5 拋物線

古希臘數學家阿波羅尼斯提出以不同方向的平面切割直圓錐面來得到各種圓錐曲線，他也是第一位命名拋物線、橢圓與雙曲線的數學家。

拋物線是生活中常看見的幾何圖形，如圖 1 是西班牙的聖庫加特博物館，其拱門的形狀為拋物線的一部分。

▲圖 1

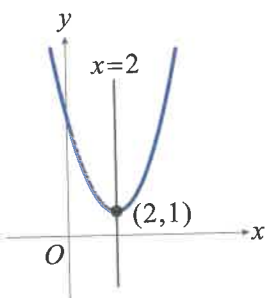
本單元將從拋物線的幾何定義開始，依序介紹拋物線的圖形與方程式。

甲 拋物線的幾何定義

第一冊學過二次函數 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）的圖形是一條拋物線，例如

$$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

是一個開口向上、頂點為 $(2,1)$、對稱軸為直線 $x=2$ 的拋物線，如圖 2 所示。

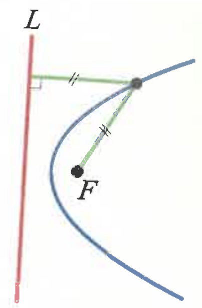


▲圖 2

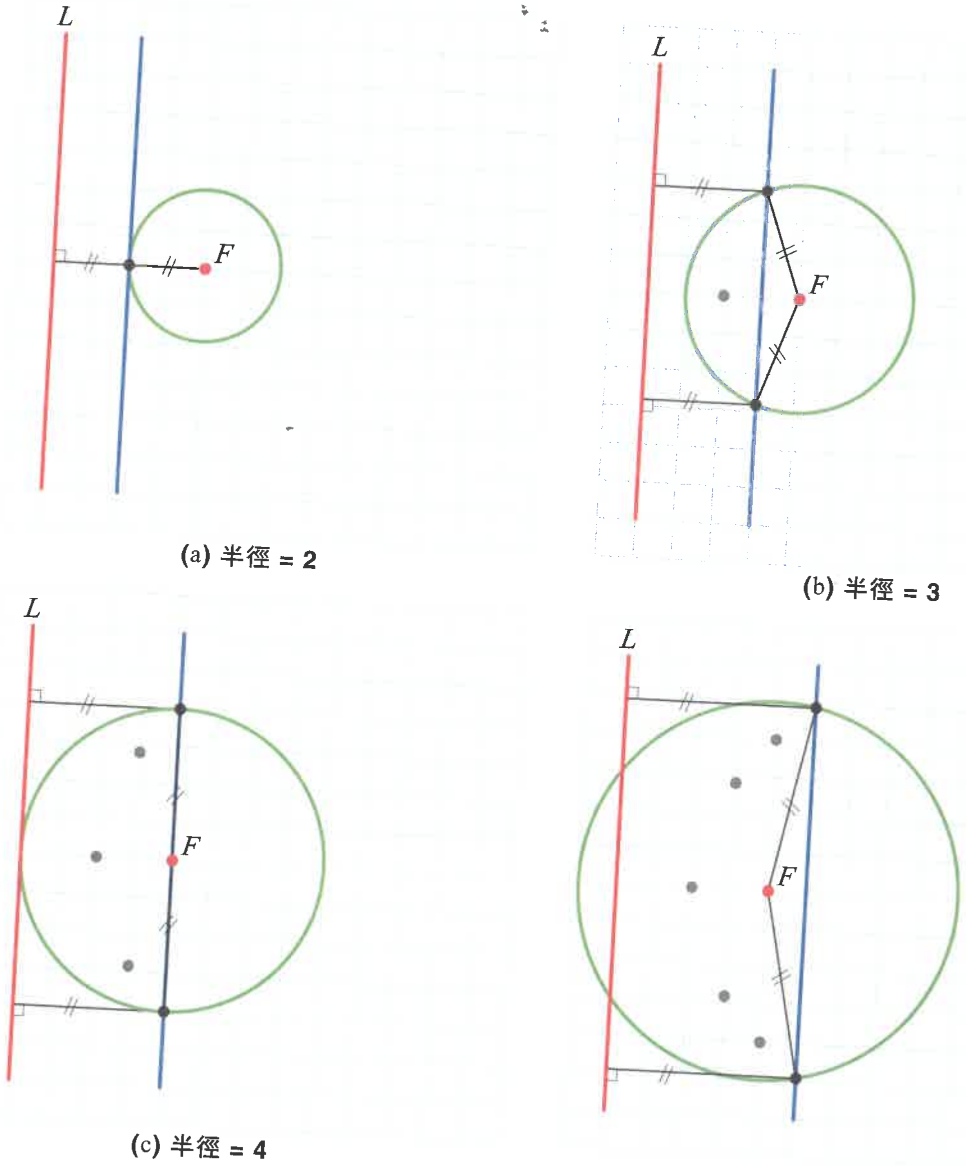
事實上，拋物線有其幾何上的定義，由此定義出來的圖形會與上述二次函數的圖形一樣，都是拋物線。以下我們就用幾何觀點來介紹拋物線。

拋物線的幾何定義

設平面上有一直線 L，及線外的一點 F。平面上所有到直線 L 與 F 點等距離的點所形成的圖形，稱為**拋物線**。直線 L 稱為此拋物線的**準線**，F 點稱為此拋物線的**焦點**。



我們進一步來說明如何從以上的定義得出拋物線：給定直線 L 與線外一點 F，圖 3 (a) (b) (c) (d) 中的圓皆以 F 為圓心，半徑分別為 $2,3,4,5$；藍色的直線與 L 平行且與 L 的距離分別為 $2,3,4,5$。



(a) 半徑 = 2

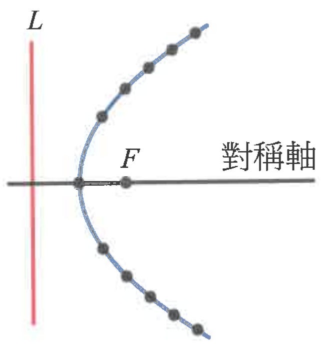
(b) 半徑 = 3

(c) 半徑 = 4

(d) 半徑 = 5

▲圖 3

圖 3 中這些圓與直線的交點皆滿足到直線 L 與 F 點等距離。依照上面的方式，改變圓的半徑（藍色直線與 L 的距離也隨之改變），可以描出更多的交點，以圓滑曲線將這些點連起來就會是拋物線，如圖 4 所示。



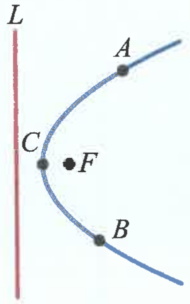
▲圖 4

繪圖的過程發現：拋物線是一條非封閉的曲線，其開口朝向焦點 F，並對稱於過 F 點且與 L 垂直的直線，我們稱此直線為拋物線的**對稱軸**。

利用定義來比較拋物線上各點與焦點的距離長短。

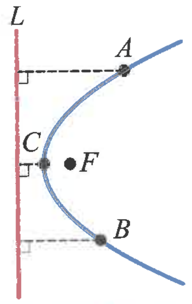
例題 1

右圖是拋物線的部分圖形，F 點為焦點且準線 L 是一條鉛直線，圖中的 A, B, C 三點皆在拋物線上，由大到小排序這三點到焦點 F 的距離。



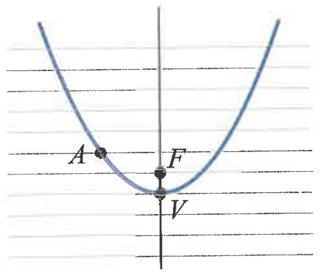
解

因為拋物線上的點到焦點的距離等於它到準線的距離，所以離準線愈遠的點到焦點的距離愈大，如右圖所示。故由大到小排序這三點到焦點 F 的距離為 A, B, C。



隨堂練習

右圖是拋物線的部分圖形，圖中相鄰的灰色水平格線均相距 1 單位，鉛直線為拋物線的對稱軸，且 F 點為焦點。



(1) 試畫出拋物線的準線。

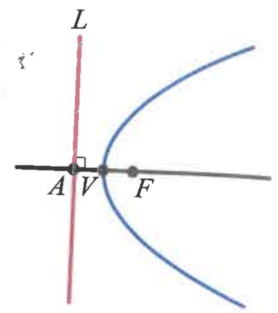
(2) 求 A 點到焦點 F 的距離。

接著介紹拋物線圖形的重要元素。在圖 5 中，直線 L 與 F 點分別為拋物線的準線與焦點。

(1) **對稱軸**：通過焦點 F 且與準線 L 垂直的直線稱為對稱軸。

(2) **頂　點**：對稱軸和拋物線的交點 V 稱為頂點。

(3) **焦　距**：頂點 V 與焦點 F 的距離稱為焦距。



▲圖 5

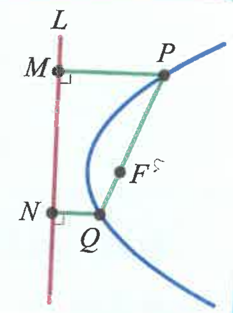
值得一提的是，設 A 點為準線與對稱軸的交點，由拋物線的定義可知：

$$\overline{VF}=\overline{VA},$$

也就是說，頂點 V 是 $\overline{AF}$ 的中點，這是一個常用的性質。

例題 2

如右圖所示，直線 L 與 F 點分別為拋物線的準線與焦點，P, Q 是拋物線上的兩點且 F 點在 $\overline{PQ}$ 上。已知 P, Q 到準線的距離分別為 $\overline{PM}=9, \overline{QN}=4$，求 $\overline{MN}$ 的長度。

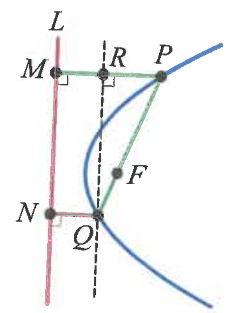


解

首先，根據拋物線的定義可得

$$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PM}+\overline{QN}=9+4=13。$$

接著，過 Q 點做平行 L 的直線，交 $\overline{PM}$ 於 R 點，如右圖所示，可得



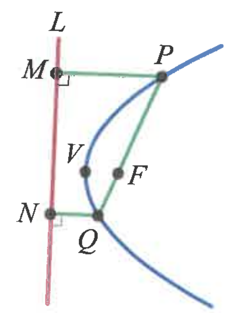
$$\overline{PR}=\overline{PM}-\overline{RM}=\overline{PM}-\overline{QN}=9-4=5。$$

最後，利用畢氏定理，可得

$$\overline{MN}=\overline{QR}=\sqrt{13^2-5^2}=12。$$

隨堂練習

承例題 2，求焦距 $\overline{VF}$ 的長度。

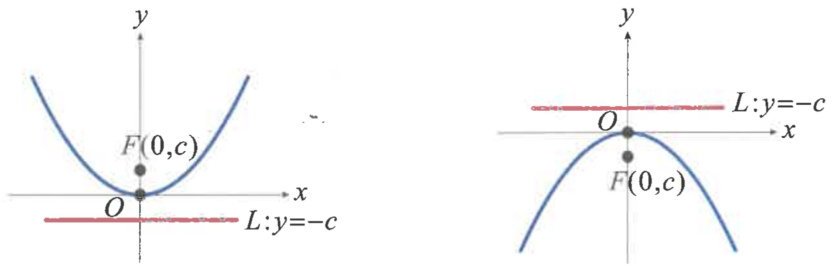


乙 頂點為原點的拋物線方程式

根據拋物線的定義及其性質，我們來推導頂點為原點、對稱軸為 x 軸或 y 軸的拋物線方程式。

(一) 頂點為原點、對稱軸為 y 軸的拋物線方程式

當拋物線的頂點為原點 O，對稱軸為 y 軸時，可設拋物線的焦點為 $F(0,c)$，準線為 $L：y=-c$（$c\neq0$），如圖 6 所示。



$c>0$（開口向上）　　$c<0$（開口向下）

▲圖 6

設 $P(x,y)$ 為拋物線上的一點。由拋物線的定義可知：$P(x,y)$ 到焦點 $F(0,c)$ 的距離等於 $P(x,y)$ 到準線 $L：y=-c$ 的距離，利用距離公式，得

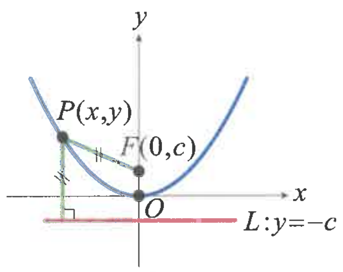
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=|y-(-c)|,$$

將等式兩邊平方後再展開，得

$$x^2+y^2-2cy+c^2=y^2+2cy+c^2,$$

移項整理，得

$$x^2=4cy。$$



▲圖 7

反之，滿足這個方程式的點 (x,y) 也都在此拋物線上。

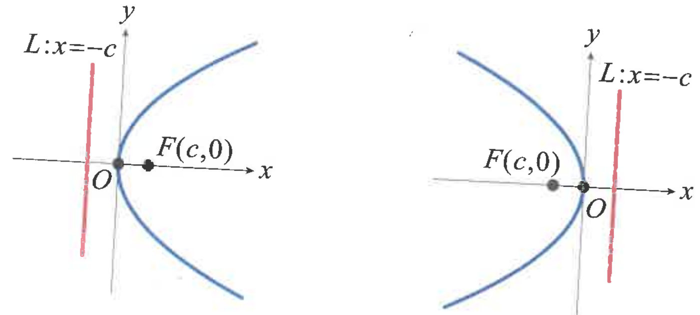
故當拋物線的頂點為 $(0,0)$、焦點為 $(0,c)$ 時，拋物線的方程式為

$$x^2=4cy。$$

此時亦可發現：上述的拋物線方程式 $x^2=4cy$ 便是我們國中學過的一元二次函數 $y=\dfrac{1}{4c}x^2$。

(二) 頂點為原點、對稱軸為 x 軸的拋物線方程式

當拋物線的頂點為原點，對稱軸為 x 軸時，可設拋物線的焦點為 $F(c,0)$，準線為 $L：x=-c$（$c\neq0$），如圖 8 所示。



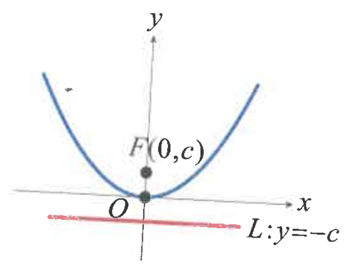
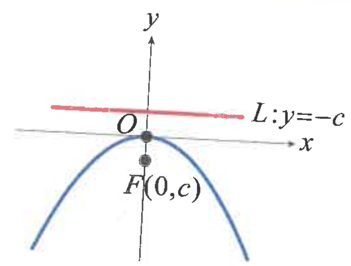
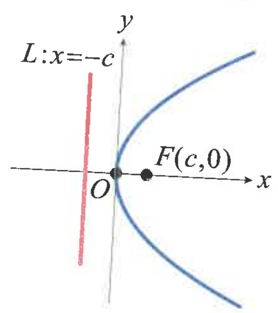
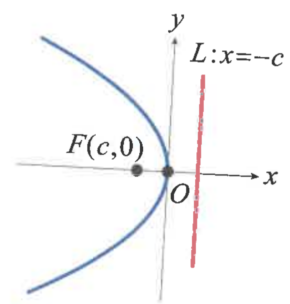
$c>0$（開口向右）　　$c<0$（開口向左）

▲圖 8

仿照 (一) 的作法可得其方程式為

$$y^2=4cx。$$

將拋物線的方程式與其圖形之間的關係整理於下表。

方程式	$c>0$	$c<0$
$x^2=4cy$		
$y^2=4cx$		

當我們知道拋物線圖形的一些元素時，可以求出其方程式。

例題 3

求滿足下列各條件的拋物線方程式。

(1) 頂點為 $(0,0)$，焦點為 $(0,1)$。

(2) 焦點為 $F(-3,0)$，準線為 $L：x=3$。

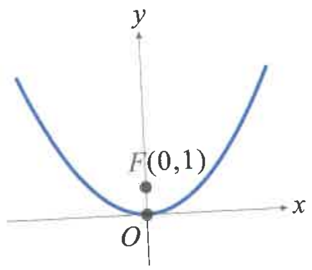
解

(1) 依題意畫圖，可得此拋物線的開口向上，且頂點為 $(0,0)$，如右圖所示。因此，拋物線的方程式形如

$x^2=4cy$，且 $(0,c)$ 為焦點。

又因為焦點為 $F(0,1)$，所以 $c=1$。

故此拋物線的方程式為 $x^2=4y$。

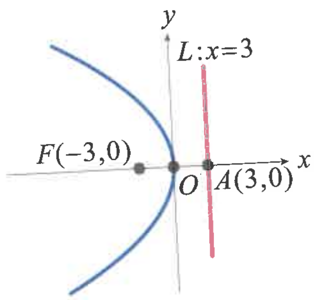


(2) 依題意畫圖，可得此拋物線的開口向左，且頂點是 $\overline{AF}$ 的中點，即頂點為 $(0,0)$，如右圖所示。因此，拋物線的方程式形如

$y^2=4cx$，且 $(c,0)$ 為焦點。

又因為焦點為 $F(-3,0)$，所以 $c=-3$。

故此拋物線的方程式為 $y^2=-12x$。



隨堂練習

求滿足下列各條件的拋物線方程式。

(1) 頂點為 $(0,0)$，準線為 $L：y=3$。

(2) 焦點為 $F(2,0)$，準線為 $L：x=-2$。

當我們知道拋物線的方程式時，也可以求出其圖形的各元素。

例題 4

求拋物線 $y^2=-12x$ 的頂點、焦點與準線方程式。

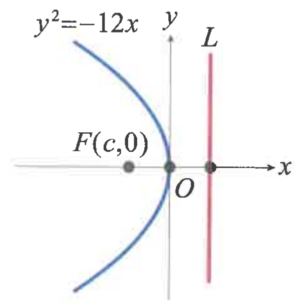
解

將方程式 $y^2=-12x$ 改寫成

$y^2=4\times(-3)\times x$，

可得拋物線的頂點為 $(0,0)$, $c=-3$，且開口向左，如右圖所示。

故此拋物線的頂點為 $(0,0)$，焦點 F 的坐標為 $(c,0)=(-3,0)$，且準線方程式為 $L：x=-c$，即 $x=3$。



隨堂練習

求拋物線 $x^2=-8y$ 的頂點、焦點與準線方程式。