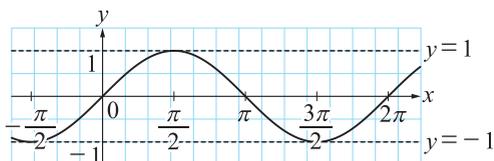


# 1-3 三角函數的圖形

## 重點整理

### 一、三角函數的圖形

#### 1. 正弦函數 $y = \sin x$ :



定義域：所有實數，亦可記為  $(-\infty, \infty)$ 。

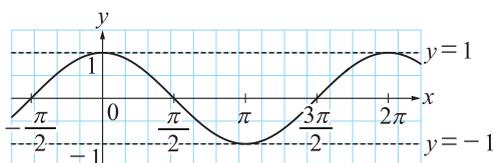
值域： $[-1, 1]$ 。

週期： $2\pi$ 。

振幅： $1$ 。

圖形對稱於原點。

#### 2. 餘弦函數 $y = \cos x$ :



定義域：所有實數，亦可記為  $(-\infty, \infty)$ 。

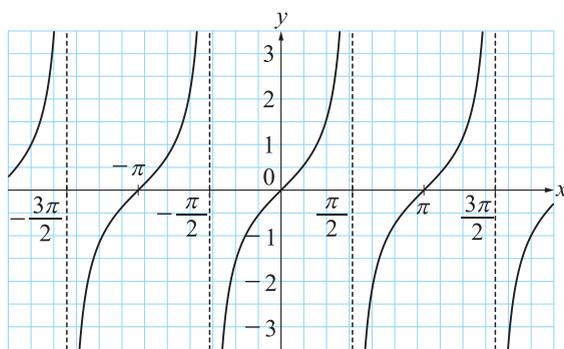
值域： $[-1, 1]$ 。

週期： $2\pi$ 。

振幅： $1$ 。

圖形對稱於  $y$  軸。

#### 3. 正切函數 $y = \tan x$ :



定義域： $\left\{x \mid x \text{ 為實數且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 為整數}\right\}$ 。

值域：所有實數，亦可記為  $(-\infty, \infty)$ 。

週期： $\pi$ 。

圖形對稱於原點。

## 二、三角函數圖形的平移與伸縮

### 1. 平移

設  $h, k > 0$ ,

(1)  $y = f(x) + k$  的圖形是將  $y = f(x)$  的圖形向上平移  $k$  單位。

**例**：  $y = \sin x + 1$  的圖形是將  $y = \sin x$  的圖形向上平移 1 單位。

(2)  $y = f(x) - k$  的圖形是將  $y = f(x)$  的圖形向下平移  $k$  單位。

**例**：  $y = \cos x - 2$  的圖形是將  $y = \cos x$  的圖形向下平移 2 單位。

(3)  $y = f(x + h)$  的圖形是將  $y = f(x)$  的圖形向左平移  $h$  單位。

**例**：  $y = \tan(x + \pi)$  的圖形是將  $y = \tan x$  的圖形向左平移  $\pi$  單位。

(4)  $y = f(x - h)$  的圖形是將  $y = f(x)$  的圖形向右平移  $h$  單位。

**例**：  $y = \sin(x - 1)$  的圖形是將  $y = \sin x$  的圖形向右平移 1 單位。

### 2. 伸縮

設  $a > 0$ ,

(1)  $y = af(x)$  的圖形是將  $y = f(x)$  圖形上每一點的  $y$  坐標都乘以  $a$  倍而得。

**例**：  $y = 3 \sin x$  的圖形是將  $y = \sin x$  圖形上每一點的  $y$  坐標都乘以 3 倍而得。

(2)  $y = f(ax)$  的圖形是將  $y = f(x)$  圖形上每一點的  $x$  坐標都乘以  $\frac{1}{a}$  倍而得。

**例**：  $y = \cos 2x$  的圖形是將  $y = \cos x$  圖形上每一點的  $x$  坐標都乘以  $\frac{1}{2}$  倍而得。

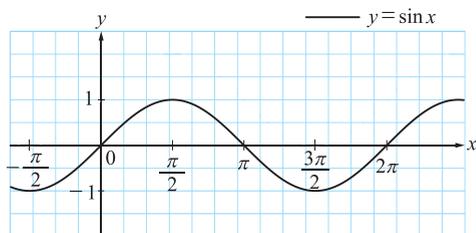
### 例題 1 正弦函數圖形的上下平移與左右平移

利用  $y = \sin x$  的圖形，畫出下列各函數的圖形：

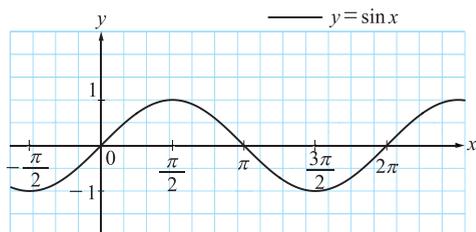
(1)  $y = \sin x + 1$ 。(5 分)

(2)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。(5 分)

**解** (1)



(2)



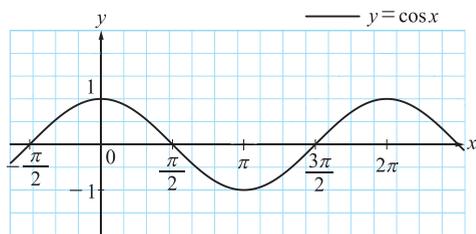
### 例題 2 餘弦函數圖形的上下平移與左右平移

利用  $y = \cos x$  的圖形，畫出下列各函數的圖形：

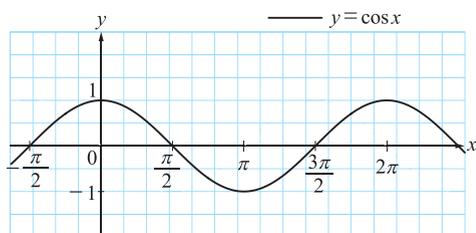
(1)  $y = \cos x + 1$ 。(5分)

(2)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。(5分)

解 (1)



(2)



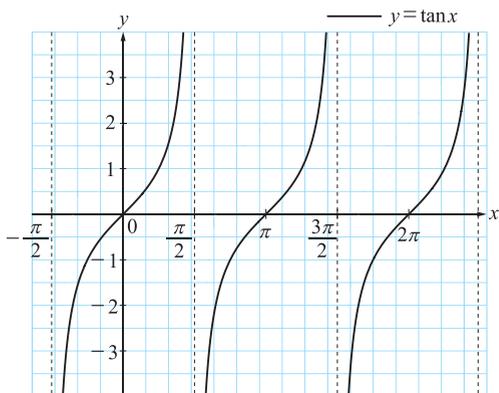
### 例題 3 正切函數圖形的上下平移與左右平移

利用  $y = \tan x$  的圖形，畫出下列各函數的圖形：

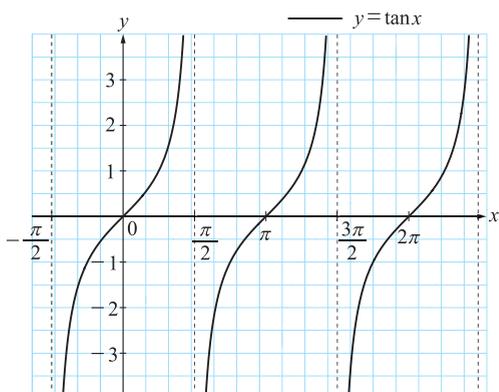
(1)  $y = \tan x + 2$ 。(5分)

(2)  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。(5分)

解 (1)



(2)



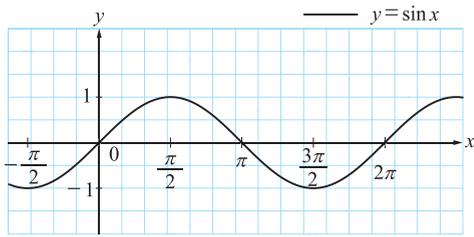
### 例題 4 正弦函數圖形的上下伸縮與左右伸縮

利用  $y = \sin x$  的圖形，畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值與最小值：

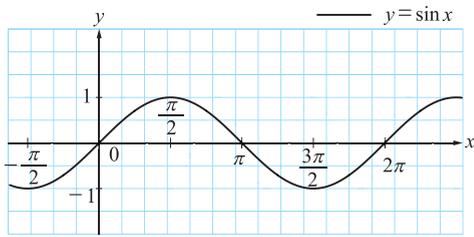
(1)  $y = -2 \sin x$ 。(5分)

(2)  $y = \sin 3x$ 。(5分)

解 (1)



(2)



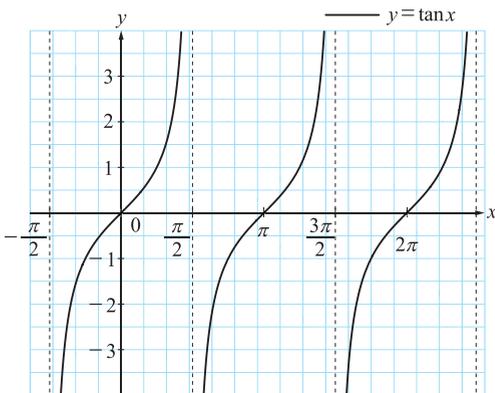
### 例題 5 正切函數圖形的上下伸縮與左右伸縮

利用  $y = \tan x$  的圖形，畫出下列各函數的圖形，並求其週期：

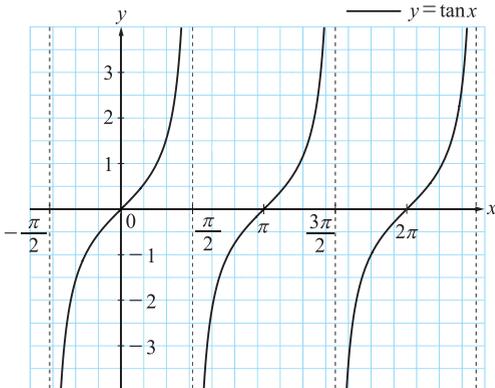
(1)  $y = -2 \tan x$ 。(5分)

(2)  $y = \tan 2x$ 。(5分)

解 (1)



(2)



**例題 6 用三角函數圖形解三角方程式**

- (1) 在  $0 \leq x \leq 2\pi$  範圍內，試求三角方程式  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  的解。(5分)
- (2) 在  $0 \leq x \leq 2\pi$  範圍內，試求三角方程式  $\cos x = -\frac{1}{2}$  的解。(5分)

**解****例題 7 用三角函數圖形解三角的不等式**

- (1) 在  $0 \leq x \leq 2\pi$  範圍內，試求三角的不等式  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$  的解。(5分)
- (2) 在  $0 \leq x \leq 2\pi$  範圍內，試求三角的不等式  $1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$  的解。(5分)

**解**

### 例題 8 比較三角函數值的大小(用函數圖形比較或使用計算機求值比較)

試比較  $\sin 2$ ,  $\sin 3$ ,  $\sin 4$  的大小。(10 分)

解

### 例題 9 三角函數的週期

試求下列各函數週期：

(1)  $y = 5 \sin x$ 。(2 分)                      (2)  $y = \cos \frac{x}{3}$ 。(2 分)                      (3)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$ 。(2 分)

(4)  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$ 。(2 分) (5)  $y = \tan \frac{x}{4}$ 。(2 分)

解

### 例題 10 用三角函數圖形模擬週期性現象

小華在摩天輪某車廂到達最低點時進入乘坐，假設此車廂  $t$  秒後距離地面的高度為

$$h = f(t) = 40 \sin\left(\frac{\pi}{600}t + \frac{3\pi}{2}\right) + 80 \text{ 公尺}, \text{ 試求:}$$

- (1) 車廂離地面最高多少公尺?(5 分)
- (2) 摩天輪轉一圈的週期。(5 分)

解