

② 多項式的除法

我們曾經學過整數的乘除關係，例如： $2 \times (\quad) = 18$ ，則
 $(\quad) = 18 \div 2 = 9$ ，這種乘除互逆的關係，對於多項式也成立。

例 6 乘除互逆

求下列 $(\quad)$ 中的多項式：

$$(1) 5x \times (\quad) = 35x^2$$

$$(2) 5x \times (\quad) = 7x^2$$

解 $(1) 5x \times (\quad) = 35x^2$

$$(\quad) = 35x^2 \div (5x) = \frac{35x^2}{5x} = \frac{35 \cdot x \cdot \cancel{x}}{5 \cdot \cancel{x}} = 7x$$

$$(2) 5x \times (\quad) = 7x^2$$

$$(\quad) = 7x^2 \div (5x) = \frac{7x^2}{5x} = \frac{7 \cdot x \cdot \cancel{x}}{5 \cdot \cancel{x}} = \frac{7}{5}x$$

$35x^2 \div (5x)$ 與
 $35x^2 \div 5x$ 是相同
 的意思。

隨堂練習

在下列空格中填入適當的多項式：

$$(1) 5x^2 \times \underline{\hspace{2cm}} = -15x^3$$

$$(2) 5x \times \underline{\hspace{2cm}} = \frac{5}{2}x^2$$

在例 6 第(1)題， $(35x^2) \div (5x)$ 也可利用直式計算：

$$\begin{array}{r}
 7x \quad \text{..... 商式} \\
 \text{除式 } 5x \overline{) 35x^2} \quad \text{..... 被除式} \\
 \underline{35x^2} \quad \leftarrow 5x \cdot 7x \\
 \text{餘式 } 0 \quad \leftarrow 35x^2 \text{ 減 } 35x^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \quad \text{..... 商} \\
 \text{除數 } 5 \overline{) 35} \quad \text{..... 被除數} \\
 \underline{35} \quad \leftarrow 5 \times 7 \\
 0 \quad \text{..... 餘數}
 \end{array}$$

所以 $(35x^2) \div (5x) = 7x$ 。

在上例 $(35x^2) \div (5x)$ 的直式除法中， $35x^2$ 稱為**被除式**， $5x$ 稱為**除式**，
 $7x$ 稱為**商式**， 0 稱為**餘式**。當餘式為 0 時，稱為**整除**。



甲

$$x^2 - 4x + 3$$

$$3x^2 + x - 5$$

$$2x^2 - x + 3$$

$$4x^2 + 2x + 1$$

觀察式子與右數的關係，甲應填入多少？

多項式的除法運算中，被除式、除式、商式、餘式都是多項式，**運算時先將被除式與除式依降冪排列**，再開始進行除法運算，**直到餘式的次數比除式的次數低或餘式為 0**。以 $(6x^2 + 8x - 3) \div (2x)$ 為例，說明如下：

步驟 1：

$2x$ 要乘以多少
才會等於 $6x^2$?

$$\begin{array}{r}
 \square \\
 2x \overline{) 6x^2 + 8x - 3}
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 3x \\
 2x \overline{) 6x^2 + 8x - 3} \\
 \underline{6x^2 \dots\dots\dots 2x \cdot 3x} \\
 8x \dots\dots\dots
 \end{array}$$

$6x^2 \div 2x = 3x$

$8x \dots\dots\dots$ $8x$ 的次數沒有低於除式 $2x$ 的次數，還要繼續除。

步驟 2：

$2x$ 要乘以多少
才會等於 $8x$?

$$\begin{array}{r}
 3x + \square \\
 2x \overline{) 6x^2 + 8x - 3} \\
 \underline{6x^2} \\
 8x
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x \overline{) 6x^2 + 8x - 3} \\
 \underline{6x^2} \\
 8x \\
 \underline{8x \dots\dots\dots 2x \cdot 4} \\
 - 3 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

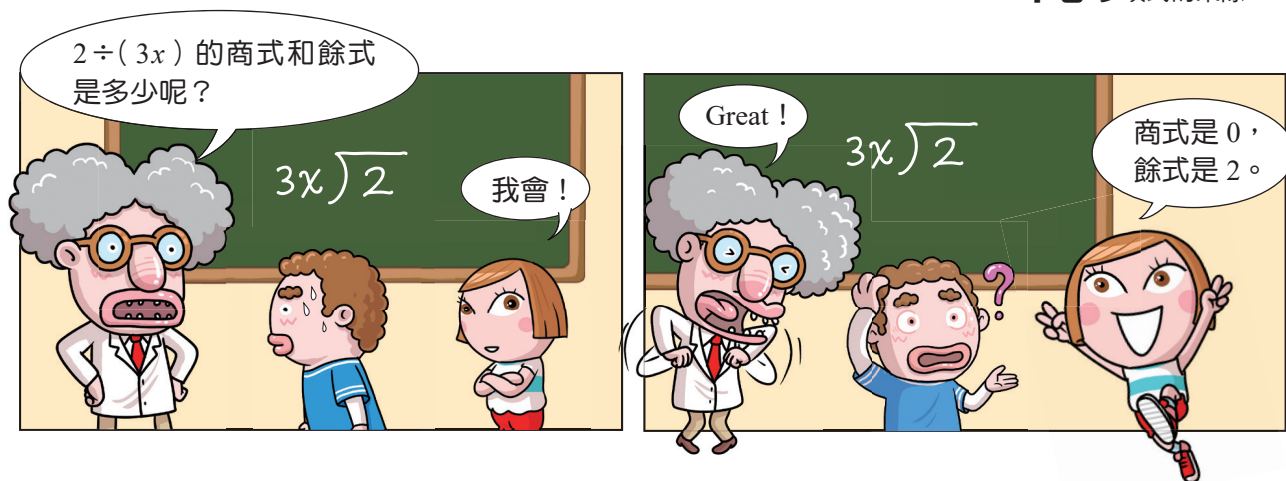
$8x \div 2x = 4$

餘式不為 0 時，其次數必須比除式的次數低。

$- 3 \dots\dots\dots$ $- 3$ 的次數低於除式 $2x$ 的次數，除法直式計算完成。



所以 $(6x^2 + 8x - 3) \div (2x)$ 的商式為 $3x + 4$ ，餘式為 -3 。



如果被除式的次數低於除式的次數，則商式為 0，而餘式即為被除式。

例 7 多項式除以單項式

自評 P46 第 3 題 (1)

求 $(5x^2 - 4x) \div x$ 的商式及餘式。

解

$$\begin{array}{r} 5x - 4 \\ x \overline{) 5x^2 - 4x} \\ \underline{5x^2} \\ - 4x \cdots \cdots - 4x \text{ 的次數沒有低於除式 } x \text{ 的次數。} \\ \underline{- 4x} \\ 0 \end{array}$$

所以 $(5x^2 - 4x) \div x$ 的商式為 $5x - 4$ ，餘式為 0。

隨堂練習

求下列各式的商式及餘式：

(1) $(9x^2 - 6x + 5) \div (3x)$

(2) $(4x^2 - 6x) \div (-2x)$



例8 二次式除以一次式

自評 P46 第3題 (2)

求 $(4x^2 - 2x + 5) \div (2x + 1)$ 的商式及餘式。

解

$$\begin{array}{r}
 4x^2 \div 2x = 2x \\
 (-4x) \div 2x = -2 \\
 \begin{array}{r}
 2x \quad -2 \\
 \hline
 2x+1 \overline{) 4x^2 - 2x + 5} \\
 \underline{4x^2 + 2x} \quad \cdots \cdots (2x+1) \cdot 2x \\
 -4x + 5 \\
 \underline{-4x - 2} \quad \cdots \cdots (2x+1) \cdot (-2) \\
 7
 \end{array}
 \end{array}$$

7 比 $2x+1$ 的次數低，故餘式為 7。



所以 $(4x^2 - 2x + 5) \div (2x + 1)$ 的商式為 $2x - 2$ ，餘式為 7。



隨堂練習

求下列各式的商式及餘式：

(1) $(6x^2 - 17x - 7) \div (3x - 1)$

(2) $(-4x^2 + 12x + 1) \div (-2x + 1)$

例9 多項式的除法 (商式的係數有分數)

自評 P47 第3題 (3)

求 $(3x^2 + 6x + 1) \div (3x + 5)$ 的商式及餘式。

解

$$\begin{array}{r}
 x + \frac{1}{3} \dots\dots\dots x \div 3x = \frac{1}{3} \\
 3x+5 \overline{) 3x^2 + 6x + 1} \\
 \underline{3x^2 + 5x} \\
 x + 1 \\
 \underline{x + \frac{5}{3}} \\
 -\frac{2}{3}
 \end{array}$$

所以 $(3x^2 + 6x + 1) \div (3x + 5)$ 的商式為 $x + \frac{1}{3}$ ，餘式為 $-\frac{2}{3}$ 。

隨堂練習

求下列各式的商式及餘式：

(1) $(2x^2 + 2x + 1) \div (2x + 3)$

(2) $(x^2 - 12x + 5) \div (3x + 9)$



$$\begin{array}{r}
 \frac{(x+3)(x+2)}{6} \\
 \frac{(x-2)(x+1)}{-2} \\
 \frac{(x-3)(x-7)}{-10} \\
 \frac{(x-5)(x-4)}{20}
 \end{array}$$

觀察式子與下方數的關係，哪一個應該被拿走？

除法和乘法一樣，遇到被除式或除式缺項時，通常要補 0。

例 10 多項式的除法（缺項補零）

自評 P47 第 3 題 (4)

求 $(4x^2 + 1) \div (4x + 3)$ 的商式及餘式。

解

$$\begin{array}{r}
 x - \frac{3}{4} \\
 4x+3 \overline{) 4x^2 + 0x + 1} \\
 \underline{4x^2 + 3x} \\
 - 3x + 1 \\
 \underline{- 3x - \frac{9}{4}} \\
 \frac{13}{4}
 \end{array}$$

所以 $(4x^2 + 1) \div (4x + 3)$ 的商式為 $x - \frac{3}{4}$ ，餘式為 $\frac{13}{4}$ 。



隨堂練習

求下列各式的商式及餘式：

(1) $(3x^2 - 5) \div (x + 1)$

(2) $(2x^2 - 1) \div (2x + 1)$

在整數的除法中，被除數 = 除數 $\times$ 商 + 餘數，例如： $37 \div 7$ 的商為 5，餘數為 2，則

$$\begin{array}{ccccccc} 37 & = & 7 & \times & 5 & + & 2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{被除數} & = & \text{除數} & \times & \text{商數} & + & \text{餘數} \end{array}$$

這樣的關係在多項式也成立，例如： $(x^2 + 3x + 5) \div (x + 1)$ 的商式為 $x + 2$ ，餘式為 3，則

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 + 3x + 5 & = & (x + 1) & \times & (x + 2) & + & 3 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{被除式} & = & \text{除式} & \times & \text{商式} & + & \text{餘式} \end{array}$$

即被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式。

例 11 求被除式

自評 P47 第 4 題

已知多項式 A 除以 $2x - 5$ 得商式為 $3x + 6$ ，餘式為 3，求多項式 A 。

解 被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式

$$\begin{aligned} \uparrow A &= (\uparrow 2x - 5)(\uparrow 3x + 6) + \uparrow 3 \\ &= 6x^2 + 12x - 15x - 30 + 3 \\ &= 6x^2 - 3x - 27 \end{aligned}$$

所以多項式 $A = 6x^2 - 3x - 27$ 。

隨堂練習

已知多項式 A 除以 $-3x + 1$ 得商式為 $x + 5$ ，餘式為 2，求多項式 A 。

