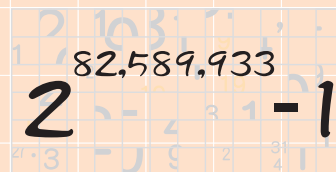


4 科學記號與常用對數

在 1876 年，數學家盧卡斯證明了 $2^{127} - 1$ 是當時已知的最大質數，該紀錄保持了 75 年之久。截至 2023 年底為止，已知的最大質數為 $2^{82589933} - 1$ ，日本有一家出版社發行了一本書，全書只印了 $2^{82589933} - 1 = 14889\cdots 02591$ 這個數。

本單元先複習科學記號，再介紹常用對數，最後利用常用對數來估計 $2^{82589933} - 1$ 的大小。


$$2^{82,589,933} - 1$$

▲圖1



甲 科學記號及其運算

科學的領域中，常有很大或很小的數，造成書寫與估計的不便，例如：光速為 299792458 公尺／秒，將其四捨五入到十萬位可得近似值為 299800000，當我們使用 299800000 來表示光速時，稱之為「將光速取 4 位**有效數字**」，或稱「以 299800000 來表示光速的**有效位數**是 4」。再將其以 2.998×10^8 表示，這樣的表示方式稱為**科學記號**。

科學記號表示法

每一個正實數 a 都可表成

$$a = b \times 10^n,$$

其中 $1 \leq b < 10$ ，且 n 是一個整數，並稱 $b \times 10^n$ 為 a 的科學記號。

特別值得注意的是，在上述光速的例子中，當我們取 3 位有效數字時，經過四捨五入後會得到近似值為 300000000，為了讓閱讀的人知道其有效位數是 3，以科學記號表示時，必須寫成

$$3.00 \times 10^8。$$

除了很大的數字會以科學記號表示之外，很小的數字也常用科學記號來表示，例如引起非典型肺炎（SARS）的病毒直徑約為 85 奈米，又因為 1 奈米等於 10^{-7} 公分，所以該病毒的直徑約為 8.5×10^{-6} 公分。

來練習一道有效數字與科學記號表示的例題。

例題 1

已知 2018 年美國的人口數為 329976959 人。

(1) 將人口數取 2 位有效數字並以科學記號表示。

(2) 將人口數取 3 位有效數字並以科學記號表示。

解

(1) 為了取 2 位有效數字，將人口數四捨五入到千萬位，得 330000000，且其科學記號表示為

$$3.3 \times 10^8。$$

(2) 為了取 3 位有效數字，將人口數四捨五入到百萬位，得 330000000，且其科學記號表示為

$$3.30 \times 10^8。$$

隨堂練習

流感病毒的直徑約為 100 奈米（3 位有效數字）且 1 奈米等於 10^{-7} 公分，問：將其以科學記號表示時為多少公分？

接下來練習一道科學記號運算的例題。

例題 2

計算下列各式的值，將答案取2位有效數字並以科學記號表示：

$$(1) (3.0 \times 10^3) \times (4.5 \times 10^{-7}) \quad (2) (3.2 \times 10^{15}) - (7.1 \times 10^{13})$$

解

$$\begin{aligned} (1) (3.0 \times 10^3) \times (4.5 \times 10^{-7}) &= (3.0 \times 4.5) \times (10^3 \times 10^{-7}) \\ &= 13.5 \times 10^{-4} = 1.35 \times 10^{-3} \approx 1.4 \times 10^{-3} \\ (2) (3.2 \times 10^{15}) - (7.1 \times 10^{13}) &= (3.2 \times 10^{15}) - (0.071 \times 10^{15}) \\ &= (3.2 - 0.071) \times 10^{15} = 3.129 \times 10^{15} \approx 3.1 \times 10^{15} \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值，將答案取2位有效數字並以科學記號表示：

$$(1) (3.4 \times 10^{-6}) \div (8.0 \times 10^4) \quad (2) (6.4 \times 10^{12}) + (2.8 \times 10^{11})$$

來看一道應用問題。

例題 3

已知太陽的體積約為 1.41×10^{18} 立方公里，且地球的體積約為 1.08×10^{12} 立方公里，試問：太陽的體積為地球的幾倍？（將答案取2位有效數字並以科學記號表示。）

解

$$(1.41 \times 10^{18}) \div (1.08 \times 10^{12}) = \frac{1.41 \times 10^{18}}{1.08 \times 10^{12}} = 1.305 \dots \times 10^6 \approx 1.3 \times 10^6$$

故太陽的體積為地球的 1.3×10^6 倍。

隨堂練習

亞洲是世界上最大的洲，其面積約為 4.46×10^7 平方公里；大洋洲是世界最小的洲，其面積約為 8.54×10^6 平方公里。試問：亞洲的面積比大洋洲大多少？（將答案取 2 位有效數字並以科學記號表示）

乙 常用對數

科學記號 $a \times 10^n$ 的形式簡潔地表示很大或很小的數，其中的「10 的次方」可以幫助我們看出此數的大小。

事實上，任意正數 b 都可化成「10 的次方」的形式，而這個次方（也稱為指數）的值我們以符號 $\log b$ 表示，即

$$b = 10^{\log b},$$

並稱 $\log b$ 為 b 的**常用對數**。例如： $2 = 10^{\log 2}$ ， $0.5 = 10^{\log 0.5}$ 。



約翰·納皮爾

（John Napier，1550～1617）對數的發明者，使得科學界許多繁複的計算可以簡化。

常用對數的定義

設 $b > 0$ ，當實數 a 滿足 $b = 10^a$ 時，這個指數的值 a 可用符號 $\log b$ 表示，即

$$b = 10^{\log b},$$

並稱 $\log b$ 為 b 的**常用對數**。

練習利用常用對數將任意正數表為「10的次方」的形式。

例題 4

(1) 利用常用對數將 2.7 表為「10的次方」的形式。

(2) 求 $10^{\log 3.14}$ 的值。

解

(1) 根據常用對數的定義 ($b = 2.7$)，得 $2.7 = 10^{\log 2.7}$ 。

(2) 根據常用對數的定義 ($b = 3.14$)，得 $10^{\log 3.14} = 3.14$ 。

隨堂練習

(1) 利用常用對數將 0.02 表為「10的次方」的形式。

(2) 求 $10^{\log 120}$ 。

從常用對數的定義中發現，若將 b 寫成「10的次方」，即 $10^{\square}$ 的形式，則 $\square$ 的值可以用符號 $\log b$ 表示，也就是說，

「求 $\log b$ 的值」等同於「求 b 是 10 的幾次方」

例如：

(1) 因為 $1000 = 10^3$ ，所以 $\log 1000 = 3$ 。

(2) 因為 $0.01 = 10^{-2}$ ，所以 $\log 0.01 = -2$ 。

例題 5

求下列各數的值：

(1) $\log 1$ 。

(2) $\log 100$ 。

(3) $\log 0.001$ 。

解

(1) 因為 $1 = 10^0$ ，所以 $\log 1 = 0$ 。

(2) 因為 $100 = 10^2$ ，所以 $\log 100 = 2$ 。

(3) 因為 $0.001 = 10^{-3}$ ，所以 $\log 0.001 = -3$ 。

隨堂練習

(1) 求 $\log 10000$ 的值。

(2) 求 $\log \frac{1}{10}$ 的值。

利用常用對數的定義練習一道指數與常用對數轉換與求值的問題。

例題 6

已知 $t = \log 13$ ，求下列各數的值：

(1) 100^t 。

(2) $10^t + 10^{-t}$ 。

解

依題意得 $13 = 10^{\log 13} = 10^t$ 。

(1) $100^t = (10^2)^t = (10^t)^2 = 13^2 = 169$ 。

(2) $10^t + 10^{-t} = 10^t + (10^t)^{-1} = 13 + 13^{-1} = 13 + \frac{1}{13} = \frac{170}{13}$ 。

隨堂練習

已知 $t = \log 5$ ，求下列各數的值：

(1) 100^t 。

(2) $10^t + 10^{-t}$ 。



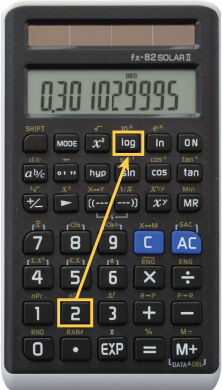
仿照單元 1 中使用十分逼近法求 $\sqrt{2}$ 近似值的方法可探討 $\log b$ 的近似值，以 $\log 2$ 為例，由 $2 = 10^{\log 2}$ ，利用計算機列表如下。

判斷 2 所在的範圍	→ $\log 2$ 的範圍
(1) 由 $10^0 = 1, 10^1 = 10$ 可得 $10^0 < 2 = 10^{\log 2} < 10^1$ 。	$0 < \log 2 < 1$
(2) 由 $10^{0.1} \approx 1.259, 10^{0.2} \approx 1.585, 10^{0.3} \approx 1.995,$ $10^{0.4} \approx 2.512$ 可得 $10^{0.3} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.4}$ 。	$0.3 < \log 2 < 0.4$
(3) 由 $10^{0.30} \approx 1.995, 10^{0.31} \approx 2.042$ 可得 $10^{0.30} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.31}$ 。	$0.30 < \log 2 < 0.31$
(4) 由 $10^{0.301} \approx 1.9999, 10^{0.302} \approx 2.0045$ 可得 $10^{0.301} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.302}$ 。	$0.301 < \log 2 < 0.302$
(5) 由 $10^{0.3010} \approx 1.9999, 10^{0.3011} \approx 2.0003$ 可得 $10^{0.3010} < 2 = 10^{\log 2} < 10^{0.3011}$ 。	$0.3010 < \log 2 < 0.3011$
$\vdots$	$\vdots$

綜合以上可得 $\log 2 = 0.301\dots \approx 0.30$ 。繼續重複以上的步驟，每次將求得的 $\log 2$ 的範圍再細分成 10 等分，所得的小數就會增多一位，這樣的近似值也就更為精確。

其實，計算機也可以快速地得到 $\log 2$ 的近似值，只要依序按下 2 $\log$ 如圖 2 所示，就可得到

$\log 2 \approx 0.301029995$ 。



▲圖2

例題 7



求 $\log 1.34$ 的值（四捨五入到小數點以下第 4 位）。

解

利用計算機，依序按下

1.34 $\log$

可得

$$\log 1.34 \approx 0.1271。$$

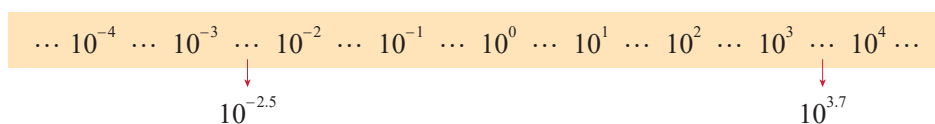
最後，介紹利用常用對數將一個數化成「10 的次方」的形式來估計其大小。因為任意正數 b 可表為 $10^{\log b}$ ，所以只要知道 $\log b$ 的值，就可以知道 b 的範圍，以兩個例子說明如下：

(1) 若 $\log b = 3.7$ ，則 $b = 10^{\log b} = 10^{3.7}$ ，可得 $10^3 < 10^{3.7} < 10^4$ ，

即 $1000 < b < 10000$ ，因此 b 的整數部分是 4 位數。

(2) 若 $\log b = -2.5$ ，則 $b = 10^{\log b} = 10^{-2.5}$ ，可得 $10^{-3} < 10^{-2.5} < 10^{-2}$ ，

即 $0.001 < b < 0.01$ ，因此 b 在小數點後第 3 位開始不為 0。



▲ 圖3

最後來做一道跟引言相關的應用問題。

例題 8

盧卡斯證明了 $2^{127} - 1$ 為質數，問：此質數是幾位數？

解

解法一

利用計算機可得 $2^{127} - 1 \approx 1.7 \times 10^{38}$ 。

故此質數為 39 位數。

解法二

因為 2^{127} 的個位數不是 0，所以 $2^{127} - 1$ 和 2^{127} 位數相同。利用 $2 = 10^{\log 2}$ ，得

$$2^{127} = (10^{\log 2})^{127} = 10^{127 \times \log 2}。$$

再使用計算機求得指數部分為

$$127 \times \log 2 \approx 38.2，$$

可得 $10^{38} < 10^{38.2} < 10^{39}$ ，即 $10^{38} < 2^{127} - 1 < 10^{39}$ 。

故此質數為 39 位數。

在例題 8 的解法一中，利用計算機即可輕易求得 $2^{127} - 1$ 的近似值，並判斷其位數；然而，當數字很大（例如引言及以下提到的 $2^{82589933} - 1$ ）而無法直接使用計算機求得其近似值時，可以仿照解法二的作法來估計其位數。

隨堂練習

已知 $2^{31} - 1$ 是質數，求此質數的位數。

在例題 8 中形如 $2^n - 1$ 的質數稱為梅森質數，截至 2023 年底為止，已知的最大質數為梅森質數 $2^{82589933} - 1$ ，這麼大的數到底有幾位呢？如果直接按計算機求 $2^{82589933} - 1$ 的值，會出現 -E- 的畫面（隨著計算機的不同，顯示有所不同，有的計算機會出現 Error 的畫面），這是因為數字太大，已經超過計算機的範圍。

此時，可以仿照例題 8 解法二的做法求得其位數，說明如下：利用 $2 = 10^{\log 2}$ ，得

$$2^{82589933} = (10^{\log 2})^{82589933} = 10^{82589933 \log 2} ,$$

再使用計算機求得指數部分為

$$82589933 \log 2 \approx 24862047.2 ,$$

故此質數為 24862048 位數。進一步來說，利用計算機可得

$$2^{82589933} \approx 10^{24862047.2} = 10^{0.2} \times 10^{24862047} \approx 1.58 \times 10^{24862047} .$$

早期，梅森質數的探究推動了數論的研究與發展，而近期，尋找更大的梅森質數也促進了計算機、密碼學、網路應用等技術的發展。例如2016年，利用英特爾的微型電腦處理機在尋找更大的梅森質數時，發現在處理極大量的數字運算下，會發生系統當機無法作業的問題，進而修正並提升了電腦的軟體。

4 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

- ☐ (1) 3.2100 的有效位數是 5。
- ☐ (2) $7 = 10^{\log 7}$ 。
- ☐ (3) $\log 10 = 2$ 。
- ☐ (4) $10^{19.1}$ 的整數部分為 19 位數。



一、基礎題

- 1 已知太陽到地球的平均距離為 149597870.7 公里。
 - (1) 將此平均距離取 2 位有效數字並以科學記號表示。
 - (2) 將此平均距離取 3 位有效數字並以科學記號表示。
- 2 關於 0.3210×10^9 ，選出所有正確的選項。
 - (1) 以上為科學記號表示法。
 - (2) 此數為 9 位數。
 - (3) 此數共有 6 個 0。
 - (4) 此數大於 1 億。
- 3 求下列各數的值：
 - (1) $\log 100000$ 。
 - (2) $\log \frac{1}{10000}$ 。



4 已知 $t = \log 7$ ，求下列各數的值：

(1) 10^t 。

(2) $100^t + 10^{-t}$ 。

5 設 $6^{100} = 10^k$ ，求 k 的值。（四捨五入到小數點後第一位）

二、進階題

6 2019年谷歌的量子AI實驗室負責人尼文提出了未來的量子電腦會依循著「尼文定律」：經過 $1, 2, 3, \dots, n$ 個週期後，其運算速度會變成原來的 $2^{2^1} = 2^2, 2^{2^2} = 2^4, 2^{2^3} = 2^8, \dots, 2^{2^n}$ 倍。設某台量子電腦經過 10 個週期後，其運算速度變為原來的 b 倍，且 $b = 10^k$ ，求 k 的值。（四捨五入到整數位）

7 根據班佛法則，在某銀行裡，帳戶存款數最高位數字是 a 的人數占所有人數的比例為 $x = \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$ 。求當 $a = 1$ 時， x 的值最接近下列哪個選項？

(1) 10%

(2) 20%

(3) 30%

(4) 40%

(5) 50%。