2-1 點、線、圓

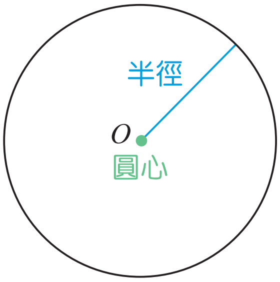
① 圓、圓弧長與扇形

位於臺鐵彰化站附近的扇形車庫是全臺僅存運作中的火車頭調度站，主要功能是提供火車頭保養與維修之用。而圓弧的設計從空中鳥瞰就像一把扇子，中間的調度轉盤是圓形，可作 360° 旋轉，不僅節省空間，且方便火車頭的調度。

日常生活中的圓，既可指作為周界的曲線（即圓周部分），也可指這條曲線以及它的內部（即圓盤部分）；而數學上的圓，指的就是圓周部分。接下來，我們來複習並介紹跟圓有關的一些數學名詞。

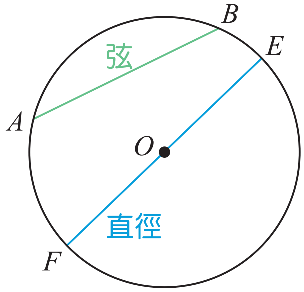
圓

在平面上和一個定點等距離的所有點所形成的圖形稱為圓，此定點稱為圓心，而圓心到圓上任一點的距離稱為半徑。如右圖，若以點 O 為圓心，則稱此圓為圓 O。



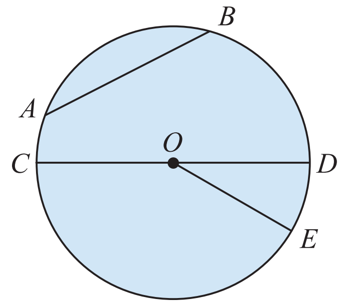
弦

連接圓上任意兩點所形成的線段稱為弦，如果一弦通過圓心，此弦就是直徑，而直徑是最長的弦。如右圖，$\overline{AB}$ 與 $\overline{EF}$ 都是弦，其中 $\overline{EF}$ 為直徑，所以 $\overline{EF}$ 也是最長的弦。



隨堂練習

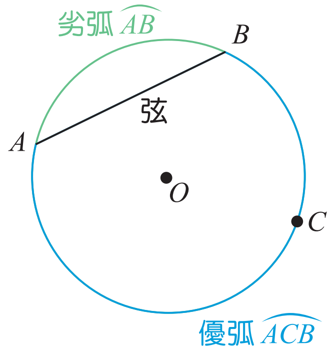
如圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{OE}$ 哪些為圓 O 的弦？



弧

一弦將圓周分成兩部分，兩部分都稱為**弧**。若此弦恰為直徑，則可將圓分成相等的兩部分，稱為**半圓**。弧若小於半圓稱為**劣弧**；弧若大於半圓稱為**優弧**。

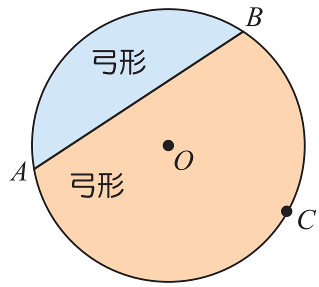
如右圖，$\overline{AB}$ 將圓周分為兩個弧，這兩個弧有相同的端點，都可記為 $\overparen{AB}$。但為了加以區別，通常將其中的劣弧以 $\overparen{AB}$ 表示，而優弧則在其弧上多取一點 C，以 $\overparen{ACB}$ 表示。



弓形

圓上一弦與其所對的弧所圍成的圖形稱為**弓形**。

如右圖，藍色區域的圖形是由弦 $\overline{AB}$ 與劣弧 $\overparen{AB}$ 所圍成，所以此圖形是弓形；橘色區域的圖形是由弦 $\overline{AB}$ 與優弧 $\overparen{ACB}$ 所圍成，所以此圖形也是弓形。



補給站「 圓 」來如此

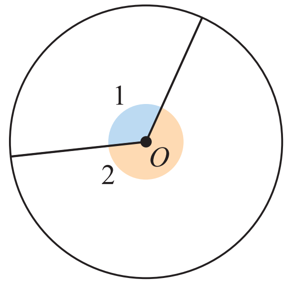
戰國時代《墨子．經上》:「圓，一中同長也。」這是中國歷史上最早對於圓的定義。意思是說：圓有一個圓心，圓心到圓周上各點的距離（即半徑）都相等。圓規在墨子之前早已被人們廣泛地使用，但給予圓精確的定義，則是墨子的貢獻。墨子對圓的定義與後來歐幾里得對圓的定義完全一致。

墨子 西元前 468～西元前 376

圓心角

以圓心為頂點，兩條半徑為邊，組成的角稱為圓心角。

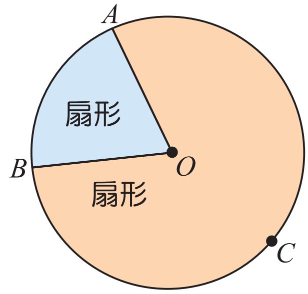
如右圖，∠1、∠2 都是圓心角。



扇形

圓的兩條半徑及所夾之弧所圍成區域的圖形稱為扇形。

如右圖，藍色區域的圖形是由兩個半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 與劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所圍成，此圖形即是扇形；橘色區域的圖形是由兩個半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 與優弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 所圍成，此圖形也是扇形。

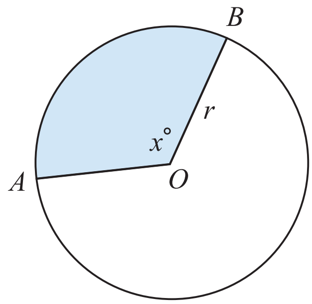


國小學過「圓周率＝圓周長÷直徑」，其值大約為 3.14，圓周率習慣以希臘字母「π」（讀作ㄆㄞˋ）表示。若用「r」表示半徑，則：

圓面積＝半徑×半徑×圓周率＝$r\times r\times\pi=\pi r^2$；

圓周長＝直徑×圓周率＝$2\times r\times\pi=2\pi r$。

那麼扇形面積與弧長該如何計算呢？一個周角是 360°，將一個周角分成 360 等分，即可得到 1° 的圓心角。



❶ 圓心角為 1° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{1}{360}$，即 $\pi r^2\times\frac{1}{360}$。

圓心角為 x° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{x}{360}$，即 $\pi r^2\times\frac{x}{360}$。

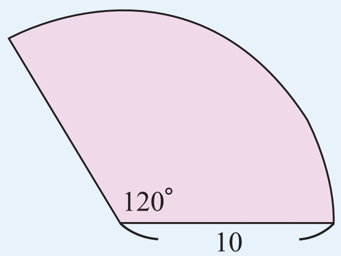
❷ 圓心角為 1° 的扇形，其弧長為圓周長的 $\frac{1}{360}$，即 $2\pi r\times\frac{1}{360}$。

圓心角為 x° 的扇形，其弧長為圓周長的 $\frac{x}{360}$，即 $2\pi r\times\frac{x}{360}$。

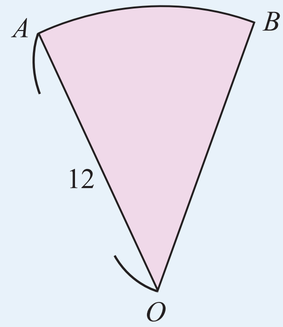
例 1 扇形圓心角和面積

自評 P111 第 1 題

1. 如圖，有一扇形半徑為 10 公分，圓心角為 120°，求此扇形的周長及面積。



2. 如圖，扇形 AOB 中，已知 $\overline{OA}=12$ 公分，且 $\overparen{AB}$ 的長為 3π 公分，求 $\angle AOB$。



解

1. 扇形的周長

$$=2\times\pi\times10\times\frac{120}{360}+10\times2$$
$$=\frac{20}{3}\pi+20\text{（公分）}$$

扇形的面積

$$=\pi\times10^2\times\frac{120}{360}$$
$$=\frac{100}{3}\pi\text{（平方公分）}$$

2. 設 $\angle AOB=x^\circ$，則

扇形弧長 $=2\times\pi\times12\times\frac{x}{360}=3\pi$，

得 $x=45$，

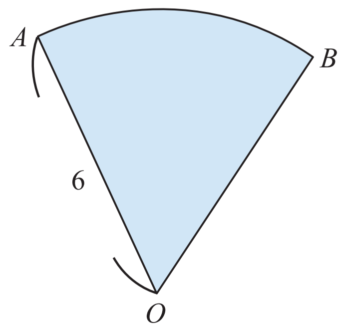
$\therefore \angle AOB=45^\circ$。

隨堂練習

如圖，扇形 AOB 中，已知 $\overline{OA}=6$ 公分，且 $\overparen{AB}$ 的長為 2π 公分，求：

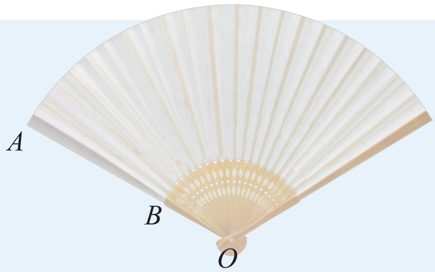
(1) $\angle AOB$。

(2) 扇形 AOB 的面積。



例2 扇形的應用

有一把功夫扇，其骨柄長 $\overline{OA}=27$ 公分，扇面寬度 $\overline{AB}=18$ 公分，如圖。當功夫扇完全張開時，其圓心角為 120°，求此時扇面的面積。



解 $\because \overline{OB}=27-18=9$，

$\therefore$功夫扇的扇面面積＝以 $\overline{OA}$ 為半徑的扇形面積－以 $\overline{OB}$ 為半徑的扇形面積

$$=27\times27\times\pi\times\frac{120}{360}-9\times9\times\pi\times\frac{120}{360}$$
$$=243\pi-27\pi$$
$$=216\pi\text{（平方公分）}$$

利用計算機求 216π 的近似值：

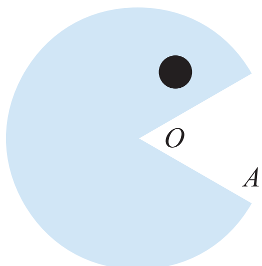
數值	按法	螢幕顯示
216π	216 × SHIFT EXP =	678.5840132

所以扇面面積大約為 678.6 平方公分。

本教材使用之計算機，若需 π 功能，須先按 SHIFT 再按 EXP

隨堂練習

如圖，有一個小精靈，張開嘴巴時是一個扇形，半徑長 $\overline{OA}=6$；黑色眼睛是一個圓形，半徑為 1。已知扇形小精靈的圓心角為 300°，求此時藍色部分的面積。（圓周率以 π 表示，或使用計算機求近似值，四捨五入取至小數點後第二位）

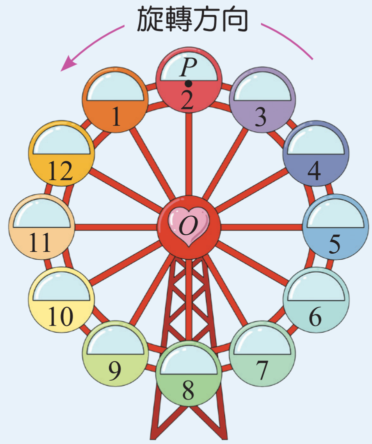


第2章

關於π與圓面積的補充，可參考P224。

例 3 圓弧長的應用

如圖，歡樂遊樂園裡的摩天輪，以 O 為圓心，半徑 $\overline{OP}=20$ 公尺。若以等間隔的方式設置 12 個車廂，車廂依順時針方向分別編號為 1 號到 12 號，且運行時以逆時針方向等速旋轉。目前 2 號車廂在最高點，則第一次 6 號車廂到達最高點時，P 點所掃過的弧長為多少公尺？(可使用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第二位)



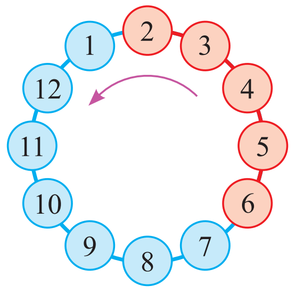
解 $\because 6-2=4$，

$\therefore$ 需再旋轉 $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$(圈)，

又摩天輪半徑為 20 公尺，

$\therefore$ 圓周長為 $2\times\pi\times 20=40\pi$(公尺)，

故弧長 $=40\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{40}{3}\pi\fallingdotseq 41.89$(公尺)。



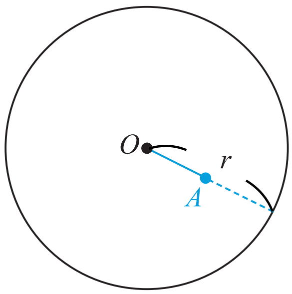
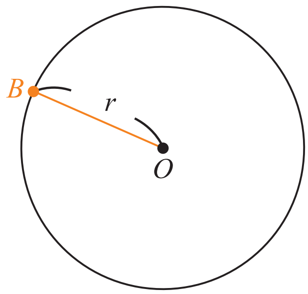
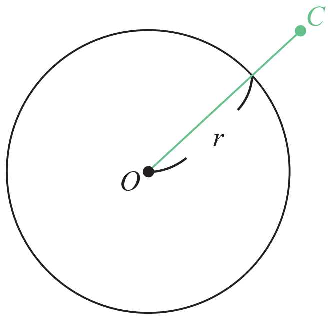
輸入 40 ÷ 3 × SHIFT EXP =，螢幕顯示 41.88790205 。

隨堂練習

承 例 3，若環繞一圈為 20 分鐘，則 P 點每分鐘所掃過的弧長是多少公尺？(可使用計算機計算，並四捨五入取至小數點後第二位)

② 點與圓的位置關係

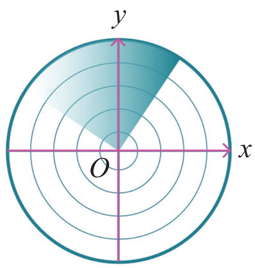
一圓將所在的平面分成圓的內部、圓、圓的外部，由下表可知，A 點在圓內、B 點在圓上、C 點在圓外。要知道點與圓的位置關係，可以由此點到圓心的距離與半徑的大小關係來判斷。

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 （$\overline{OA}<r$）	等於半徑 （$\overline{OB}=r$）	大於半徑 （$\overline{OC}>r$）

隨堂練習

1. 已知圓 O 的半徑為 5，D、E、F 三點與此圓心 O 的距離分別為 4、5、8，判別 D、E、F 三點與圓 O 的位置關係：（填入圓內、圓上或圓外）
   (1) D 點在＿＿＿＿＿。 (2) E 點在＿＿＿＿＿。 (3) F 點在＿＿＿＿＿。

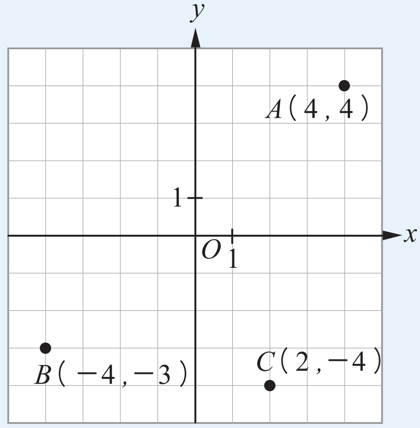
2. 如圖，一艘海巡船的雷達螢幕上可偵測到的最大距離為 8 個單位，即距離原點 O（海巡船的位置）為 8 個單位以內（含）的漁船都可以顯示在螢幕上。若 A、B 兩艘漁船的坐標分別為 $(0,-9)$ 與 $(-7,0)$，則哪艘漁船會顯示在螢幕上？



例 4 點與圓的位置關係

自評 P111 第 2 題

如圖，坐標平面上 $A(4,4)$、$B(-4,-3)$、$C(2,-4)$三點。若圓 O 的圓心是原點 O，半徑為 5，判別 A、B、C 三點與圓 O 的位置關係。



解 $\because O(0,0)$為圓心，由兩點距離公式可知：

(1) $\overline{OA}=\sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{32}>5$（半徑），

$\therefore A$ 點在圓外。

(2) $\overline{OB}=\sqrt{(-4-0)^2+(-3-0)^2}=5$（半徑），

$\therefore B$ 點在圓上。

(3) $\overline{OC}=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{20}<5$（半徑），

$\therefore C$ 點在圓內。

已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

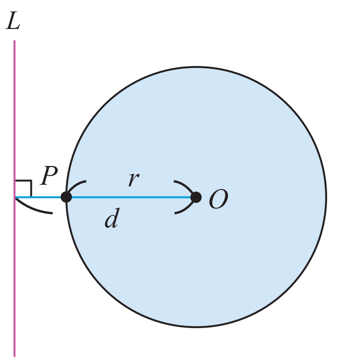
隨堂練習

在坐標平面上，若圓 O 的圓心在原點，$A(-5,12)$在圓 O 上，求圓 O 的半徑。

③ 直線與圓的位置關係

在平面上，一個圓與一條直線的位置關係有三種情形，我們透過直線 L 的移動來觀察直線與圓的位置關係。

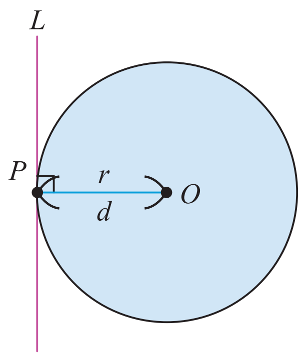
如圖，$\overleftrightarrow{OP}$ 通過圓心 O，交圓 O 於 P 點，且直線 L 垂直 $\overleftrightarrow{OP}$。其中 d 為圓心到直線 L 的距離，r 為圓 O 半徑。



$d>r$

直線 L 與圓 O 不相交

直線 L 與圓 O 的交點數為 0。

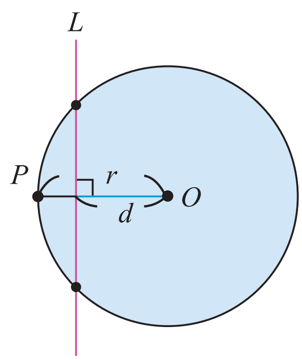


$d=r$

將直線 L 逐漸向右往 P 點移動，並保持與 $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直。

當直線 L 通過 P 點時，L 稱為圓 O 的**切線**，P 稱為**切點**。

直線 L 與圓 O 的交點數為 1。



$d<r$

再將直線 L 向右移動，並保持與 $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直。

當直線 L 與圓 O 交於兩點時，L 稱為圓 O 的**割線**。

直線 L 與圓 O 的交點數為 2。

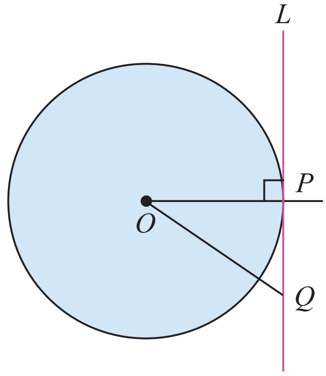
由上圖可觀察到，當直線 L 為圓 O 的切線，切點為 P，則 $\overline{OP}\perp L$。

反過來看，若 P 為圓 O 上的點，L 為通過 P 點的直線且 $\overline{OP}\perp L$，那麼 L 是否為圓 O 的切線呢？

說明

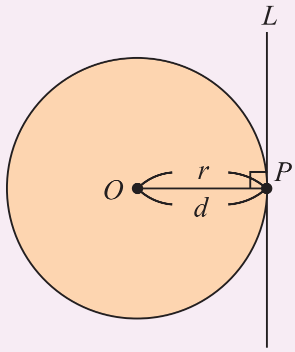
如右圖，已知直線 $L\perp\overline{OP}$，若在 L 上任取異於 P 的一點 Q，則 O、P、Q 三點可形成一個直角三角形，其中 $\overline{OQ}$ 為斜邊，所以 $\overline{OQ}>$ 半徑 $\overline{OP}$，故 Q 點在圓外。

也就是說，L 與圓 O 不可能有除了 P 點之外的第二個交點，故 L 為圓 O 的切線。



圓與切線的關係

1. 一個圓的切線 L 必垂直於圓心 O 與切點的連線 $\overline{OP}$。
2. 圓心 O 到切線 L 的距離 d 等於圓的半徑 r。
3. 若過圓上一點 P 的直線 L 垂直於過 P 點的半徑 $\overline{OP}$，則直線 L 為該圓的切線。



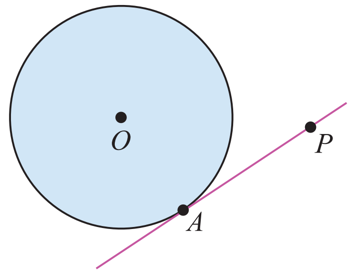
隨堂練習

自評 P112 第 3 題

圓 O 的半徑為 10，若圓心到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 5、10、13，則 L_1、L_2、L_3 與圓 O 分別有幾個交點？

圓的切線段

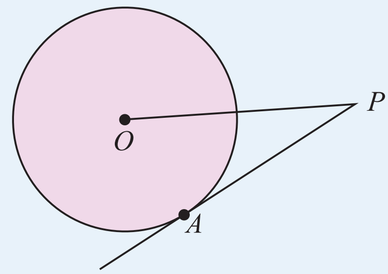
如圖，從圓外一點 P 作此圓的一條切線，A 為切點，則 $\overline{PA}$ 稱為 P 點到圓 O 的**切線段長**。



例 5 求切線段長

自評 P112 第 4 題

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑為 5，$\overline{OP}=10$，求切線段長 $\overline{AP}$。



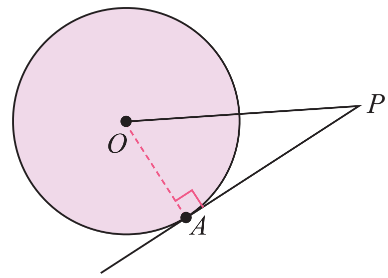
解 如圖，連接 $\overline{OA}$。

$\because \overleftrightarrow{PA}$ 與圓相切於 A 點，

$\therefore \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{PA}$，故 $\triangle OPA$ 為直角三角形。

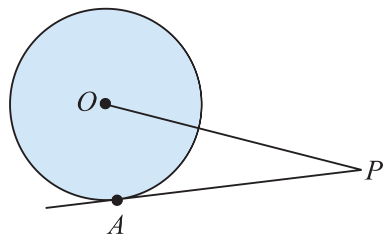
又 $\overline{OA}$ 為圓 O 的半徑，$\therefore \overline{OA}=5$，

根據畢氏定理：$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$。



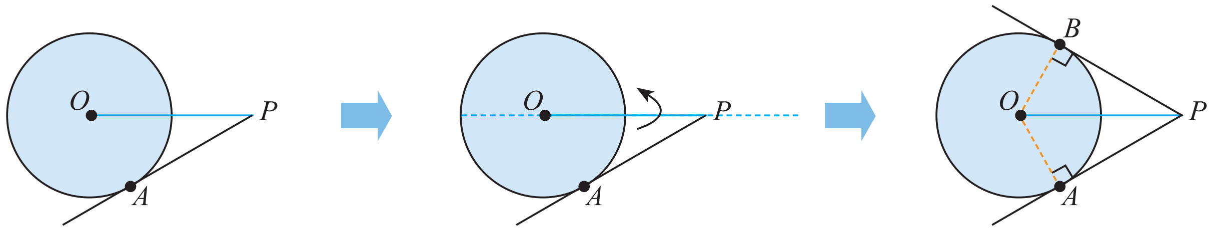
隨堂練習

如圖，$\overleftrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點，已知 $\overline{OP}=13$，$\overline{AP}=12$，求圓 O 的半徑。

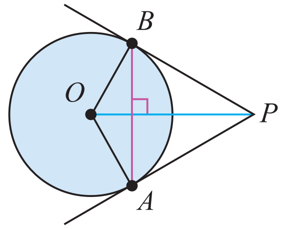


可搭配附件 9、10 操作

我們曾經學過圓是線對稱圖形，任何一條通過圓心的直線都是圓的對稱軸，所以下圖中的 $\overleftrightarrow{OP}$ 為圓 O 的對稱軸。已知 $\overleftrightarrow{PA}$ 為圓 O 的切線，A 為切點，沿著 $\overline{OP}$ 對摺，可找到 A 點的對稱點 B，因此 B 在圓上，$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的切線，B 為切點，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，$\angle APO=\angle BPO$，$\triangle OBP$ 是 $\triangle OAP$ 的對稱圖形。



連接 $\overline{AB}$、$\overline{OA}$、$\overline{OB}$，則四邊形 $OAPB$ 為箏形，所以 $\overleftrightarrow{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 會互相垂直，且 $\overleftrightarrow{OP}$ 會平分 $\overline{AB}$，如右圖。



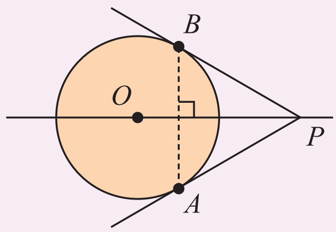
過圓外一點的兩切線性質

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線，A、B 為切點，則：

(1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA}=\overline{PB}$。

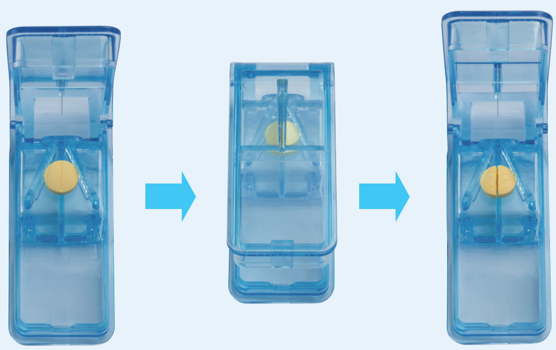
(2) $\angle APO=\angle BPO$，即 $\overleftrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$。

(3) $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。



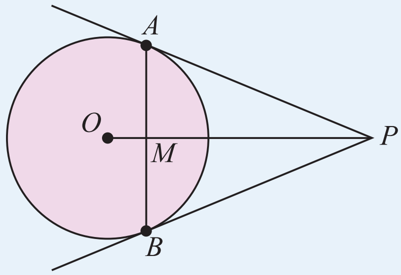
補給站 切藥器

服用藥物時，是否曾經遇過藥物需要切半，卻擔心切半時大小不均的困擾呢？藥局裡販售的切藥器，就是利用圖中刀片切下時，落在角平分線上，將圓形藥物分成大小均等的兩半。

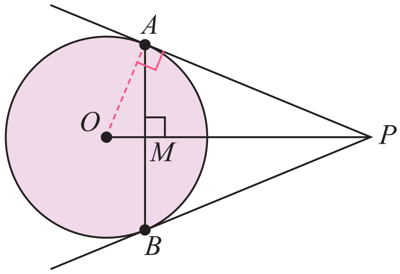


例6 過圓外一點的切線應用

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A、B 兩點，$\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，若圓 O 半徑為 5，$\overline{OP}=13$，求 $\overline{AB}$。



解 如圖，連接 $\overline{OA}$，則 $\overline{OA}=5$。



$\because \overleftrightarrow{PA}$ 切圓 O 於 A 點，

$\therefore \angle OAP=90^\circ$，

則△OAP 是直角三角形，

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$。

又 $\overleftrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，←過圓外一點的兩切線性質

$\therefore \overline{AM}$ 是直角三角形 OAP 斜邊上的高，

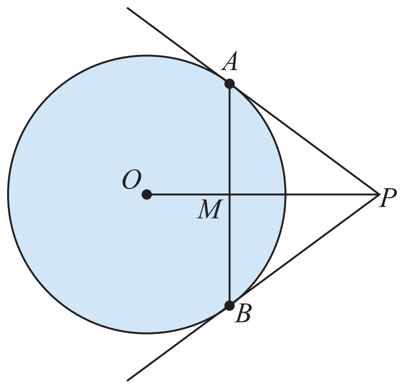
故 $\overline{AM}=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{5\times 12}{13}=\dfrac{60}{13}$，

因此 $\overline{AB}=2\,\overline{AM}=2\times\dfrac{60}{13}=\dfrac{120}{13}$。

直角三角形斜邊上的高$=\dfrac{兩股乘積}{斜邊}$

隨堂練習

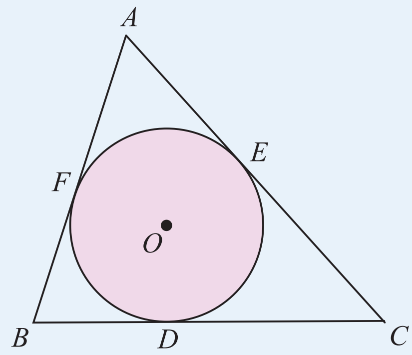
如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A、B 兩點，$\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 M 點，若圓 O 半徑為 6，$\overline{AP}=8$，求 $\overline{AB}$。



第2章

例 7 切線段的應用

如圖，$\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，已知 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{AC}=9$，求 $\overline{AF}$。



解 $\because$ 圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

$\therefore$ 可設 $\overline{AF}=\overline{AE}=x$，

則 $\overline{BF}=\overline{BD}=7-x$，$\overline{CE}=\overline{CD}=9-x$。

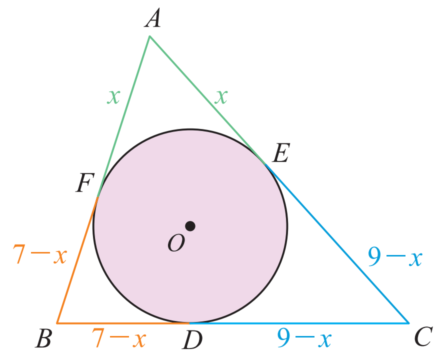
$\because$ $\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}=8$

$\therefore$ $(7-x)+(9-x)=8$

$16-2x=8$

$x=4$

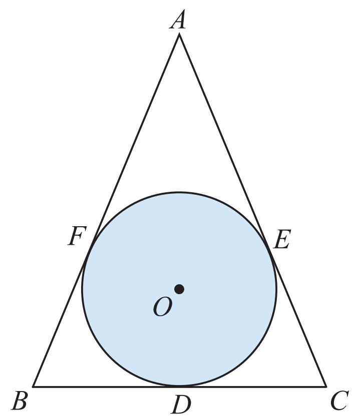
即 $\overline{AF}=4$。



隨堂練習

自評 P113 第 5 題

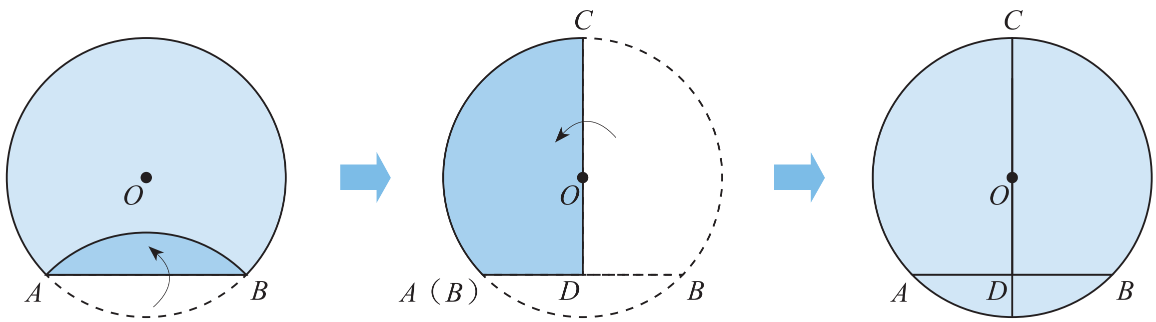
如圖，$\triangle ABC$ 三邊分別與圓 O 相切於 D、E、F 三點，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$，求 $\overline{AF}$。



弦與弦心距

接下來，我們將利用圓的線對稱性質來探討圓上一弦與圓心的相關性質。

拿出附件 8，摺出圓 O 的任意一弦 $\overline{AB}$，如圖一；接著將附件對摺，使得 B 點與 A 點疊合，$\overline{CD}$ 為摺痕，如圖二；再將附件攤平，如圖三。



圖一　圖二　圖三

從上述摺疊的過程可以發現：

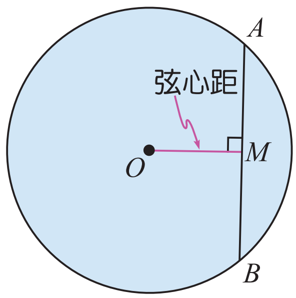
(1) $\overleftrightarrow{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，且 $\overleftrightarrow{CD}$ 會通過圓心。

(2) 通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦，即 $\overline{AD}=\overline{BD}$。

弦的性質

1. 弦的中垂線會通過圓心。
2. 通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦。

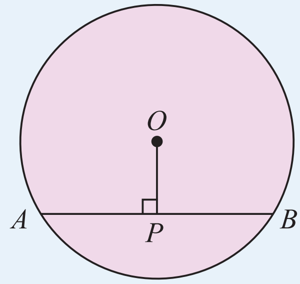
圓心到弦的距離稱為**弦心距**。如右圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的弦，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$ 於 M 點，則 $\overline{OM}$ 稱為 $\overline{AB}$ 的弦心距，由上述可知 $\overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。



例 8 弦心距的應用

自評 P113 第 6 題

如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距 $\overline{OP}=3$，$\overline{AB}=6\sqrt{3}$，求圓 O 的半徑。



解 $\because$ $\overline{OP}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，

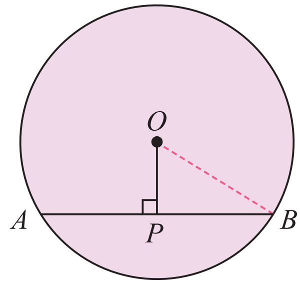
$\therefore$ $\overline{OP}$ 垂直平分弦 $\overline{AB}$，

$\overline{BP}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

連接 $\overline{OB}$，依據畢氏定理：

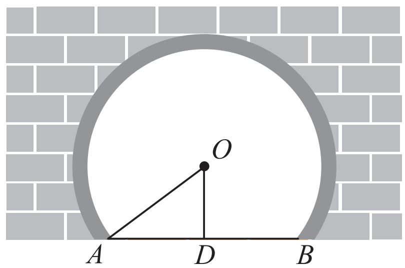
$\overline{OB}=\sqrt{\overline{BP}^2+\overline{OP}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$

故圓 O 的半徑為 6。



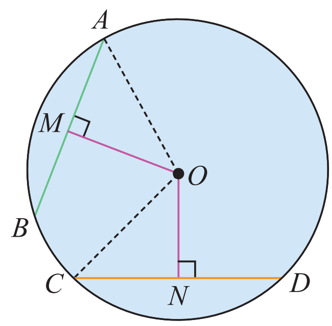
隨堂練習

如圖，為建造一條隧道，需要用潛盾機鑿開隧道孔。已知路寬 $\overline{AB}$ 為隧道截面圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距為 3 公尺，路寬 $\overline{AB}=8$ 公尺，求圓 O 的半徑。



接下來，我們來探討在同圓中，弦長與弦心距之間的關係。

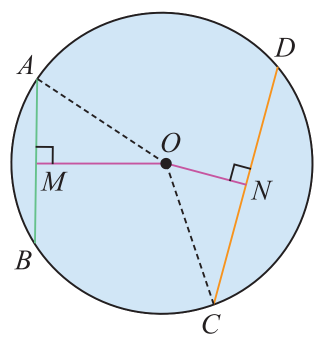
探索活動 等弦心距對等弦；大弦心距對小弦



圖一

1. 如圖一，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距。連接 $\overline{OA}$、$\overline{OC}$，則 $\overline{OA}=\overline{OC}=$半徑。
   (1)若 $\overline{OM}=\overline{ON}$，可以利用畢氏定理得到 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 嗎？

   (2)若 $\overline{AB}=\overline{CD}$，可以利用畢氏定理得到 $\overline{OM}=\overline{ON}$ 嗎？



圖二

2. 如圖二，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距。連接 $\overline{OA}$、$\overline{OC}$，則 $\overline{OA}=\overline{OC}=$半徑。
   (1)若 $\overline{OM}>\overline{ON}$，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的大小關係為何？

   (2)若 $\overline{AB}<\overline{CD}$，則 $\overline{OM}$ 與 $\overline{ON}$ 的大小關係為何？

弦心距的性質

1. 在同圓或等圓中，若弦心距相等，則所對應的弦等長；
   若弦等長，則所對應的弦心距相等。
2. 在同圓或等圓中，若弦心距愈長，則所對應的弦愈短；
   若弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

隨堂練習

1. 已知圓 O 的半徑為 10，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=16$，比較 $\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 的大小關係。

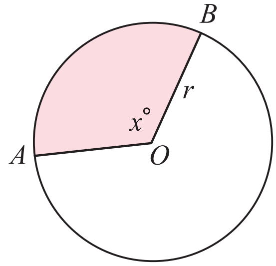
2. 圓 O 與圓 O' 為半徑相等的兩圓，則圓 O 與圓 O' 稱為等圓。已知 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O、圓 O' 兩等圓上的弦，$\overline{OM}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，$\overline{O'N}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，回答下列問題，並填入＞、＝、＜：

   (1)若 $\overline{OM}=\overline{O'N}$，則 $\overline{AB}$ ______ $\overline{CD}$。 (2)若 $\overline{OM}<\overline{O'N}$，則 $\overline{AB}$ ______ $\overline{CD}$。

   (3)若 $\overline{AB}=\overline{CD}$，則 $\overline{OM}$ ______ $\overline{O'N}$。 (4)若 $\overline{AB}>\overline{CD}$，則 $\overline{OM}$ ______ $\overline{O'N}$。

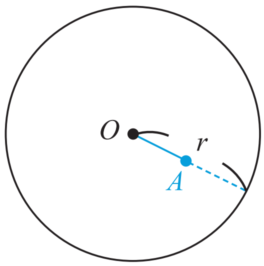
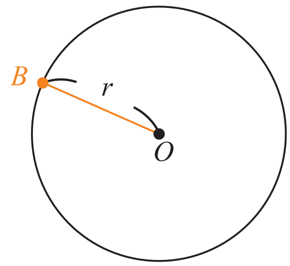
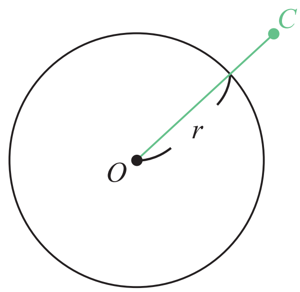
重點回顧

❶ 扇形的面積與弧長

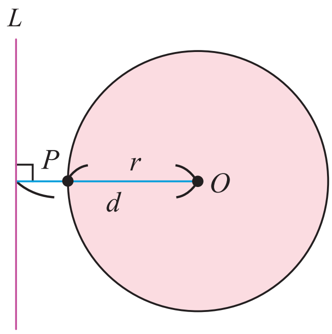
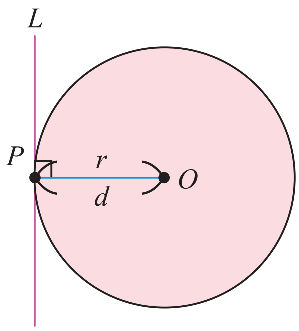
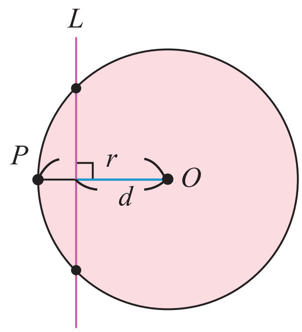


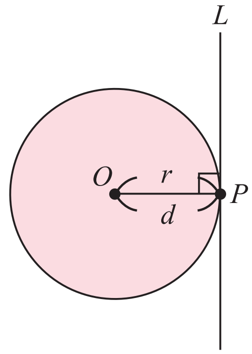
圓心角為 x° 的扇形，其面積為圓面積的 $\frac{x}{360}$，即 $\pi r^2\times\frac{x}{360}$；其弧長為圓周長的 $\frac{x}{360}$，即 $2\pi r\times\frac{x}{360}$。

❷ 點與圓的位置關係

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑（$\overline{OA}<r$）	等於半徑（$\overline{OB}=r$）	大於半徑（$\overline{OC}>r$）

❸ 直線與圓的位置關係

圖示			
圓心到直線的距離	$d>r$ 直線 L 與圓 O 不相交	$d=r$ 當直線 L 通過 P 點時，L 稱為圓 O 的切線，P 稱為切點。	$d<r$ 當直線 L 與圓 O 交於兩點，L 稱為圓 O 的割線。
直線與圓的位置關係	不相交	只交於一點	交於兩點



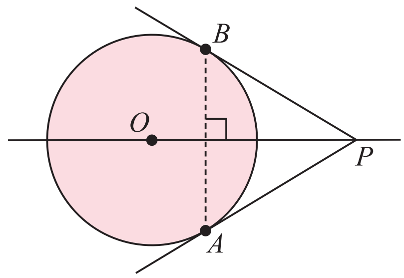
❹圓與切線的關係

(1)一個圓的切線 L 必垂直於圓心 O 與切點的連線 $\overline{OP}$。

(2)圓心 O 到切線 L 的距離 d 等於圓的半徑 r。

(3)若過圓上一點 P 的直線 L 垂直於過 P 點的半徑 $\overline{OP}$，
則此直線 L 為該圓的切線。

❺過圓外一點的兩切線性質



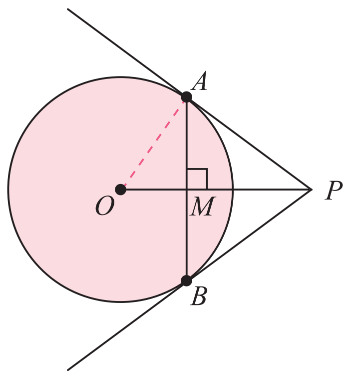
如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線，A、B 為切點，則：

(1)過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA}=\overline{PB}$。

(2)$\angle APO=\angle BPO$，即 $\overleftrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$。

(3)$\overleftrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$。

例 如圖，$\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A、B 兩點，
$\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，若圓 O 半徑為 9，
$\overline{OP}=15$，則 $\overline{AP}=\sqrt{15^2-9^2}=12$，
$\overline{AM}=\dfrac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{9\times 12}{15}=\dfrac{36}{5}$，
因此 $\overline{AB}=2\,\overline{AM}=\dfrac{2\times 36}{5}=\dfrac{72}{5}$。



❻弦與弦心距的性質

(1)通過圓心與弦垂直的直線會平分此弦；弦的中垂線會通過圓心。

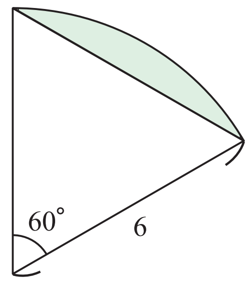
(2)在同圓或等圓中，若弦心距相等，則所對應的弦等長；
若弦等長，則所對應的弦心距相等。

(3)在同圓或等圓中，若弦心距愈長，則所對應的弦愈短；
若弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

例 已知圓 O 的半徑為 10，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，
$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB}=12$，
$\overline{CD}=16$，則 $\overline{OM}>\overline{ON}$。

2-1 自我評量

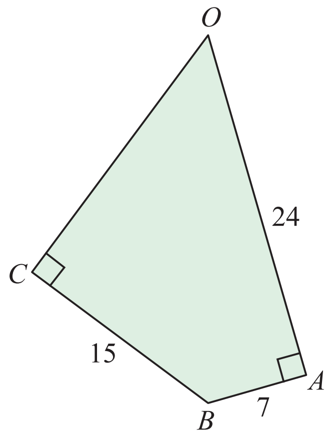
❶ 如圖，已知扇形的半徑為 6 公分，圓心角為 60°，則綠色弓形面積為多少平方公分？ 課 P94 例 1



❷ 如圖，四邊形 $OABC$ 中，$\angle A$ 和 $\angle C$ 均為直角，$\overline{OA}=24$，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=15$，回答下列問題： 課 P98 例 4

(1) 求 $\overline{OC}$。

(2) 若以 O 點為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫圓，則 A、B、C 三點會分別落在圓內、圓上或圓外？

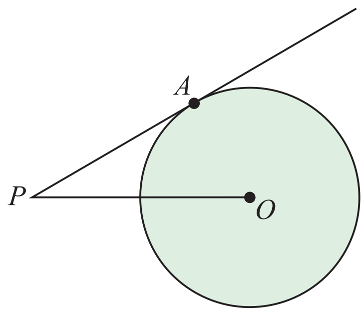


3 已知圓 O 的直徑為 10，圓心 O 到三條直線 L_1、L_2、L_3 的距離分別為 3、5、7，回答下列問題：
課 P100 隨堂

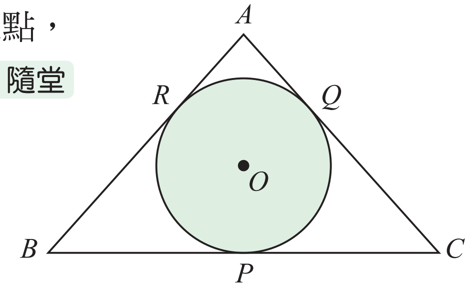
(1)這三條直線中，哪一條是切線？哪一條是割線？

(2)若直線 M 恰好與圓 O 交於一點，求圓心 O 到直線 M 的距離。

4 如圖，$\overleftrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑為 6，$\overline{PO}=12$，求 $\overline{PA}$ 及△OPA 的面積。
課 P101 例 5



❺如圖，等腰三角形 ABC 與圓 O 相切於 P、Q、R 三點，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$，求 $\overline{AR}$。 課 P104 隨堂



❻如圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，$\overline{OM}$、$\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB}=16$，$\overline{OM}=6$，$\overline{ON}=8$，求 $\overline{CD}$。 課 P106 例 8