6}\ m$
奈米	nm	$1\ nm=0.000000001\ m=10^{-9}\ m$

隨堂練習

諾羅病毒是最常引起腸胃炎的病毒之一，其直徑大小約為 27 奈米，即 0.000000027 公尺。試將 0.000000027 以科學記號表示。

例 5　判斷科學記號的位數

(1) 若將 6.03×10^{7} 乘開，則這個數是幾位數？

(2) 若將 4.2×10^{-4} 乘開，則這個數的小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

解 (1) $6.03\times10^{7}=6.03\times10000000=60300000$

所以 6.03×10^{7} 是 8 位數。

(2) $4.2\times10^{-4}=4.2\times0.0001=0.00042$

所以 4.2×10^{-4} 乘開後，小數點後第 4 位開始出現不為 0 的數字。

隨堂練習

1. 若將 6.9×10^{5} 乘開，則這個數是幾位數？

2. 若將 3.62×10^{-6} 乘開，則這個數的小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

由例 5 及隨堂練習我們可以知道，若 $1\leq a<10$，n 為正整數，則：

(1) **科學記號 $a\times10^{n}$ 乘開後，整數部分是 ($n+1$) 位數**。

(2) **科學記號 $a\times10^{-n}$ 乘開後，小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字**。

✓ 科學記號的比較大小

當兩個數寫成科學記號的形式時，可以輕易的比較這兩數的大小。若科學記號的指數相同，例如：1.2×10^{3} 與 2.4×10^{3} 的指數都是 3，因此這兩數乘開後都是 4 位數，又 $1.2<2.4$，所以 $1.2\times10^{3}<2.4\times10^{3}$。但若科學記號的指數不同，我們要怎麼比較大小呢？

例 6　科學記號的比較大小

比較下列各題中兩數的大小。

(1) 1.2×10^{4} 與 2.3×10^{3}　　(2) 3.4×10^{-4} 與 3.6×10^{-5}

解1　直接利用位數判斷大小：

(1) 1.2×10^{4} 是 5 位數，2.3×10^{3} 是 4 位數，故 $1.2\times10^{4}>2.3\times10^{3}$。

(2) 3.4×10^{-4} 在小數點後第 4 位開始出現不為 0 的數字，
3.6×10^{-5} 在小數點後第 5 位開始出現不為 0 的數字，
故 $3.4\times10^{-4}>3.6\times10^{-5}$。

解2　先將指數化成相同：

(1) $1.2\times10^{4}=1.2\times10\times10^{3}=12\times10^{3}$
因為 $12\times10^{3}>2.3\times10^{3}$，
所以 $1.2\times10^{4}>2.3\times10^{3}$。

(2) $3.4\times10^{-4}=3.4\times10\times10^{-5}=34\times10^{-5}$
因為 $34\times10^{-5}>3.6\times10^{-5}$，
所以 $3.4\times10^{-4}>3.6\times10^{-5}$。

Hint

$10^{4}=10000$
$=10\times1000$
$=10\times10^{3}$
$10^{-4}=0.0001$
$=10\times0.00001$
$=10\times10^{-5}$

我們可以發現：**兩個數若以科學記號表示，指數愈大者，其數值愈大**。

Key point

科學記號的比較大小

當兩數分別表示成 $a\times10^{m}$、$b\times10^{n}$，m、n 為整數，
其中 $1\leq a<10$、$1\leq b<10$：

(1) 若 $m=n$ 且 $a>b$，則 $a\times10^{m}>b\times10^{n}$。

(2) 若 $m>n$，則 $a\times10^{m}>b\times10^{n}$。

隨堂練習

比較兩數的大小，在 □ 中填入＞、＜或＝。

(1) 4.59×10^{5} □ 6.1×10^{5}　　(2) 5.6×10^{-5} □ 9.2×10^{-6}

重點整理

1　乘方的意義

若 a 是不為 0 的整數，且 n 為正整數，則：

(1) $\underset{\text{底數}}{a}^{\overset{\text{指數}}{n}}=\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{ 個}}$。

例 $5^3=5\times5\times5$

$(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$

$-3^4=-(3\times3\times3\times3)$

(2) $0^n=0$。　例 $0^5=0$，$0^{12}=0$

(3) $1^n=1$。　例 $1^3=1$

2　10 的次方

當 n 為正整數時，$\dfrac{1}{10^n}$ 可記為 10^{-n}，而 $10^0=1$。

例 $0.00001=\dfrac{1}{10^5}=10^{-5}$

3　科學記號表示法

一個正數表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leq a<10$，且 n 為整數。

例 5×10^4、2.36×10^8、1.7×10^{-6} 都是科學記號表示法。

4　科學記號的比較大小

當兩數表示成 $A=a\times10^m$、$B=b\times10^n$，m、n 為整數，

其中 $1\leq a<10$、$1\leq b<10$，則：

(1) 若 $m=n$ 且 $a>b$，則 $a\times10^m>b\times10^n$。　例 $8\times10^{-6}>6\times10^{-6}$

(2) 若 $m>n$，則 $a\times10^m>b\times10^n$。　例 $3\times10^4>8\times10^2$

自我評量

1 判斷下列哪個等式是正確的？答：＿＿＿＿＿＿。　P.66 隨堂

(A) $(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=(-3)^5$

(B) $(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=-3^4$

(C) $(-3)\times(-3)\times(-3)=-3^3$

(D) $-(3\times3)=(-3)^2$

2 計算下列各式的值。　P.68 例 3

(1) $-3^2+(-2)^3-(-1)^4$

(2) $(-5)^2-5^2\div[4+(-1)^2]^2$

3 下列哪些數值與 10^{-5} 的大小相等？答：＿＿＿＿＿＿。(可複選)　P.69 隨堂

(A) 0.00001　(B) 0.000001　(C) $\dfrac{1}{10000}$　(D) $\dfrac{1}{100000}$

4 以科學記號表示下列各數。　P.71 例 4

(1) 7000000　(2) 0.000000147　(3) $\dfrac{3}{10000}$

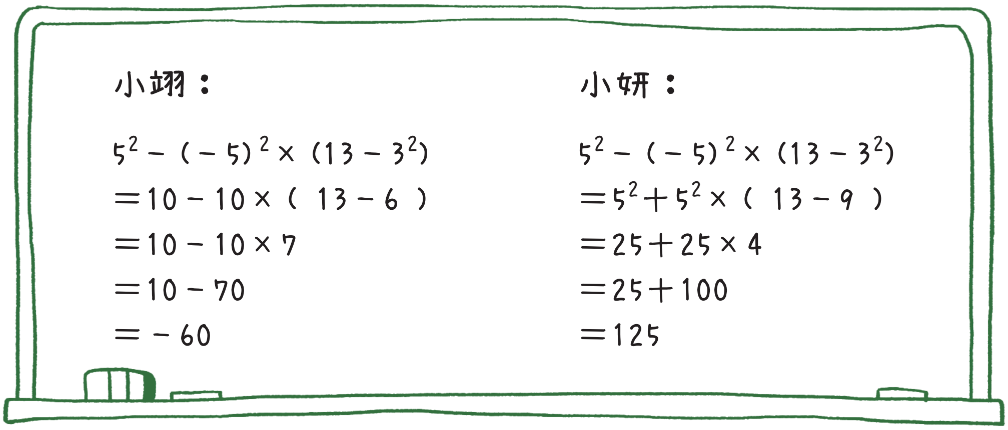
5 比較兩數的大小，在□中填入＞、＜或＝。 P.73 例 6

(1) $2.5\times10^{6}\ \square\ 3.4\times10^{6}$　　(2) $1.5\times10^{9}\ \square\ 4.8\times10^{8}$

(3) $3.1\times10^{-4}\ \square\ 6.05\times10^{-4}$　　(4) $8.2\times10^{-7}\ \square\ 2.97\times10^{-6}$

挑錯題

以下是小翊和小妍計算「$5^2-(-5)^2\times(13-3^2)$」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。



小翊：

$5^2-(-5)^2\times(13-3^2)$
$=10-10\times(13-6)$
$=10-10\times7$
$=10-70$
$=-60$

小妍：

$5^2-(-5)^2\times(13-3^2)$
$=5^2+5^2\times(13-9)$
$=25+25\times4$
$=25+100$
$=125$

一題多解

有 A、B 兩個棋子，分別在數線上 -5 與 11 的位置上，已知同時將 A 與 B 兩個棋子向左移動相同的單位長，恰可以使兩棋子的位置所表示的數互為相反數，則兩棋子各向左移動了幾個單位長？

1 列舉法

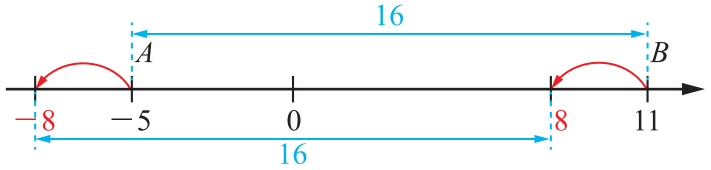
向左移動單位數	1	2	3	……
A 棋子的位置	-6	-7	-8	……
B 棋子的位置	10	9	8	……

因此向左移動 3 個單位長，可使兩棋子的位置所表示的數互為相反數。

2 $\overline{AB}$ 長度保持不變

$\overline{AB}=11-(-5)=16$，

又 $\dfrac{16}{2}=8$，可知 A、B 兩棋子分別到達 -8 和 8 的位置，如圖所示。



$11-8=3$，可知兩個棋子各向左移動 3 個單位長，

此時新的位置所表示的數互為相反數。

3 相反數的中點是原點

$\overline{AB}=11-(-5)=16$，

$\overline{AB}$ 的中點為 $(-5)+(16\div 2)=(-5)+8=3$，

如果要互為相反數，中點要從 3 移動到 0，

此時，A、B 也要同時向左移動 3 個單位長，

則兩棋子的位置所表示的數互為相反數。